

1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Quy tắc: Muốn nhân một đơn thức với một đa thức, ta nhân đơn thức đó với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích của chúng lại với nhau.

II. HƯỚNG DẪN MẪU

$$\begin{aligned} 2x \cdot (4x^3 - 2x + 5) &= 2x \cdot 4x^3 + 2x \cdot (-2x) + 2x \cdot 5 \\ &= 8x^4 - 4x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4x^3 - 2x + 5) \cdot 2x &= 4x^3 \cdot 2x + (-2x) \cdot 2x + 5 \cdot 2x \\ &= 8x^4 - 4x^2 + 10x \end{aligned}$$

Khi thành thạo:

$$\begin{aligned} 2x \cdot (4x^3 - 2x + 5) &= 2x \cdot 4x^3 - 2x \cdot 2x + 2x \cdot 5 \\ &= 8x^4 - 4x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ A \cdot (B + C - D) &= A \cdot B + A \cdot C - A \cdot D \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau: [CB - Rèn kỹ năng nhân]

$$\begin{aligned} \text{a)} & -2xy^2 \cdot (x^3y - 2x^2y^2 + 5xy^3) & \text{b)} & (-2x) \cdot (x^3 - 3x^2 - x + 1) & \text{c)} & 3x^2(2x^3 - x + 5) \\ \text{d)} & \left(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right) & \text{e)} & (3x^2y - 6xy + 9x) \cdot \left(-\frac{4}{3}xy\right) & \text{f)} & (4xy + 3y - 5x) \cdot x^2y \end{aligned}$$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau: [Rèn kỹ năng nhân và cộng trừ đa thức]

a) $5x^2 - 3x(x + 2)$	c) $3x^2y \cdot (2x^2 - y) - 2x^2 \cdot (2x^2y - y^2)$
b) $3x(x - 5) - 5x(x + 7)$	d) $3x^2 \cdot (2y - 1) - [2x^2 \cdot (5y - 3) - 2x \cdot (x - 1)]$
e) $4x(x^3 - 4x^2) + 2x(2x^3 - x^2 + 7x)$	f) $25x - 4(3x - 1) + 7x(5 - 2x^2)$

Bài 3: Thực hiện phép tính rồi tính giá trị biểu thức. [Rèn kỹ năng tính và thay số]

a) $A = 7x(x - 5) + 3(x - 2)$ tại $x = 0$.

b) $B = 4x(2x - 3) - 5x(x - 2)$ tại $x = 2$.

c) $C = a^2(a + b) - b(a^2 - b^2) + 2013$, với $a = 1$; $b = -1$;

d) $D = m(m - n + 1) - n(n + 1 - m)$, với $m = -\frac{2}{3}$; $n = -\frac{1}{3}$.

Bài 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y : [Rèn kỹ năng tính toán]

a) $A = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 3)$

b) $B = x(x^3 + 2x^2 - 3x + 2) - (x^2 + 2x)x^2 + 3x(x - 1) + x - 12$

c) $C = 3xy^2(4x^2 - 2y) - 6y(2x^3y + 1) + 6(xy^3 + y - 3)$

d) $D = 3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 1 - 3(x^2 - y^2)$

Bài 5: Tìm x , biết:

a) $5x\left(\frac{1}{5}x - 2\right) + 3\left(6 - \frac{1}{3}x^2\right) = 12$

b) $7x(x - 2) - 5(x - 1) = 7x^2 + 3$

c) $2(5x - 8) - 3(4x - 5) = 4(3x - 4) + 11$ d) $5x - 3\{4x - 2[4x - 3(5x - 2)]\} = 182$

Bài 6: Chứng minh đẳng thức

a) $a(b - c) - b(a + c) + c(a - b) = -2bc$

b) $a(1 - b) + a(a^2 - 1) = a(a^2 - b)$

Bài tập tương tự

Bài 7: Cho các đơn thức: $A = -x^2y^3$; $B = -\frac{2}{9}xy^2$; $C = -3y + 2x$

Tính: a) $A.C + B$ b) $B.C - A$ c) $A.B.C$ d) $\frac{A}{B}.C$

Bài 8: Thực hiện phép tính rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = x(x + y) - x(y - x)$ với $x = -3$; $y = 2$.

b) $B = 4x(2x + y) + 2y(2x + y) - y(y + 2x)$ với $x = \frac{1}{2}$; $y = -\frac{3}{4}$.

c) $C = 3x(3 - x) - 5x(x + 1) + 8(x^2 - x - 2)$ với $x = -1$.

Bài 9: Chứng tỏ rằng các đa thức sau không phụ thuộc vào biến:

$A = 4(x - 6) - x^2(2 + 3x) + x(5x - 4) + 3x^2(x - 1)$

Bài 10: Tìm x

a) $3x(4x - 3) - 2x(5 - 6x) = 0$

b) $5(2x - 3) + 4x(x - 2) + 2x(3 - 2x) = 0$

c) $3x(2 - x) + 2x(x - 1) = 5x(x + 3)$

d) $3x(x + 1) - 5x(3 - x) + 6(x^2 + 2x + 3) = 0$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $x(2x^2 + 1) =$

- A. $3x^2 + 1$ B. $3x^2 + x$ C. $2x^3 + x$ D. $2x^3 + 1$

Câu 2: $x^2\left(5x^3 - x - \frac{1}{2}\right) =$

- A. $5x^6 - x^3 - x^2$ B. $5x^5 - x^3 - \frac{1}{2}x^2$ C. $5x^5 - x^3 - \frac{1}{2}$ D. $5x^6 - x^3 - \frac{1}{2}x^2$

Câu 3: $6xy(2x^2 - 3y) =$

- A. $12x^2y + 18xy^2$ B. $12x^3y - 18xy^2$ C. $12x^3y + 18xy^2$ D. $12x^2y - 18xy^2$

Câu 4: Biểu thức rút gọn của biểu thức $5x^3 + 4x^2 - 3x(2x^2 + 7x - 1)$ là :

- A. $-x^3 + 17x^2 + 3x$ B. $-x^3 - 17x^2 + 3x$ C. $-x^3 - 17x^2 - 3x$ D. $x^3 - 17x^2 + 3x$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $5x^2 - [4x^2 - 3x(x - 2)]$ với $x = -\frac{1}{2}$ là:

- A. -3 B. 3 C. -4 D. 4

Câu 6: Biết $5(2x - 1) - 4(8 - 3x) = 84$. Giá trị của x là :

- A. 4 B. 4,5 C. 5 D. 5,5

Câu 7: Với mọi giá trị của x thì giá trị của biểu thức: $2x(3x - 1) - 6x(x + 1) + (3 + 8x)$ là:

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 1

Câu 8: Đẳng thức dưới đây là đúng hay sai?

a) $-\frac{3}{4}x(4x - 8) = -3x^2 + 6x$	b) $-\frac{1}{2}x(2x^2 + 2) = -x^3 + x$
A. Đúng B. Sai	A. Đúng B. Sai

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với mỗi ý ở cột B để được kết quả đúng.

A	B
a) $3(4x - 12) = 0$	1) $x = 4$
b) $9(4 - x) = 0$	2) $x = 5$
c) $4(5 - x) = 0$	3) $x = 3$
KQ: a) -; b) -; c) -	4) $x = 12$

Câu 10: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

a, $(x^2y - 2xy)(-3x^2y) = \dots\dots\dots$

b, $x^2(x - y) + y(x^2 + y) = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3: a) $A = -6$; b) $B = 8$; c) $C = 2013$; $D = 0$

Bài 4: a) $A = 3$; b) $B = -12$; $C = -18$; $D = -1$

Bài 5: a) $x = \frac{3}{5}$; b) $x = \frac{2}{19}$ c) $x = \frac{2}{7}$ d) $x = -2$

Bài 8: a) $A = 0$; $B = \frac{5}{16}$; $C = -12$

Bài 9: $A = 24$;

Bài 10: a) $x = \frac{1}{5}$; b) $x = \pm 2$; c) $x = 0$; $x = \pm 3$; d) vô nghiệm.

Bài 1; 2; 6; 7 học sinh tự tính.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Quy tắc: Muốn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

II. HƯỚNG DẪN MẪU

$$(A + B)(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$$

$$\begin{aligned} (2x + 5) \cdot (4x^3 - 2x + 5) &= 2x \cdot (4x^3 - 2x + 5) + 5 \cdot (4x^3 - 2x + 5) \\ &= 2x \cdot 4x^3 + 2x \cdot (-2x) + 2x \cdot 5 + 5 \cdot 4x^3 + 5 \cdot (-2x) + 5 \cdot 5 \\ &= 8x^4 - 4x^2 + 10x + 20x^3 - 10x + 25 \\ &= 8x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 25 \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau: [CB - Rèn kỹ năng nhân]

a) $(x^2 - 1)(x^2 + 2x)$

b) $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x)$

c) $(x + 3)(x^2 + 3x - 5)$

d) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

e) $(2x^3 - 3x - 1) \cdot (5x + 2)$

f) $(x^2 - 2x + 3) \cdot (x - 4)$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau: [Rèn kỹ năng nhân và cộng trừ đa thức]

a) $A = (4x - 1) \cdot (3x + 1) - 5x \cdot (x - 3) - (x - 4) \cdot (x - 3)$

b) $B = (5x - 2) \cdot (x + 1) - 3x \cdot (x^2 - x - 3) - 2x(x - 5) \cdot (x - 4)$

Bài 3: Thực hiện phép tính rồi tính giá trị biểu thức. [Rèn kỹ năng tính và thay số]

a) $A = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ với $x = 3$.

b) $B = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ với $x = 2$.

c) $C = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ với $x = 2$.

d) $D = 2x(10x^2 - 5x - 2) - 5x(4x^2 - 2x - 1)$ với $x = -5$.

Bài 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x và y : [Rèn kỹ năng tính toán]

a) $A = (5x - 2)(x + 1) - (x - 3)(5x + 1) - 17(x + 3)$

b) $B = (6x - 5)(x + 8) - (3x - 1)(2x + 3) - 9(4x - 3)$

c) $C = x(x^3 + x^2 - 3x - 2) - (x^2 - 2)(x^2 + x - 1)$

d) $D = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$

e) $E = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Bài 5: Tìm x , biết:

a) $3(1 - 4x)(x - 1) + 4(3x + 2)(x + 3) = 38$

b) $5(2x + 3)(x + 2) - 2(5x - 4)(x - 1) = 75$

c) $2x^2 + 3(x - 1)(x + 1) = 5x(x + 1)$

d) $(8 - 5x)(x + 2) + 4(x - 2)(x + 1) + 2(x - 2)(x + 2) = 0$

Bài 6: Chứng minh đẳng thức

a) $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

b) $(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx$

c) $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$

d) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5$

Bài 7: a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $A = (2 - n) \cdot (n^2 - 3n + 1) + n(n^2 + 12) + 8$ chia hết cho 5b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng: $(a - 1) \cdot (b - 1) \cdot (c - 1) = 0$.**Bài tập tương tự****Bài 8:** Thực hiện phép tính:

a) $(5x - 2y)(x^2 - xy + 1)$;

b) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$;

c) $\frac{1}{2}x^2y^2(2x + y)(2x - y)$

d) $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)(2x - 3)$

Bài 9: Thực hiện các phép tính, sau đó tính giá trị biểu thức:

a) $A = (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$

với $x = 2, y = -\frac{1}{2}$.

$$b) B = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \quad \text{với } a=3, b=-2.$$

$$c) C = (x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + y^2) + 2x^3y - 3x^2y^2 + 2xy^3 \quad \text{với } x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}.$$

Bài 10: Chứng tỏ rằng các đa thức sau không phụ thuộc vào biến:

$$A = (3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$$

$$B = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$$

$$C = 4(x - 6) - x^2(2 + 3x) + x(5x - 4) + 3x^2(x - 1)$$

$$D = x(y + z - yz) - y(z + x - zx) + z(y - x).$$

Bài 11: Tìm x

$$a) (x - 2)(x - 1) = x(2x + 1) + 2$$

$$b) (x + 2)(x + 2) - (x - 2)(x - 2) = 8x$$

$$c) (2x - 1)(x^2 - x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2$$

$$d) (x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^3 - 3x^2 + 16 = 0$$

$$e) (x + 1)(x + 2)(x + 5) - x^3 - 8x^2 = 27$$

Bài 12: Chứng minh đẳng thức

$$a) (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5 \quad b) (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$c) (x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1; \quad d) (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y) = x^4 - y^4;$$

Bài 13: Tính giá trị biểu thức :

$$a) A = x^6 - 2021x^5 + 2021x^4 - 2021x^3 + 2021x^2 - 2021x + 2021 \text{ tại } x = 2020$$

$$b) B = x^{10} + 20x^9 + 20x^8 + \dots + 20x^2 + 20x + 20 \text{ với } x = -19.$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: (2x + y)(2x - y) =
A. 4x - y B. 4x + y C. 4x^2 - y^2 D. 4x^2 + y^2

Câu 2: (xy - 1)(xy + 5) =
A. x^2y^2 + 4xy - 5 B. x^2y^2 + 4xy + 5 C. xy - 4xy - 5 D. x^2y^2 - 4xy - 5

Câu 3: (x^2 - 2x + 1)(x - 1) =
A. x^2 - 3x^2 + 3x - 1; B. x^2 + 3x^2 + 3x - 1;
C. x^3 - 3x^2 + 3x - 1; D. x^3 + 3x^2 + 3x - 1

Câu 4: (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x) = -x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5
A. Đúng B. Sai

Câu 5: (x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2
A. Đúng B. Sai

Câu 7: Chọn câu khẳng định SAI trong các khẳng định bên dưới. Với mọi x thuộc N, giá trị biểu thức A_6 = (x + 2)^2 - (x - 2)^2 luôn chia hết cho
A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 8: Rút gọn biểu thức A_5 = (x - 2)^2 - (x - 3)^2 + (x + 4)^2 thu được kết quả là
A. x^2 + 10x + 11. B. 9x^2 - 1. C. 3x^2 - 9. D. x^2 - 9.

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với mỗi ý ở cột B để được kết quả đúng?

Table with 2 columns: A and B. A contains algebraic expressions, B contains numerical results.

Câu 10: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:
a) (x^2 - 2x + 3)(1/2 x - 5) =
b) (x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2) =

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ b) $-6x^3 + 17x^2 + 5x - 6$

c) $x^3 + 6x^2 + 4x - 15$ d) $x^3 + 1$

e) $10x^4 + 4x^3 - 15x^2 - 11x - 2$ f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 12$

Bài 2: a) $A = 6x^2 + 23x - 13$ b) $B = -5x^3 + 26x^2 - 28x - 2$

Bài 3: a) $A = x^5 - 32$. Với $x = 3$ thì $A = 3^5 - 32 = 211$

b) $B = x^8 - 1$. Với $x = 2$ thì $B = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

c) $C = x^7 + 1$. Với $x = 2$ thì $C = 2^7 + 1 = 128 + 1 = 129$

d) $D = x$. Với $x = -5$ thì $D = -5$

Bài 4: a) $A = -50$; b) $B = -10$; c) $C = -2$; d) $D = 3$; e) $E = 2$

Bài 5: a) $x = \frac{17}{59}$ b) $x = 1$ c) $x = -\frac{3}{5}$ d) $x = 0$; $x = \frac{3}{2}$

Bài 6: HS tự biến đổi VT = VP.

Bài 7: Biến đổi: $A = 5n^2 + 5n + 10 : 5$ (t/c chia hết của một tổng)

$$\begin{aligned} b) &= (a-1)(bc-b-c+1) = abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1 \\ &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \\ &= abc - abc + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Bài 8: **Bài 9:** **Bài 10:**

Bài 11: a) $\begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$; b) $x \in R$; c) $x = 1$; d) $x = \frac{10}{3}$ e) $x = 1$

Bài 13: a) Với $x = 2020$ nên ta thay $2021 = x + 1$ vào biểu thức, ta có:

$$A = x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + x + 1$$

$$A = x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^3 - x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = 1$$

b) Tương tự ta cũng tính được $B = 1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Bình phương của một tổng: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- Bình phương của một hiệu: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- Hiệu hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Khai triển các hằng đẳng thức sau:

- a) $(x + 2)^2$
- b) $(x - 1)^2$
- c) $(x^2 + y^2)^2$
- d) $(x^3 + 2y^2)^2$
- e) $(x^2 - y^2)^2$
- f) $(x - y^2)^2$

Bài 2: Điền vào chỗ trống cho thích hợp

- a) $x^2 + 4x + 4 =$
- b) $x^2 - 8x + 16 =$
- c) $(x + 5)(x - 5) =$
- d) $x^2 + 2x + 1 =$
- e) $4x^2 - 9 =$
- f) $(2x + 3y)^2 + 2(2x + 3y) + 1$

Bài 3: Rút gọn biểu thức

- a) $A = (x - y)^2 + (x + y)^2$
- b) $B = (2a + b)^2 - (2a - b)^2$
- c) $C = (x + y)^2 - (x - y)^2$
- d) $D = (2x - 1)^2 - 2(2x - 3)^2 + 4$

Bài 4: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

- a) $A = (x + 3)^2 + (x - 3)(x + 3) - 2(x + 2)(x - 4)$; với $x = -\frac{1}{2}$
- b) $B = (3x + 4)^2 - (x - 4)(x + 4) - 10x$; với $x = -\frac{1}{10}$
- c) $C = (x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2)$, với $x = 1$.
- d) $D = (x - 3)(x + 3) + (x - 2)^2 - 2x(x - 4)$, với $x = -1$

Bài 5: Tìm x, biết:

- a) $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$
- b) $(2x + 3)^2 - 4(x - 1)(x + 1) = 49$
- c) $(2x + 1)(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 18$
- d) $2(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3) - (x - 4)^2 = 0$
- e) $(x - 5)^2 - x(x - 4) = 9$
- f) $(x - 5)^2 + (x - 4)(1 - x) = 0$

Bài 6: Chứng minh đẳng thức $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

Bài 7: Tìm các giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = x^2 - 2x + 5$

b) $B = x^2 - x + 1$

c) $C = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

d) $D = x^2 + 5y^2 - 2xy + 4y + 3$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = -x^2 - 4x - 2$

b) $B = -2x^2 - 3x + 5$

c) $C = (2 - x)(x + 4)$

d) $D = -8x^2 + 4xy - y^2 + 3$

Bài 9: Chứng minh rằng các giá trị của các biểu thức sau luôn dương với mọi giá trị của biến.

a) $A = 25x^2 - 20x + 7$

b) $B = 9x^2 - 6xy + 2y^2 + 1$

c) $E = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6$

d) $D = x^2 - 2x + 2$

Bài 10: Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là một số chính phương.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $x^2 - (2y)^2 =$

A. $x^2 - 2y^2$

B. $x^2 + 2y^2$

C. $(x - 2y)(x + 2y)$

D. $(x + 2y)(x + 2y)$

Câu 2: $x^2 - 1 =$

A. $(x - 1)(x + 1)$

B. $(x + 1)(x + 1)$

C. $x^2 + 2x + 1$

D. $x^2 + 2x - 1$

Câu 3: $(x - 7)^2 =$

A. $(7 - x^2)^2$

B. $x^2 - 14x + 49$

C. $x^2 - 2x + 49$

D. $x^2 - 14x + 7$

Câu 4:

$$(x + 4y)^2 = x^2 + 8xy + y^2$$

A. Đúng

B. Sai

Câu 5: $x^2 - 10xy + 25y^2 = (5 - y)^2$

A. Đúng

B. Sai

Câu 5: Tính giá trị của các biểu thức: $A = 4x^2 - 12xy + 9y^2$ tại $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}$.

- A. 4. B. $\frac{1}{4}$. C. -1. D. 1.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $A = (x-2)^2 - (x-3)^2 + (x+4)^2$ thu được kết quả là

- A. $x^2 + 10x + 11$. B. $9x^2 - 1$. C. $3x^2 - 9$. D. $x^2 - 9$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 9x^2 - 6x + 4$ đạt được khi x bằng

- A. 2. B. 3. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 8: Rút gọn biểu thức $A_8 = (x-y+z)^2 + (y-x)^2 + 2(x-y+z)(y-x)$ thu được kết quả là

- A. x^2 . B. $-x^2$. C. y^2 . D. z^2 .

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với mỗi ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
a) $x^2 + 6xy + 9y^2 =$	1) $(3x + 1)^2$
b) $(2x - 3y)(2x + 3y) =$	2) $(x + 3y)^2$
c) $9x^2 + 6x + 1 =$	3) $4x^2 - 9y^2$
	4) $(x - 9y)^2$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

Bài 2:

Bài 3: a) $A = 2x^2 + 2y^2$; b) $B = 8ab$; c) $C = 4xy$; d) $D = -4x^2 + 20x - 13$

Bài 4: a) $A = 10x + 16$; $B = 8x^2 + 14x + 32$; $C = 6x - 12$; $D = -4x + 3$

Bài 5: a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x = -4$;

d) $x = \frac{5}{12}$ e) $x = \frac{8}{3}$ f) $x = \frac{21}{5}$

Bài 6: Biến đổi VP = VT hoặc ngược lại.

Bài 7: a) $A = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$

b) $B = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

c) $C = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

d) $D = (x - y)^2 + (2y + 1)^2 + 2 \geq 2$

Bài 8: a) $A = 2 - (x + 2)^2 \leq 2$

b) $B = \frac{49}{8} - 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{49}{8}$

c) $C = 9 - (x + 1)^2$

d) $D = 3 - (2x - y)^2 - 4x^2 \leq 3$

Bài 9: a) $A = (5x - 2)^2 + 3 \geq 3 > 0$

b) $B = (3x - y)^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$

c) $E = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$

d) $D = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$

Bài 10: Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $x - 2$; $x - 1$; x ; $x + 1$ ($x \in \mathbb{N}; x \geq 2$)

Ta có: $A = (x - 2)(x - 1)x(x + 1) = (x - 2)(x + 1)x(x - 1) = (x^2 - x - 2)(x^2 - x)$

đặt $x^2 - x = t$ khi đó $A + 1 = (t - 2)t + 1 = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2$

$A + 1 = (x^2 - x - 1)^2$. Vậy $A + 1$ là một số chính phương.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

4. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Lập phương của một tổng: $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

Lập phương của một hiệu: $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Khai triển các hằng đẳng thức sau:

a) $(x + 1)^3$

b) $(2x + 3)^3$

c) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x^2 + 2)^3$

e) $(2x + 3y)^3$

f) $\left(\frac{1}{2}x + y^2\right)^3$

Bài 2: Khai triển các hằng đẳng thức sau:

a) $(x - 3)^3$

b) $(2x - 3)^3$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x^2 - 2)^3$

e) $(2x - 3y)^3$

f) $\left(\frac{1}{2}x - y^2\right)^3$

Bài 3: Rút gọn biểu thức

a) $A = (x - 1)^3 - (x + 1)^3$.

b) $B = (x + y)^3 + (x - y)^3$.

c) $C = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$.

d) $D = (x + 1)^3 + (x - 3)^3 - 2(x^2 + 15)(x - 3)$.

Bài 4: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức

a) $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

khi $x = 8$.

b) $B = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

khi $x = 101$.

c) $C = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - 12\left(y - \frac{x}{2}\right) - 8$

khi $x = 4; y = 2$.

d) $D = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$

khi $x + y = 1$.

Bài 5: Tìm x , biết:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$.

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 72 = 0$.

Bài 6: Chứng minh đẳng thức

a) Cho $a + b = 1$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + 3ab = 1$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 =$

- A. $x^3 + 1$ B. $(x - 1)^3$ C. $(x + 1)^3$ D. $(x^3 + 1)^3$

Câu 2: $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 =$

- A. $(2x^3 + y)^3$ B. $(2x + y^3)^3$ C. $(2x + y)^3$ D. $(2x - y)^3$

Câu 3: $x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} =$

- A. $x^3 - \frac{1}{3}$ B. $\left(x - \frac{1}{3}\right)^3$ C. $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$ D. $x - \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Câu 4: Để biểu thức $x^3 + 6x^2 + 12x + m$ là lập phương của một tổng thì giá trị của m là:

- A. 8 B. 4 C. 6 D. 16

Câu 5 :

$x^2 - 2x + 9 = (x - 3)^2$ A. Đúng B. Sai	$\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$ A. Đúng B. Sai
---	---

Câu 6 : Tính giá trị của các biểu thức $A = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ tại $x = \frac{1}{2}; y = 1$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{27}{8}$. C. $-\frac{3}{4}$. D. 0

Câu 7 : Rút gọn biểu thức $B = (x + 2)^3 - (x - 2)^3 - 12x^2$ ta thu được kết quả là

- A. 16. B. $2x^3 + 24x$ C. $x^3 + 24x^2 + 16$ D. 0

Câu 8: Ghép mỗi ý ở cột A với mỗi ý ở cột B để được kết quả đúng?

A	B
a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 =$	1) $(x + 1)^3$

b) $x^2 + 8x + 16 =$	2) $(x - 1)^3$
c) $3x^2 + 3x + 1 + x^3 =$	3) $(x + 4)^2$
	4) $(x - 1)^2$

Câu 9: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

a, $8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3 = \dots\dots\dots$
 b, $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

Bài 2:

Bài 3: a) $A = (x - 1)^3 - (x + 1)^3 = -6x^2 - 2.$

b) $B = (x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2.$

c) $C = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2 = x^3 - y^3$

d) $D = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 2x^3 + 6x^2 - 30x + 90 = 64.$

Bài 4: a) $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3.$ Khi $x = 8$ thì $A = 10^3 = 1000.$

b) $B = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$ Khi $x = 101$ thì $B = 100^3 = 1.000.000.$

c) $C = \left(\frac{x}{2} - y\right)^3 - 6\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - 12\left(y - \frac{x}{2}\right) - 8 = \left(\frac{x}{2} - y - 2\right)^3$ Khi $x = 4; y = 2$ thì $C = -8$.

d) $D = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)(x + y)$
 $\Rightarrow D = 2x^3 + 2y^3 - 3x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3y^3 \Rightarrow D = -x^3 - y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = -(x + y)^3 = -1$.

Bài 5: a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -1 \Leftrightarrow x+1 = -1 \Leftrightarrow x = -2$.

b) $x^3 - 12x^2 + 48x - 72 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^3 = 8 \Leftrightarrow x-4 = 2 \Leftrightarrow x = 6$.

Bài 6: a) Ta có $a + b = 1 \Rightarrow (a + b)^3 = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab = 1$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Tổng hai lập phương: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

Hiệu hai lập phương: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Rút gọn biểu thức

a) $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

b) $B = (a^2b^2 - 5a)(a^4b^4 + 5a^3b^2 + 25a^2)$

c) $C = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

d) $D = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

Bài 2: Chứng tỏ biểu thức không phụ thuộc vào biến x.

a) $A = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $B = (2x + 6)(4x^2 - 12x + 36) - 8x^3 + 10$

c) $C = (x - 1)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 3x(1 - x)$

Bài 3: Tìm x, biết:

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x + 3)(x - 3) = 26$

b) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 4)(x + 4) = 21$

c) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3) = 23$

Bài 4: a) Cho $x + y = 1$ và $xy = -1$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 = 4$

b) Cho $x - y = 1$ và $xy = 6$. Chứng minh rằng: $x^3 - y^3 = 19$

Bài 5: Tính nhanh:

a) $A = \frac{2020^3 + 1}{2020^2 - 2019}$

b) $B = \frac{2020^3 - 1}{2020^2 + 2021}$

Bài tập tương tự:

Bài 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

a) $A = (x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + 2$

b) $B = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 8x(x^2 + 2) + 16x + 5$

Bài 7 Tìm x biết:

a) $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$

b) $x(x - 5)(x + 5) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = -17$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khai triển $(5x)^3 - 1$ được kết quả là

- A. $(5x - 1)(25x^2 - 5x + 1)$
- B. $(5x - 1)(25x^2 - 5x + 1)$
- C. $(5x - 1)(5x^2 + 5x + 1)$
- D. $(5x + 1)(25x^2 - 5x + 1)$

Câu 2: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) =$

- A. $x^3 - 3^3$
- B. $x - 9$
- C. $x^3 + 27$
- D. $(x + 3)^3$

Câu 3: Rút gọn biểu thức $(a + b)^2 - (a - b)^2$ được kết quả là

- A. $4ab$
- B. $-4ab$
- C. 0
- D. $2b^2$

Câu 4: Điền đơn thức vào chỗ trống $(3x + y)(\dots - 3xy + y^2) = 27x^3 + y^3$

- A. $9x$
- B. $6x^2$
- C. $9x^2$
- D. $9xy$

Câu 5: Đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$

- A. Đúng
- B. Sai

Câu 6: Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được đáp án đúng

A	B
1) $(x + y)(x - y)$	a) $x^3 + y^3$
2) $x^2 - 2xy + y^2$	b) $x^2 + 2xy + y^2$
3) $(x + y)^2$	c) $x^2 - y^2$
4) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	d) $(x - y)^2$
	e) $x^2 + y^2$

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được đẳng thức đúng

- A. $(2x)^3 + y^3 = \dots$

B. $(a - b) (\dots\dots\dots) = a^3 - b^3$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $A = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x^3 - y^3) - (x^3 + y^3) = -2y^3$

b) $B = (a^2b^2 - 5a)(a^4b^4 + 5a^3b^2 + 25d^2) = (a^2b^2)^3 - (5a)^3 = a^6b^6 - 125a^3$

c) $C = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3 = 8x^3 + 27y^3$

d) $D = (y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$

Bài 2: $A = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^3 + 1) - (x^3 - 1) = 2$

b) $B = (2x + 6)(4x^2 - 12x + 36) - 8x^3 + 10 = (2x)^3 + 6^3 - 8x^3 + 10 = 226$

c) $C = (x - 1)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 3x(1 - x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 27) - 3x + 3x^2 = 26$

Bài 3:

a) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x + 3)(x - 3) = 26 \Leftrightarrow (x^3 + 8) - x(x^2 - 9) = 26 \Rightarrow x^3 + 8 - x^3 + 9x = 26 \Leftrightarrow 9x = 18 \Leftrightarrow x = 2$

b) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 4)(x + 4) = 21 \Leftrightarrow (x^3 - 27) - x(x^2 - 16) = 21 \Leftrightarrow x^3 - 27 - x^3 + 16x = 21 \Leftrightarrow 16x = 48 \Leftrightarrow x = 3$

c) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3) = 23 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x = 23 \Leftrightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2$

Bài 4:

a) $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3 \cdot (-1) = 4$ (Đpcm)

b) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = 1 \cdot (1 + 3 \cdot 6) = 19$ (Đpcm)

Bài 5:

a) $A = \frac{2020^3 + 1}{2020^2 - 2019} = \frac{(2020 + 1) \cdot (2020^2 - 2020 + 1)}{2020^2 - 2020 + 1} = 2021$

$$b) B = \frac{2020^3 - 1}{2020^2 + 2021} = \frac{(2020 - 1) \cdot (2020^2 + 2020 + 1)}{2020^2 + 2020 + 1} = 2019$$

Bài 6: $A = (x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + 2 = x^3 - 5^3 - x^3 + 2 = -123$

b) $B = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 8x(x^2 + 2) + 16x + 5 = 8x^3 + 27 - 8x^3 - 16x + 16x + 5 = 32$

Bài 7: a) $(x - 3)^2 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - (x^3 - 27) + 9(x^2 + 2x + 1) = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15$$

$$\Leftrightarrow 45x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

b) $x(x - 5)(x + 5) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = -17 \Leftrightarrow x(x^2 - 25) - (x^3 - 8) = -17$

$$\Leftrightarrow x^3 - 25x - x^3 + 8 = -17 \Leftrightarrow -25x = -25 \Leftrightarrow x = 1$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

4) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5) $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

6) $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

7) $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Rút gọn biểu thức

a) $(3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2$

b) $9x^2 - (3x - 4)^2$

c) $(a - b^2)(a + b^2)$

d) $(a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3)$

e) $(x - y + 6)(x + y - 6)$

f) $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3)$

g) $(2y - 5)(4y^2 + 10y + 25)$

g) $(3y + 4)(9y^2 - 12y + 16)$

i) $(x - 3)^3 + (2 - x)^3$

j) $(x + y)^3 - (x - y)^3$

Bài 2: Tìm x, biết:

a) $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$

b) $4x^2 - 81 = 0$

c) $x(x - 5)(x + 5) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 3$

d) $25x^2 - 2 = 0$

e) $(x + 2)^2 = (2x - 1)^2$

f) $(x + 2)^2 - x + 4 = 0$

Bài 3: a) Cho $x - y = 7$. Tính giá trị biểu thức $A = x(x + 2) + y(y - 2) - 2xy$

$B = x^3 - 3xy(x - y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2$

b) Cho $x + 2y = 5$. Tính giá trị biểu thức sau: $C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y$

Bài 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $x^2 + x + 1$; b) $4x^2 + 4x - 5$; c) $(x - 3)(x + 5) + 4$; d) $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a) $2x - x^2 - 4$; b) $-x^2 - 4x$;

c) $-9x^2 + 24x - 18$; d) $4x - x^2 - 1$

e) $5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

$$a) (3 - xy^2)^2 - (2 + xy^2)^2 = 9 - 6xy^2 + x^2y^4 - 4 - 4xy^2 - x^2y^4 = 5 - 10xy^2$$

$$b) 9x^2 - (3x - 4)^2 = (3x - 3x + 4)(3x + 3x - 4) = 4(6x - 4) = 24x - 16$$

$$c) (a - b^2)(a + b^2) = a^2 - b^4$$

$$d) (a^2 + 2a + 3)(a^2 + 2a - 3) = (a^2 + 2a)^2 - 9 = a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 9$$

$$e) (x - y + 6)(x + y - 6) = x^2 - (y - 6)^2 = x^2 - y^2 + 12y - 36$$

$$f) (y + 2z - 3)(y - 2z - 3) = (y - 3)^2 - 4z^2 = y^2 - 6y - 4z^2 + 9$$

$$g) (2y - 5)(4y^2 + 10y + 25) = 8y^3 - 125$$

$$h) (3y + 4)(9y^2 - 12y + 16) = 27y^3 + 64$$

$$i) (x - 3)^3 + (2 - x)^3 = (x - 3 + 2 - x) \left[(x - 3)^2 - (x - 3)(2 - x) + (2 - x)^2 \right]$$

$$= -(x^2 - 6x + 9 - 2x + x^2 + 6 - 3x + 4 - 4x + x^2) = -3x^2 + 15x + 19$$

$$j) (x + y)^3 - (x - y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 = 6x^2y + 2y^3$$

Bài 2:

$$a) (x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15 \Leftrightarrow 45x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

$$b) 4x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{2}$$

$$c) x(x - 5)(x + 5) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 25x - x^3 + 8 = 3 \Leftrightarrow 25x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$d) 25x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{25} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$e) (x+2)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x-1 \\ x+2 = -2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f) (x+2)^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0 \text{ (vô lí)}$$

\Leftrightarrow phương trình vô nghiệm.

Bài 3:

$$a) A = x(x+2) + y(y-2) - 2xy = x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2xy = (x-y)^2 + 2(x-y). \quad (1)$$

Thay $x-y=7$ vào (1) ta được $A = 7^2 + 2 \cdot 7 = 63$

$$B = x^3 - 3xy(x-y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2 = (x-y)^3 - (x-y)^2 \quad (2)$$

Thay $x-y=7$ vào (2) ta được $B = 7^3 - 7^2 = 294$

$$b) C = x^2 + 4y^2 - 2x + 10 + 4xy - 4y = (x+2y)^2 - 2(x+2y) \quad (3)$$

Thay $x+2y=5$ vào (3) ta được $C = 5^2 - 2 \cdot 5 = 15$

$$\text{Bài 4: a) } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$b) 4x^2 + 4x - 5 = (2x-1)^2 - 6 \geq -6$$

$$c) (x-3)(x+5) + 4 = x^2 + 2x - 15 + 4 = (x+1)^2 - 12 \geq -12$$

$$d) x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6 = (x-2)^2 + (y-4)^2 - 14 \geq -14$$

$$\text{Bài 5: a) } 2x - x^2 - 4 = -3 - (x-1)^2 \leq -3$$

$$b) -x^2 - 4x = 4 - (x+2)^2 \leq 4$$

$$c) -9x^2 + 24x - 18 = -2 - (3x-4)^2 \leq -2$$

$$d) 4x - x^2 - 1 = 3 - (x-2)^2 \leq 3$$

$$e) 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y = 7 - (x-1)^2 - (2y+1)^2 \leq 7$$

6. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.
- Phương pháp đặt nhân tử chung là một phương pháp để phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách nhóm các hạng tử có chung nhân tử: $A.B + A.C = A(B + C)$.

Ví dụ: Để phân tích đa thức $3x^2 - 6x$ thành nhân tử ta làm như sau:

$$3x^2 - 6x = 3x.x - 3x.2 = 3x(x - 2).$$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $4x^2 - 6x$ b) $9x^4y^3 + 3x^2y^4$ c) $3(x - y) - 5x(y - x)$.
- c) $x^3 - 2x^2 + 5x$ d) $5(x + 3y) - 15x(x + 3y)$; e) $2x^2(x + 1) + 4(x + 1)$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $4(2 - x)^2 + xy - 2y$ b) $3a^2x - 3a^2y + abx - aby$
- c) $x(x - y)^3 - y(y - x)^2 - y^2(x - y)$ d) $2ax^3 + 6ax^2 + 6ax + 18a$
- e) $x^2y - xy^2 - 3x + 3y$ f) $3ax^2 + 3bx^2 + bx + 5a + 5b$

Bài 3: Tính hợp lí

- a) $75.20,9 + 5^2.20,9$ b) $86.15 + 150.1,4$
- c) $93.32 + 14.16$ d) $98,6.199 - 990.9,86$
- e) $-8.40 + 2.108 + 24$; f) $993.98 + 21.331 - 50.99,3$.

Bài 4: Tính giá trị biểu thức

- a) $A = a(b + 3) - b(3 + b)$ tại $a = 2003$ và $b = 1997$;
- b) $B = b^2 - 8b - c(8 - b)$ tại $b = 108$ và $c = -8$;
- c) $C = xy(x + y) - 2x - 2y$ tại $xy = 8$ và $x + y = 7$;
- d) $D = x^5(x + 2y) - x^3y(x + 2y) + x^2y^2(x + 2y)$ tại $x = 10$ và $y = -5$.

Bài 5: Tìm x , biết

- a) $8x(x - 2017) - 2x + 4034 = 0$; b) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} = 0$;
- c) $4 - x = 2(x - 4)^2$; d) $(x^2 + 1)(x - 2) + 2x = 4$.

Bài 6: Chứng minh

- a) $25^{n+1} - 25^n$ chia hết cho 100 với mọi số tự nhiên n .
- b) $n^2(n - 1) - 2n(n - 1)$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài tập tương tự:**Bài 7:** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $4x^2 - 6x$;

b) $x^3y - 2x^2y^2 + 5xy$;

c) $2x^2(x+1) + 4x(x+1)$;

d) $\frac{2}{5}x(y-1) - \frac{2}{5}y(1-y)$.

Bài 8: Tính hợp lý

a) $85.12,7 + 5.3.12,7$;

b) $8,4.84,5 + 840.0,155$;

c) $0,78.1300 + 50.6,5 - 39$;

d) $0,12.90 - 110.0,6 + 36 - 25.6$.

Bài 9: Tính giá trị biểu thức

a) $M = t(10 - 4t) - t^2(2t - 5) - 2t + 5$ tại $t = \frac{5}{2}$;

b) $N = x^2(y - 1) - 5x(1 - y)$ tại $x = -20$ và $y = 1001$;

c) $P = y^2(x^2 + y - 1) - mx^2 - my + m$ tại $x = 9$ và $y = -80$;

d) $Q = x(x - y)^2 - y(x - y)^2 + xy^2 - x^2y$ tại $x - y = 7$ và $xy = 9$.

Bài 10: Tìm x , biết

a) $2 - x = 2(x - 2)^3$;

b) $8x^3 - 72x = 0$;

c) $(x - 1,5)^6 + 2(1,5 - x)^2 = 0$;

d) $2x^3 + 3x^2 + 3 + 2x = 0$;

e) $x^2(x + 1) - x(x + 1) + x(x - 1) = 0$;

f) $x^3 - 4x - 14x(x - 2) = 0$.

Bài 11:a) $15^n + 15^{n+2}$ chia hết cho 113 với mọi số tự nhiên n .b) $n^4 - n^2$ chia hết cho 4 với mọi số tự nhiên n .c) $50^{n+2} - 50^{n+1}$ chia hết cho 245 với mọi số tự nhiên n .d) $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .**III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****Câu 1:** Đa thức $3x - 12x^2$ được phân tích thành (tích tối đa)

A. $3(x - 4x^2y)$

B. $3xy(1 - 4y)$

C. $3x(1 - 4xy)$

D. $xy(3 - 12y)$

Câu 2: Đa thức $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2$ phân tích thành

A. $7xy(2x - 3y + 4xy)$

B. $xy(14x - 21y + 28xy)$

C. $7x^2y(2 - 3y + 4xy)$

D. $7xy^2(2x - 3y + 4x)$

Câu 3: Đẳng thức $x(y - 1) + 3(y - 1) = -(1 - y)(x + 3)$ A. Đúng B. Sai

Câu 4: Đẳng thức : $12x^2 - 4x = 4x.(3x - 1)$ A.Đúng B. Sai

Câu 5: Biết $5x(x - 2) - (2 - x) = 0$. Giá trị của x là

- A. 2.
- B. 2 hoặc $\frac{-1}{5}$.
- C. $\frac{-1}{5}$.
- D. 2 hoặc $\frac{1}{5}$.

Câu 6: Biết $(x - 1)^2 = x - 1$. Giá trị của x là

- A. 2.
- B. -1.
- C. 1 hoặc 2.
- D. 0 hoặc 1.

Câu 7: Giá trị của biểu thức $x(2y - z) - 2y(z - 2y)$ tại $x = 2; y = \frac{1}{2}; z = -1$ là

- A. 0.
- B. -6
- C. 6
- D. $\frac{2}{3}$.

Câu 8: . Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được đáp án đúng ?

A	B
a) $2x^2 - 5xy$	1) $-3xy^2(y + 2x - 6x^2)$
b) $12xy^2 + 3xy + 6x$	2) $x(2x - 5y)$
c) $-3xy^3 - 6x^2y^2 + 18y^2x^3$	3) $3x(4y^2 + y + 2)$
	4) $3x(4y^2 - y + 2)$

Câu 9: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

$13(a - b) - 15a(b - a) = \dots\dots\dots$

Câu 10: Điền đơn thức vào chỗ trống: $12x^3y^2z^2 - 18x^2y^2z^4 = \dots\dots (2x - 3z^2)$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

Bài 2:

a) $4(2-x)^2 + xy - 2y = 4(x-2)^2 + y(x-2) = (x-2)[4(x-2) + y]$

b)

c) $x(x-y)^3 - y(y-x)^2 - y^2(x-y) = (x-y)[x(x-y)^2 - y(x-y) - y^2] = (x-y)[x(x-y)^2 - xy]$

d)

e) $x^2y - xy^2 - 3x + 3y = xy(x-y) - 3(x-y) = (x-y)(xy-3)$

Bài 3:

a) $75.20,9 + 5^2.20,9 = 20,9.(75 + 25) = 20,9.100 = 2090.$

b) $86.15 + 150.1,4 = 86.15 + 15.14 = 15.(86 + 14) = 15.100 = 1500.$

c) $93.32 + 14.16 = 93.32 + 7.32 = 32.(93 + 7) = 32.100 = 3200$

d) $98,6.199 - 990.9,86 = 98,6.199 - 99.98,6 = 98,6.(199 - 99) = 98,6.100 = 9860$

e) $-8.40 + 2.108 + 24 = -8.40 + 8.27 + 8.3 = 8.(-40 + 27 + 3) = 8.(-10) = -80$

f) $993.98 + 21.331 - 50.99,3 = 993.98 + 7.993 - 5.993 = 993.(98 + 7 - 5) = 993.100 = 99300$

Bài 4:

a) $A = a(b+3) - b(3+b) = (b+3)(a-b).$

Tại $a = 2003$ và $b = 1997$, ta có $A = (1997+3)(2003-1997) = 2000.6 = 12000.$

b) $B = b^2 - 8b - c(8-b) = b(b-8) + c(b-8) = (b-8)(b+c)$

Tại $b = 108$ và $c = -8$, ta có $B = (108-8)(108-8) = 100.100 = 10000.$

c) $C = xy(x+y) - 2x - 2y = (x+y)(xy-2)$

Tại $xy = 8$ và $x+y = 7$, ta có $C = 7.(8-2) = 7.6 = 42.$

d) $D = x^5(x+2y) - x^3y(x+2y) + x^2y^2(x+2y) = x^2(x+2y)(x^3 - xy + y^2)$

Tại $x = 10$ và $y = -5$, ta có $x+2y = 10 + 2.(-5) = 0$ suy ra $D = 0$

Bài 5:



$$a) 8x(x - 2017) - 2x + 4034 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2017)(4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2017 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$b) \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

$$c) 4 - x = 2(x - 4)^2 \Leftrightarrow (x - 4)[2(x - 4) + 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

$$d) (x^2 + 1)(x - 2) + 2x = 4 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 1 + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 3) = 0.$$

Vì $x^2 + 3 > 0$ với mọi x nên $VT = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bài 6:

$$a) 25^{n+1} - 25^n = 25^n(25 - 1) = 25^n \cdot 24 = 25^{n-1} \cdot 6 \cdot 100 : 100 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$b) n^2(n - 1) - 2n(n - 1) = n(n - 1)(n - 2).$$

Vì $(n - 2); (n - 1); n$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 6

Bài 7:

$$a) 4x^2 - 6x = 2x(2x - 3).$$

$$b) x^3y - 2x^2y^2 + 5xy = xy(x^2 - 2xy + 5).$$

$$c) 2x^2(x + 1) + 4x(x + 1) = 2x(x + 1)(x + 2).$$

$$d) \frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(1 - y) = \frac{2}{5}x(y - 1) + \frac{2}{5}y(y - 1) = \frac{2}{5}(y - 1)(x + 1).$$

Bài 8:

$$a) 85.12,7 + 5.3.12,7 = 12,7.(85 + 15) = 12,7.100 = 1270$$

$$b) 8,4.84,5 + 840.0,155 = 8,4.84,5 + 8,4.15,5 = 8,4.(84,5 + 15,5) = 8,4.100 = 840.$$

$$c) 0,78.1300 + 50.6,5 - 39 = 78.13 + 25.13 - 3.13 = 13.(78 + 25 - 3) = 13.100 = 1300.$$

$$d) 0,12.90 - 110.0,6 + 36 - 25.6 = 18.6 - 11.6 + 6.6 - 25.6 = 6.(18 - 11 + 6 - 25) = 6.(-12) = -72.$$

Bài 9:

$$a) M = t(10 - 4t) - t^2(2t - 5) - 2t + 5 = 2t(5 - 2t) + t^2(5 - 2t) + (5 - 2t) = (5 - 2t)(t + 1)^2$$

Tại $t = \frac{5}{2}$, ta có $5 - 2t = 5 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 0$. Suy ra $M = 0$.

$$b) N = x^2(y - 1) - 5x(1 - y) = x(y - 1)(x + 5)$$

Tại $x = -20$ và $y = 1001$, ta có $N = -20(1001 - 1)(-20 + 5) = 300000$.

$$c) P = y^2(x^2 + y - 1) - mx^2 - my + m = (x^2 + y - 1)(y^2 - m)$$

Tại $x = 9$ và $y = -80$, ta có $x^2 + y - 1 = 9^2 + (-80) - 1 = 0$. Suy ra $P = 0$.

$$d) Q = x(x-y)^2 - y(x-y)^2 + xy^2 - x^2y = (x-y)[x(x-y) - y(x-y) - xy] = (x-y)[(x-y)^2 - xy]$$

Tại $x - y = 7$ và $xy = 9$, ta có $Q = 7(7^2 - 9) = 280$.

Bài 10:

$$a) 2 - x = 2(x - 2)^3 \Leftrightarrow (x - 2)[2(x - 2)^2 + 1] = 0.$$

Vì $2(x - 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x nên $VT = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$b) 8x^3 - 72x = 0 \Leftrightarrow 8x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}.$$

$$c) (x - 1,5)^6 + 2(1,5 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1,5)^2 \cdot [(x - 1,5)^4 + 2] = 0.$$

Vì $(x - 1,5)^4 + 2 > 0$ với mọi x nên $VT = 0 \Leftrightarrow x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$.

$$d) 2x^3 + 3x^2 + 3 + 2x = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)(x^2 + 1) = 0$$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên $VT = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

$$e) x^2(x+1) - x(x+1) + x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$f) x^3 - 4x - 14x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x-12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 12 \end{cases}.$$

Bài 11:

$$a) 15^n + 15^{n+2} = 15^n(1 + 15^2) = 15^n \cdot 226 = 15^n \cdot 2 \cdot 113 : 113 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$b) n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n-1)(n+1) = (n-1)n \cdot n(n+1) : 4 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$c) 50^{n+2} - 50^{n+1} = 50^{n+1}(50+1) = 50^{n+1} \cdot 51 = 50^n \cdot 50 \cdot 51 = 50^n \cdot 10 \cdot 245 : 245 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$d) n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1).$$

Vì $(n-1); n; (n+1)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 6.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

7. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PP HẰNG ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Ta có thể sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ theo chiều biến đổi từ một vế là một đa thức sang vế kia là một tích của các nhân tử hoặc lũy thừa của một đơn thức đơn giản hơn

- Bình phương của một tổng: $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
- Bình phương của một hiệu: $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
- Hiệu của hai bình phương: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
- Lập phương của một tổng: $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$
- Lập phương của một hiệu: $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$
- Tổng của hai lập phương: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.
- Hiệu của hai lập phương: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $4x^2 - 12x + 9$

b) $4x^2 + 4x + 1$

c) $1 + 12x + 36x^2$

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

e) $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2$

f) $-x^2 + 10x - 25$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(3x - 1)^2 - 16$

b) $(5x - 4)^2 - 49x^2$

c) $(2x + 5)^2 - (x - 9)^2$

d) $(3x + 1)^2 - 4(x - 2)^2$

e) $9(2x + 3)^2 - 4(x + 1)^2$

f) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $8x^3 - 64$

b) $1 + 8x^6y^3$

c) $27x^3 + \frac{y^3}{8}$

d) $125x^3 + 27y^3$

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

c) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$

d) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

e) $27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $(xy+1)^2 - (x+y)^2$

b) $(x+y)^3 - (x-y)^3$

c) $3x^4y^2 + 3x^3y^2 + 3xy^2 + 3y^2$

d) $4(x^2 - y^2) - 8(x - ay) - 4(a^2 - 1)$

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^2 + 2x - 8$;

b) $x^2 + 5x + 6$;

c) $4x^2 - 12x + 8$;

d) $3x^2 + 8xy + 5y^2$.

Bài 7: Tìm x , biết

a) $(2x-5)^2 - (5+2x)^2 = 0$;

b) $27x^3 - 54x^2 + 36x = 8$.

c) $(x^3 + 8) - (x+2)(x-4) = 0$

d) $x^6 - 1 = 0$

Bài 8: Chứng minh

a) $2^9 - 1$ chia hết cho 73.

b) $5^6 - 10^4$ chia hết cho 9.

c) $(n+3)^2 - (n-1)^2$ chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên n .

d) $(n+6)^2 - (n-6)^2$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n .

Bài 9: Tính nhanh

a) $85^2 - 15^2$;

b) $93^3 + 21.93^2 + 3.49.93 + 343$;

c) $73^2 - 13^2 - 10^2 + 20.13$;

d) $\frac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83$.

Bài tương tự

Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài 10: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $-16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4$

b) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

c) $25x^4 - 10x^2y + y^2$

Bài 11: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

b) $9(x+y-1)^2 - 4(2x+3y+1)^2$

c) $-4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25$

d) $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$

Bài 12: Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $8x^3 - 64$

b) $1 + 8x^6y^3$

c) $27x^3 + \frac{y^3}{8}$

d) $125x^3 + 27y^3$

Bài 13: Tìm x biết:

a) $x^2 - 10x = -25$;

b) $4x^2 - 4x = -1$;

c) $(1-2x)^2 = (3x-2)^2$;

d) $(x-2)^3 + (5-2x)^3 = 0$.

e) $x - 3 = (3 - x)^2$;

f) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Bài 14: Chứng minh

a) $(3n - 1)^2 - 4$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

b) $100 - (7n + 3)^2$ chia hết cho 7 với mọi số tự nhiên n .

c) $(3n + 1)^2 - 25$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

d) $(4n + 1)^2 - 9$ chia hết cho 8 với mọi số tự nhiên n .

Bài 15: Tính nhanh

a) $73^2 - 27^2$;

b) $36^2 - 14^2$;

c) $63^2 - 27^2 + 72^2 - 18^2$;

d) $54^2 + 82^2 - 18^2 - 46^2$.

III. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phân tích đa thức $12x - 9 - 4x^2$ được kết quả là

A. $(2x - 3)(2x + 3)$ B. $-(2x - 3)^2$ C. $(3 - 2x)^2$ D. $-(2x + 3)^2$

Câu 2: Phân tích đa thức $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8x^3$ được kết quả là

A. $(x - y)^3$ B. $(2x - y)^3$ C. $x^3 - (2y)^3$ D. $(x - 2y)^3$

Câu 3: Phân tích thành nhân tử đa thức $(a + b)^3 - (a - b)^3$ thu được kết quả là

A. $2a(a^2 + 3b^2)$. B. $2a(3a^2 + b^2)$. C. $2b(a^2 + 3b^2)$. D. $2b(3a^2 + b^2)$.

Câu 4: $1 - 2y + y^2 = -(1 - y)^2$ A. Đúng B. Sai**Câu 5:** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (1 - x)^2$ A. Đúng B. Sai**Câu 6:** Biết $25x^2 - 1 = 0$. Giá trị của x là

A. $\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{5}$ hoặc $-\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{5}$ hoặc 0.

Câu 7: Kết quả phân tích đa thức $-8x^3 + 1$ thành nhân tử là

A. $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$. B. $(1 + 2x)(1 - 2x + 4x^2)$.

C. $(1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$. D. $(1 - 2x)(1 - 2x + 4x^2)$.

Câu 8: Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
a) $(x - y)(x + y)$	1) $-(x - 5)^2$
b) $10x - 25 - x^2$	2) $x^2 - y^2$
c) $8x^3 - \frac{1}{8}$	3) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 + x + \frac{1}{4}\right)$
	4) $(x - y)^2$

Câu 9: Điền vào chỗ trống để có đẳng thức đúng : $(x + y)^2 - 4 = \dots\dots\dots$

Câu 10: Tính nhanh : $2002^2 - 2^2 = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

a) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

b) $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

c) $1 + 12x + 36x^2 = (1 + 6x)^2$

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$

e) $\frac{x^2}{4} + 2xy + 4y^2 = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)^2$

f) $-x^2 + 10x - 25 = -(x - 5)^2$

Bài 2:

a) $(3x - 1)^2 - 16 = (3x - 1 - 4)(3x - 1 + 4) = (3x - 5)(3x + 3) = 3(3x - 5)(x + 1)$

b) $(5x - 4)^2 - 49x^2 = (5x - 4 - 7x)(5x - 4 + 7x) = (-2x - 4)(12x - 4) = -8(x + 2)(3x - 1)$

c) $(2x + 5)^2 - (x - 9)^2 = (2x + 5 - x + 9)(2x + 5 + x - 9) = (x + 14)(3x - 4)$

d) $(3x + 1)^2 - 4(x - 2)^2 = [3x + 1 - 2(x - 2)][3x + 1 + 2(x - 2)] = (x + 5)(5x - 3)$

e) $9(2x + 3)^2 - 4(x + 1)^2 = [3(2x + 3) - 2(x + 1)][3(2x + 3) + 2(x + 1)] = (4x + 7)(8x + 11)$

$$\begin{aligned} \text{f) } 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)] \\ &= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] = (a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c) \end{aligned}$$

$$\text{Bài 3: a) } x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$$

$$\text{b) } x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

$$\text{c) } 1 - 9x + 27x^2 - 27x^3 = (1 - 3x)^3$$

$$\text{d) } x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\text{e) } 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 = (3x - 2y)^3$$

$$\text{Bài 4: a) } x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$$

$$\text{b) } x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

$$\text{c) } 1 - 9x + 27x^2 - 27x^3 = (1 - 3x)^3$$

$$\text{d) } x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3$$

Bài 5:

$$\begin{aligned} \text{a) } (xy + 1)^2 - (x + y)^2 &= (xy + 1 - x - y)(xy + 1 + x + y) \\ &= [x(y - 1) - (y - 1)][x(y + 1) + (y + 1)] = (x - 1)(y - 1)(x + 1)(y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x + y)^3 - (x - y)^3 &= (x + y - x + y)[(x + y)^2 + (x + y)(x - y) + (x - y)^2] \\ &= 2y(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - y^2 + x^2 - 2xy + y^2) = 2y(3x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 3x^4y^2 + 3x^3y^2 + 3xy^2 + 3y^2 &= 3y^2(x^4 + x^3 + x + 1) = 3y^2[x^3(x + 1) + (x + 1)] = 3y^2(x + 1)(x^3 + 1) = 3y^2(x + 1)^2(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4(x^2 - y^2) - 8(x - ay) - 4(a^2 - 1) &= 4x^2 - 4y^2 - 8x + 8ay - 4a^2 + 4 \\ &= -4(y^2 + 2ay + a^2) + 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2 - 4(y + a)^2 \\ &= 4[(x - 1)^2 - (y + a)^2] = 4(x - 1 - y - a)(x - 1 + y + a) \end{aligned}$$

Bài 6:

$$\text{a) } x^2 + 2x - 8 = (x + 1)^2 - 9 = (x - 2)(x + 4).$$

$$\text{b) } x^2 + 5x + 6 = x^2 + 4x + 4 + x + 2 = (x + 2)^2 + (x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

$$c) 4x^2 - 12x + 8 = 4x^2 - 12x + 9 - 1 = (2x - 3)^2 - 1^2 = 4(x - 2)(x - 1).$$

$$d) 3x^2 + 8xy + 5y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) + 2xy + 2y^2 = 3(x + y)^2 + 2y(x + y) = (x + y)(3x + 5y).$$

$$\text{Bài 7: a) } (2x - 5)^2 - (5 + 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow -10.4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$b). 27x^3 - 54x^2 + 36x = 8 \Leftrightarrow (3x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$c) (x^3 + 8) - (x + 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 3x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - 3x + 8 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x = -2 \text{ vì } x^2 - 3x + 8 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

$$d) x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ (Vì } x^4 + x^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Bài 8: a) } 2^9 - 1 = (2^3 - 1)(2^6 + 2^3 + 1) = 7.73:73.$$

$$b) 5^6 - 10^4 = (5^3)^2 - 1^2 + 1^2 - (10^2)^2 = (5^3 - 1)(5^3 + 1) + (1 - 10^2)(1 + 10^2) = 124.126 - 99.101:9.$$

$$c) (n + 3)^2 - (n - 1)^2 = (n + 3 - n + 1)(n + 3 + n - 1) = 8.(n + 1):8.$$

$$d) (n + 6)^2 - (n - 6)^2 = (n + 6 - n + 6)(n + 6 + n - 6) = 24n:24.$$

$$\text{Bài 9: a) } 85^2 - 15^2 = (85 - 15)(85 + 15) = 7000.$$

$$b) 93^3 + 21.93^2 + 3.49.93 + 343 = (93 + 7)^3 = 100^3 = 1000000.$$

$$c) 73^2 - 13^2 - 10^2 + 20.13 = 73^2 - (13 - 10)^2 = 73^2 - 3^2 = 70.76 = 5320.$$

$$d) \frac{97^3 + 83^3}{180} - 97.83 = 97^2 - 2.97.83 + 83^2 = (97 - 83)^2 = 14^2 = 196.$$

$$\text{Bài 10: a) } -16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4 = -(4a^2b^3 + 3a^3b^2)^2$$

$$b) 25x^2 - 20xy + 4y^2 = (5x - 2y)^2$$

$$c) 25x^4 - 10x^2y + y^2 = (5x^2 - y)^2$$

Bài 11:

$$\begin{aligned} \text{a) } (4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 &= [(4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x)][(4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)] \\ &= (8x^2 - 18)(-6x - 18) = 2(4x^2 - 9)(-6)(x + 3) = -12(2x - 3)(2x + 3)(x + 3) \end{aligned}$$

$$\text{b) } 9(x + y - 1)^2 - 4(2x + 3y + 1)^2 = [3(x + y - 1) - 2(2x + 3y + 1)][3(x + y - 1) + 2(2x + 3y + 1)]$$

$$= (-x - 3y - 5)(7x + 9y - 1)$$

$$\text{c) } -4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25 = -(2x - 3y)^2 + 25 = [5 - (2x - 3y)][5 + (2x - 3y)]$$

$$= (5 - 2x + 3y)(5 + 2x - 3y)$$

$$\text{d) } x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2 = (x - y)^2 - (2m - n)^2$$

$$= [(x - y) - (2m - n)][(x - y) + (2m - n)] = (x - y - 2m + n)(x - y + 2m - n)$$

Bài 12:

$$\text{a) } 8x^3 - 64 = 8(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\text{b) } 1 + 8x^6y^3 = (1 + 2x^2y)(1 - 2x^2y + 4x^4y^2)$$

$$\text{c) } 27x^3 + \frac{y^3}{8} = \left(3x + \frac{y}{2}\right)\left(9x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{y^2}{4}\right)$$

$$\text{d) } 125x^3 + 27y^3 = (5x + 3y)(25x^2 - 15xy + 9y^2)$$

$$\text{Bài 13: a) } x^2 - 10x = -25 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\text{b) } 4x^2 - 4x = -1 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } (1 - 2x)^2 = (3x - 2)^2 \Leftrightarrow (3 - 5x)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } (x - 2)^3 + (5 - 2x)^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = (2x - 5)^3 \Leftrightarrow x - 2 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{e) } x - 3 = (3 - x)^2 \Leftrightarrow (x - 3)(4 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{f) } x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{4}.$$

$$\text{Bài 14: a) } (3n - 1)^2 - 4 = (3n - 1 - 2)(3n - 1 + 2) = 3(n - 1)(3n + 1) : 3 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$\text{b) } 100 - (7n + 3)^2 = (10 - 7n - 3)(10 + 7n + 3) = 7(1 - n)(7n + 13) : 7 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$\text{c) } (3n + 1)^2 - 25 = (3n + 1 - 5)(3n + 1 + 5) = 3(3n - 4)(n + 2) : 3 \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

$$\text{d) } (4n + 1)^2 - 9 = (4n + 1 - 3)(4n + 1 + 3) = (4n - 2)(4n + 4) = 8(2n - 1)(n + 1) : 8 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Bài 15: a) } 73^2 - 27^2 = (73 - 27)(73 + 27) = 46.100 = 4600.$$

$$\text{b) } 36^2 - 14^2 = (36 - 14)(36 + 14) = 22.50 = 11.100 = 1100.$$

$$\text{c) } 63^2 - 27^2 + 72^2 - 18^2 = (63 - 27)(36 + 27) + (72 - 18)(72 + 18) = 1800 + 5400 = 7200.$$

d) $54^2 + 82^2 - 18^2 - 46^2 = (82 - 18)(82 + 18) + (54 - 46)(54 + 46) = 7200$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

8. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PP NHÓM HẠNG TỬ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khi sử dụng phương pháp nhóm hạng tử để phân tích đa thức thành nhân tử, ta cần nhận xét đặc điểm của các hạng tử, nhóm các hạng tử một cách thích hợp nhằm làm xuất hiện dạng hằng đẳng thức hoặc xuất hiện nhân tử chung của các nhóm.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $2x^2 - 2xy - 3x + 3y$

b) $-x^2 - y^2 + 2xy + 16$

c) $y^2 - x^2 + 2yz + z^2$

d) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2$

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

b) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$

c) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

d) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

e) $x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz$

f) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Bài 3: Phân tích đa thức thành nhân tử rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = xy - 4y - 5x + 20$, với $x = 14$; $y = 5,5$

b) $B = x^2 + xy - 5x - 5y$; với $x = 5\frac{1}{5}$; $y = 4\frac{4}{5}$

c) $C = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$, với $x = 9$; $y = 10$; $z = 11$.

d) $D = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ với $x = 5,75$; $y = 4,25$

Bài 4: Tính nhanh

a) $15.64 + 25.100 + 36.15 + 60.100$;

b) $47^2 + 48^2 - 25 + 94.48$;

c) $9^3 - 9^2 \cdot (-1) - 9.11 + (-1).11$.

d) $2016.2018 - 2017^2$.

Bài 5: Tìm x biết

a) $x^2(x-5) + 5 - x = 0$;

b) $3x^4 - 9x^3 = -9x^2 + 27x$;

c) $x^2(x+8) + x^2 = -8x$;

d) $(x+3)(x^2 - 3x + 5) = x^2 + 3x$.

Bài tương tự

Bài 6: Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^2 - 3x + xy - 3y$
- b) $x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x$
- c) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$
- d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
- e) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$
- f) $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$

Bài 7: Phân tích đa thức thành nhân tử và tính giá trị biểu thức

- a) $A = 3x^2 - 2(x - y)^2 - 3y^2$ tại $x = 4$ và $y = -4$;
- b) $B = 4(x - 2)(x + 1) + (2x - 4)^2 + (x + 1)^2$ tại $x = \frac{1}{2}$;

Bài 8: Tìm x biết:

- a) $x^2(x + 5) - 9x = 45$;
- b) $9(5 - x) + x^2 - 10x = -25$.

III. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đa thức $3x^2 - 3xy - 5x + 5y$ phân tích thành nhân tử là:

- A. $(3x - 5)(x - y)$
- B. $(x + y)(3x - 5)$
- C. $(x + y)(3x + 5)$
- D. $(x - y)(3x + 5)$

Câu 2: Đa thức $5x^2 - 4x + 10xy - 8y$ phân tích thành nhân tử

- A. $(5x - 2y)(x + 4y)$
- B. $(5x + 4)(x - 2y)$
- C. $(x + 2y)(5x - 4)$
- D. $(5x - 4)(x - 2y)$

Câu 3: Đẳng thức sau: $x^2 + 4x - y^2 + 4 = (x - y + 2)(x + y + 2)$ A. Đúng B. Sai

Câu 4: Tính giá trị biểu thức $45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45$ được kết quả là

- A. 8000
- B. 10000
- C. 9000
- D. 7000

Câu 5: Điền vào chỗ trống

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2 = 3[(x^2 + xy + \dots) - \dots]$$

Câu 6: Phương trình $x(x - 7) - 2(7 - x) = 0$ có nghiệm là :

- A. $x_1 = 7, x_2 = 2$
- B. $x_1 = -7, x_2 = 2$
- C. $x_1 = 7, x_2 = -2$
- D. $x_1 = -7, x_2 = -2$

Câu 7: Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
1) $a(a - 2) + (a - 2)$	a) $(x + 1 - y)(x + y + 1)$
2) $x^2 + 2x + 1 - y^2$	b) $(x - y + 3)(x - y - 3)$
3) $2xy - x^2 - y^2 + 16$	c) $(4 - x + y)(4 + x - y)$
4) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$	d) $(a - 2)(a + 1)$
	e) $(a - 2)a$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $2x^2 - 2xy - 3x + 3y = 2x(x - y) - 3(x - y) = (x - y)(2x - 3)$

b) $-x^2 - y^2 + 2xy + 16 = 16 - (x - y)^2 = (4 - x + y)(4 + x - y)$

c) $y^2 - x^2 + 2yz + z^2 = (y + z)^2 - x^2 = (y + z - x)(y + z + x)$

d) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 12z^2 = 3[(x - y)^2 - 4z^2] = 3(x - y + 2z)(x - y - 2z)$

Bài 2:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x^4 - 1) - (2x^3 - 2x)$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 1)^2 = (x + 1)(x - 1)^3$

b) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^4(a - 1)(a + 1) + 2a^2(a + 1)$

$= a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2) = a^2(a + 1)(a^3 + a^2 - 2a^2 + 2)$

$= a^2(a + 1)[a^2(a + 1) - 2(a + 1)(a - 1)] = a^2(a + 1)^2(a^2 - 2a + 2)$

c) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 + x)$

$= (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$

d) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) + (2x^3 + 2x)$

$= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

e) $x2y + xy2 + x2z + y2z + 2xyz = (x2y + xy2) + (x2z + xyz) + (y2z + xyz)$

$= xy(x + y) + xz(x + y) + yz(x + y) = (x + y)(xy + yz + zx)$

$$f) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Bài 3:

a) $A = xy - 4y - 5x + 20$, với $x = 14$; $y = 5,5$

Ta có $A = xy - 4y - 5x + 20 = y(x - 4) - 5(x - 4) = (x - 4)(y - 5)$

Với $x = 14$; $y = 5,5$ ta có $A = (14 - 4)(5,5 - 5) = 10 \cdot 0,5 = 1$

b) $B = x^2 + xy - 5x - 5y$; với $x = 5\frac{1}{5}$; $y = 4\frac{4}{5}$

$B = x(x + y) - 5(x + y) = (x + y)(x - 5)$ Với $x = 5\frac{1}{5}$; $y = 4\frac{4}{5}$ ta có:

$$B = \left(5\frac{1}{5} + 4\frac{4}{5}\right)\left(5\frac{1}{5} - 5\right) = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

c) $C = xyz - (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$, với $x = 9$; $y = 10$; $z = 11$.

Ta có: $C = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1$

$$= (xyz - xy) - (yz - y) - (zx - x) + (z - 1)$$

$$= xy(z - 1) - y(z - 1) - x(z - 1) + (z - 1)$$

$$= (z - 1)(xy - y - x + 1)$$

Với $x = 9$; $y = 10$; $z = 11$, ta có:

$$C = (11 - 1)(9 \cdot 10 - 10 - 9 + 1) = 10 \cdot 72 = 720$$

d) $D = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ với $x = 5,75$; $y = 4,25$

Ta có: $D = (x^3 + y^3) - xy(x + y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy)$

$$= (x + y)[(x(x - y) - y(x - y))] = (x + y)(x - y)^2$$
 Với $x = 5,75$; $y = 4,25$, ta có :

$$D = (5,75 + 4,25)(5,75 - 4,25)^2 = 10 \cdot 1,5^2 = 10 \cdot 2,25 = 22,5$$

Bài 4: $15 \cdot 64 + 25 \cdot 100 + 36 \cdot 15 + 60 \cdot 100 = (15 \cdot 64 + 36 \cdot 15) + (25 \cdot 100 + 60 \cdot 100)$

$$= 100 \cdot (15 + 85) = 10000.$$

$$b) 47^2 + 48^2 - 25 + 94.48 = (47^2 + 2.47.48 + 48^2) - 5^2 = (47 + 48)^2 - 5^2 = 9000.$$

$$c) 9^3 - 9^2 \cdot (-1) - 9.11 + (-1).11 = (9^3 + 9^2) - (9.11 + 1.11) = 9^2(9 + 1) - 11(9 + 1) = 700.$$

$$d) 2016.2018 - 2017^2 = (2017 - 1)(2017 + 1) - 2017^2 = 1$$

Bài 5:

$$a) x^2(x - 5) + 5 - x = 0 = (x - 5)(x - 1)(x + 1). \Rightarrow x = 5 \text{ hoặc } x = \pm 1.$$

$$b) (3x^4 - 9x^3) + (9x^2 - 27x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x - 3) + 9x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 3)(x^2 + 3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 3.$$

$$c) x^2(x + 8) + x^2 = -8x \Leftrightarrow x(x + 1)(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = -8, x = -1 \text{ hoặc } x = 0.$$

$$d) (x + 3)(x^2 - 3x + 5) = x^2 + 3x \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3. \text{ do } x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$$

Bài 6:

$$a) x^2 - 3x + xy - 3y = (x^2 - 3x) + (xy - 3y) = x(x - 3) + y(x - 3) = (x - 3)(x + y)$$

$$b) x^4 - 9x^3 + x^2 - 9x = (x^4 - 9x^3) + (x^2 - 9x) = x^3(x - 9) + x(x - 9) = x(x - 9)(x^2 + 1)$$

$$c) x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = (x^3 - 9x) - (4x^2 - 36) = x(x^2 - 9) - 4(x^2 - 9) = (x - 4)(x - 3)(x + 3)$$

$$d) x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^3 + 1) + (2x^2 + 2x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 2)$$

$$e) x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = (x^4 - 4) + (2x^3 - 4x) = (x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x(x^2 - 2)$$

$$= (x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2)$$

$$f) x^3 - 4x^2 + 12x - 27 = (x^3 - 27) - (4x^2 - 12x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 4x(x - 3)$$

$$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 4x) = (x - 3)(x^2 - x + 9)$$

Bài 7:

a) $A = (x - y)(x + 5y)$. Thay $x = 4$ và $y = -4$ vào A tìm được $A = -128$.

b) Tìm được $B = 9(x - 1)^2$. Thay $x = -\frac{1}{2}$ vào B tìm được $B = \frac{81}{4}$.

Bài 8: a) $x = -5; x = 3; x = -3$. b) $x = 5; x = 14$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nhiều khi phải phối hợp nhiều phương pháp để phân tích đa thức thành nhân tử. Thông thường, ta xem xét đến phương pháp nhân tử chung trước tiên, tiếp đó ta xét xem có thể sử dụng được các hằng đẳng thức đã học hay không? Có thể nhóm hoặc tách hạng tử, thêm và bớt cùng một hạng tử hay không?

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- | | | |
|--------------------|---------------------|--------------------|
| a) $x^2 - 5x + 6$ | b) $3x^2 + 9x - 30$ | c) $x^2 - 3x + 2$ |
| d) $x^2 - 9x + 18$ | e) $x^2 - 6x + 8$ | f) $x^2 - 5x - 14$ |
| g) $x^2 + 6x + 5$ | h) $x^2 - 7x + 12$ | i) $x^2 - 7x + 10$ |

Bài 2: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- | | | |
|----------------------|----------------------|---------------------|
| a) $3x^2 - 5x - 2$ | b) $2x^2 + x - 6$ | c) $7x^2 + 50x + 7$ |
| d) $12x^2 + 7x - 12$ | e) $15x^2 + 7x - 2$ | f) $a^2 - 5a - 14$ |
| g) $2m^2 + 10m + 8$ | h) $4p^2 - 36p + 56$ | i) $2x^2 + 5x + 2$ |

Bài 3: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- | | | |
|--------------------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $x^2 + 4xy - 21y^2$ | b) $5x^2 + 6xy + y^2$ | c) $x^2 + 2xy - 15y^2$ |
| d) $(x - y)^2 + 4(x - y) - 12$ | e) $x^2 - 7xy + 10y^2$ | f) $x^2yz + 5xyz - 14yz$ |

Bài 4: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (tách một hạng tử thành nhiều hạng tử)

- | | | |
|---------------------|--------------------|-----------------------|
| a) $a^4 + a^2 + 1$ | b) $a^4 + a^2 - 2$ | c) $x^4 + 4x^2 - 5$ |
| d) $x^3 - 19x - 30$ | e) $x^3 - 7x - 6$ | f) $x^3 - 5x^2 - 14x$ |

Bài 5: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (thêm bớt cùng một hạng tử)

- | | | |
|----------------------|-------------------|--------------------|
| a) $x^4 + 4$ | b) $x^4 + 64$ | c) $x^8 + x^7 + 1$ |
| d) $x^8 + x^4 + 1$ | e) $x^5 + x + 1$ | f) $x^3 + x^2 + 4$ |
| g) $x^4 + 2x^2 - 24$ | h) $x^3 - 2x - 4$ | i) $a^4 + 4b^4$ |

Bài 6: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

a) $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$

b) $(x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$

c) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12$

d) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

e) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

f) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

Bài 7: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: (đặt biến phụ)

a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$

b) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

c) $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$

d) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

Bài 8: Tìm x biết:

a) $x^2 - 10x + 16 = 0$

b) $x^2 - 11x - 26 = 0$

c) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

Bài 9: Tìm x biết:

a) $(x-2)(x-3) + (x-2) - 1 = 0$

b) $(x+2)^2 - 2x(2x+3) = (x+1)^2$

c) $6x^3 + x^2 = 2x$

d) $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$

Bài 10: Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$ chia hết cho 24.

Bài 11: Tính $(a-b)^{2017}$ biết $a+b=9, ab=20, a < b$.

III. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phân tích đa thức: $mn^3 - 1 + m - n^3$ thành nhân tử, ta được:

A. $n(n^2 + 1)(m - 1)$

B. $n^2(n + 1)(m - 1)$

C. $(m + 1)(n^2 + 1)$

D. $(n^3 + 1)(m - 1)$

Câu 2: Phân tích đa thức: $4xy - 4xz - y + z$ thành nhân tử, ta được:

A. $(4x + 1)(y - z)$

B. $(y - z)(4x - 1)$

C. $(y + z)(4x - 1)$

D. $(x + y + z)(4x + 1)$

Câu 3: Phân tích đa thức: $x^3 - 2x^2 + x$ thành nhân tử, ta được:

A. $x(x-1)^2$

B. $x^2(x-1)$

C. $x(x^2-1)$

D. $x(x+1)^2$

Câu 4: Phân tích thành nhân tử:

$$m^2 - 13m + 36 = m^2 - 4m - 9m + 36 = m(m - 4) - 9(m - 4) = (m - 4)(m - 9)$$

A. Đúng

B. Sai.

Câu 5: Phân tích thành nhân tử:

$$x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - 2)(x + 2). \quad \text{A. Đúng} \quad \text{B. Sai.}$$

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để có kết quả đúng.

A	B
a) $25x - x^3$	1) $(x + 5)(1 - x)$
b) $5 - 4x - x^3$	2) $x(x + 5)^2$
c) $10x^2 + x^3 + 25x$	3) $x(x + 5)(x - 5)$
	4) $x(x + 5)(x - 5) \times (x + 5)(5 - x)$

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

$$8x^2 + 19x - 3 = 8x^2 + 12x - \dots - 3$$

$$= 4x(2x + \dots) - 1(\dots + 3)$$

$$= (4x - 1)(\dots + \dots)$$

b) $x^3 + x^2y - xyz - x^2z = (x^3 + x^2y) - (xyz + x^2z)$

$$= x^2(\dots + \dots) - \dots(y + x) = (\dots - \dots)(\dots + \dots)$$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

a) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x-2) - 3(x-2) = (x-2)(x-3)$

b) $3x^2 + 9x - 30 = 3x^2 + 15x - 6x - 30 = 3x(x+5) - 6(x+5) = 3(x+5)(x-2)$

c) $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$

d) $x^2 - 9x + 18 = x^2 - 3x - 6x + 18 = x(x-3) - 6(x-3) = (x-3)(x-6)$

e) $x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = x(x-2) - 4(x-2) = (x-2)(x-4)$

f) $x^2 - 5x - 14 = x^2 + 2x - 7x - 14 = x(x+2) - 7(x+2) = (x+2)(x-7)$

g) $x^2 + 6x + 5 = x^2 + x + 5x + 5 = x(x+1) + 5(x+1) = (x+1)(x+5)$

h) $x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x-4)$

i) $x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x-2) - 5(x-2) = (x-2)(x-5)$

Bài 2:

a. $3x^2 - 5x - 2 = 3x^2 + x - 6x - 2 = x(3x+1) - 2(3x+1) = (3x+1)(x-2)$

b. $2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x+2) - 3(x+2) = (x+2)(2x-3)$

c. $7x^2 + 50x + 7 = 7x^2 + 49x + x + 7 = 7x(x+7) + (x+7) = (x+7)(7x+1)$

d. $12x^2 + 7x - 12 = 12x^2 + 16x - 9x - 12 = 4x(3x+4) - 3(3x+4) = (3x+4)(4x-3)$

e. $15x^2 + 7x - 2 = 15x^2 + 10x - 3x - 2 = 5x(3x+2) - (3x+2) = (3x+2)(5x-1)$

f. $a^2 - 5a - 14 = a^2 - 7a + 2a - 14 = a(a-7) + 2(a-7) = (a-7)(a+2)$

g. $2m^2 + 10m + 8 = 2(m^2 + m + 4m + 4) = 2[m(m+1) + 4(m+1)] = 2(m+1)(m+4)$

h. $4p^2 - 36p + 56 = 4(p^2 - 9p + 14) = 4(p^2 - 7p - 2p + 14) = 4(p-7)(p-2)$

i. $2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + x + 2 = (x+2)(2x+1)$

Bài 3:

a) $x^2 + 4xy - 21y^2 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 25y^2 = (x-2y)^2 - (5y)^2$

$$= (x-2y-5y)(x-2y+5y) = (x-7y)(x+3y)$$

b) $5x^2 + 6xy + y^2 = 5x^2 + 5xy + xy + y^2 = 5x(x+y) + y(x+y) = (x+y)(5x+y)$

$$c) x^2 + 2xy - 15y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 16y^2 = (x + y)^2 - 16y^2 = (x - 3y)(x + 5y)$$

$$d) (x - y)^2 + 4(x - y) - 12 = (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 - 16 = (x - y + 2)^2 - 16 \\ = (x - y + 2 - 4)(x - y + 2 + 4) = (x - y - 2)(x - y + 6)$$

$$e) x^2 - 7xy + 10y^2 = x^2 - 5xy - 2xy + 10y^2 = x(x - 5y) - y(x - 5y) = (x - 5y)(x - y)$$

$$f) x^2yz + 5xyz - 14yz = yz(x^2 + 5x - 14) = yz(x^2 + 7x - 2x - 14) = yz(x + 7)(x - 2)$$

Bài 4:

$$a) a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$$

$$b) a^4 + a^2 - 2 = a^4 - 1 + a^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 2) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 2)$$

$$c) x^4 + 4x^2 - 5 = x^4 - x^2 + 5x^2 - 5 = (x^2 - 1)(x^2 + 5) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 5)$$

$$d) x^3 - 19x - 30 = x^3 + 8 - 19x - 38 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 19(x + 2) \\ = (x + 2)(x^2 - 2x - 15) = (x + 2)(x^2 - 2x + 1 - 16) = (x + 2)(x - 5)(x + 3)$$

$$e) x^3 - 7x - 6 = x^3 + 1 - 7x - 7 = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 7(x + 1) \\ = (x + 1)(x^2 - x - 6) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$$

$$f) x^3 - 5x^2 - 14x = x(x^2 - 5x - 14) = x(x^2 - 7x + 2x - 14) = x(x - 7)(x + 2)$$

Bài 5:

$$a) x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$b) x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)$$

$$c) x^8 + x^7 + 1 = x^8 - x^2 + x^7 - x + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^6 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

$$d) x^8 + x^4 + 1 = x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) \\ = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$e) x^5 + x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1$$

$$= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

$$f) x^3 + x^2 + 4 = x^3 + 8 + x^2 - 4 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + (x + 2)(x - 2) = (x + 2)(x^2 - x + 6)$$

$$g) x^4 + 2x^2 - 24 = x^4 + 6x^2 - 4x^2 - 24 = x^2(x^2 + 6) - 4(x^2 + 6) = (x^2 + 6)(x - 2)(x + 2)$$

$$h) x^3 - 2x - 4 = x^3 - 8 - 2x + 4 = (x - 2)(x^2 + x + 4) - 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$i) a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

Bài 6:

$$a) (x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$$

Đặt $x^2 + x = t$ khi đó đa thức đã cho trở thành $t^2 - 14t + 24 = t^2 - 12t - 2t + 24 = (t - 6)(t - 2)$

Thay $x^2 + x = t$ ta được

$$(x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2) = (x^2 + 3x - 2x - 6)(x^2 - 1 + x - 1) = (x + 3)(x - 2)(x - 1)(x + 2)$$

$$b) (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12 = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$$

Đặt $x^2 + x = t$ khi đó đa thức đã cho trở thành $t^2 + 4t - 12 = t^2 + 6t - 2t - 12 = (t + 6)(t - 2)$

Thay $x^2 + x = t$ ta được

$$(x^2 + x + 6)(x^2 + x - 2) = (x^2 + x + 6)(x^2 - 1 + x - 1) = (x^2 + x + 6)(x - 1)(x + 2)$$

$$c) x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x^2 + 4x - 12 = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$$

$$= (x^2 + x + 6)(x - 1)(x + 2)$$

(Khi đó bài toán trở về bài phần b)

$$d) (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$$

Đặt $x^2 + 5x + 5 = t$ khi đó đa thức đã cho trở thành $(t - 1)(t + 1) + 1 = t^2 - 1 + 1 = t^2 = (x^2 + 5x + 5)^2$

$$e) (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 = (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$

Đặt $x^2+8x+11=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (t-4)(t+4)+15 &= t^2-16+15 = t^2-1 = (t-1)(t+1) \\ &= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) = (x^2+8x+12)(x+2)(x+6) \end{aligned}$$

$$f) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24 = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-12$$

Đặt $x^2+5x+5=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$(t-1)(t+1)-24 = t^2-25 = (t-5)(t+5) = (x^2+5x)(x^2+5x+10) = x(x+5)(x^2+5x+10)$$

Bài 7: a) Đặt $x^2+4x+8=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2 &= t^2+3xt+2x^2 = (2x+t)(x+t) \\ &= (2x+x^2+4x+8)(x+x^2+4x+8) = (x^2+6x+8)(x^2+5x+8) = (x+2)(x+4)(x^2+5x+8) \end{aligned}$$

b) Đặt $x^2+x+1=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành $t(t+1)-12 = t^2+t-12 = (t+4)(t-3)$

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12 = (x^2+x+5)(x^2+x-2) = (x^2+x+5)(x-1)(x+2)$$

$$c) (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$

Đặt $x^2+8x+11=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (t-4)(t+4)+15 &= t^2-16+15 = t^2-1 = (t-1)(t+1) \\ &= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) = (x^2+8x+12)(x+2)(x+6) \end{aligned}$$

$$d) (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24 = (x^2+7x+10)(x^2+7x+12)-24$$

Đặt $x^2+7x+11=t$ khi đó đa thức đã cho trở thành

$$(t-1)(t+1)-24 = t^2-25 = (t-5)(t+5) = (x^2+7x+6)(x^2+7x+16) = (x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$$

Bài 8:

$$a) x^2-10x+16=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+25-9=0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 - 3^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5 - 3)(x - 5 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 8 = 0 \text{ hoặc } x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = 2$$

b) $x^2 - 11x - 26 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 13x - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2) - 13(x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 13) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ hoặc } x - 13 = 0$$

$$x = -2 \text{ hoặc } x = 13$$

c) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - 1) + 4(2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ hoặc } x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -4$$

Bài 9:

a) $(x - 2)(x - 3) + (x - 2) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3 + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 2) = 1 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \text{ hoặc } x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 1$$

b) $(x + 2)^2 - 2x(2x + 3) = (x + 1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 6x = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 - 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1 - 2)(2x + 1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ hoặc } 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} ; \text{ hoặc } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{c) } 6x^3 + x^2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(6x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(6x^2 + 4x - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x[2x(3x + 2) - (3x + 2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x + 2)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } 3x + 2 = 0 \text{ hoặc } 2x - 1 = 0$$

$$x = 0; x = -\frac{2}{3}; x = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$$

Nhân hai vế với 2:

$$2x^8 - 2x^5 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$(x^8 - 2x^5 + x^2) + (x^2 - 2x + 1) + (x^8 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^4 - x)^2 + (x - 1)^2 + x^8 + 1 = 0 .$$

Vế trái lớn hơn 0, vế phải bằng 0. Vậy phương trình vô nghiệm.

$$\text{Bài 10: } \text{Gợi ý: } A = (n - 2)(n^3 - n) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)$$

A là tích của 4 số tự nguyên liên tiếp nên A chia hết cho 2, cho 3 và cho 4. Vì $(2, 3) = 1$ nên

A chia hết cho 6. Suy ra A chia hết cho $4 \cdot 6 = 24$

$$\text{Bài 11: } \text{Gợi ý: } 81 = (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab \Rightarrow (a - b)^2 = 1 \Rightarrow a - b = -1 \Rightarrow A = -1$$

$$(a = 4; b = 5 \text{ suy ra } (a - b)^{2017} = -1.)$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ [NÂNG CAO]

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a)$

b) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

c) $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

Bài 2:

a) $x^2 + 7x + 12$

b) $3x^2 - 8x + 5$

c) $x^4 + 5x^2 - 6$

d) $x^4 - 34x^2 + 225$

e) $x^2 - 5xy + 6y^2$

f) $4x^2 - 17xy + 13y^2$

Bài 3:

a) $4x^4 + 81$

b) $x^4 + 1$

c) $64x^4 + y^4$

d) $x^2 + x = 6$

Bài 4:

a) $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

b) $x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$

Bài 5:

a) $x^5 + x + 1$

b) $x^8 + x^4 + 1$

Bài 6:

a) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35$

b) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$

c) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$

d) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$

e) $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) \\
 &= ab(a-b) + bc[b-a+a-c] + ac(c-a) \\
 &= ab(a-b) - bc(a-b) + bc(a-c) - ac(a-c) \\
 &= (a-b)(ab-bc) + (a-c)(bc-ac) \\
 &= b(a-b)(a-c) - (a-c)(a-b) \\
 &= (a-b)(a-c)(b-c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } & a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\
 &= a(b^2 - c^2) + b[c^2 - b^2 + b^2 - a^2] + c(a^2 - b^2) \\
 &= a(b^2 - c^2) - b(b^2 - c^2) - b(a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2) \\
 &= (b^2 - c^2)(a-b) - (a^2 - b^2)(b-c) \\
 &= (b-c)(b+c)(a-b) - (a-b)(a+b)(b-c) \\
 &= (a-b)(b-c)(b+c-a-b) \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) \\
 &= a(b^3 - c^3) + b[c^3 - b^3 + b^3 - a^3] + c(a^3 - b^3) \\
 &= a(b^3 - c^3) - b(b^3 - c^3) - b(a^3 - b^3) + c(a^3 - b^3) \\
 &= (b^3 - c^3)(a-b) - (a^3 - b^3)(b-c) \\
 &= (b-c)(b^2 + bc + c^2)(a-b) - (a-b)(a^2 + ab + b^2)(b-c) \\
 &= (a-b)(b-c)(b^2 + bc + c^2 - a^2 - ab - b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a-b)(b-c)(bc+c^2-a^2-ab) \\
&= (a-b)(b-c)[(bc-ab)+(c^2-a^2)] \\
&= (a-b)(b-c)[b(c-a)+(c-a)(c+a)] \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(b+c+a)
\end{aligned}$$

Bài 2:

$$\text{a) } x^2 + 7x + 12 = x^2 + 4x + 3x + 12 = x(x+4) + 3(x+4) = (x+4)(x+3)$$

$$\text{b) } 3x^2 - 8x + 5 = 3x^2 - 3x - 5x + 5 = 3x(x-1) - 5(x-1) = (x-1)(3x-1)$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } x^4 + 5x^2 - 6 &= x^4 - x^2 + 6x^2 - 6 = x^2(x^2 - 1) + 6(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 6) \\
&= (x-1)(x+1)(x^2 + 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } x^4 - 34x^2 + 225 &= x^4 - 2 \cdot 17x^2 + 289 - 64 = (x^2 - 17)^2 - 64 \\
&= (x^2 - 17 + 8)(x^2 - 17 - 8) = (x^2 - 9)(x^2 - 25) = (x-3)(x+3)(x-5)(x+5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } x^2 - 5xy + 6y^2 &= x^2 - 2xy - 3xy + 6y^2 = x(x-2y) - 3y(x-2y) \\
&= (x-2y)(x-3y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{f) } 4x^2 - 17xy + 13y^2 &= 4x^2 - 4xy - 13xy + 13y^2 = 4x(x-y) - 13y(x-y) \\
&= (x-y)(4x-13y)
\end{aligned}$$

$$\text{Bài 3: a) } 4x^4 + 81 = (\sqrt{2x} + 3)(2\sqrt{2x}^3 - 6x^2 + 9\sqrt{2x} - 27)$$

$$\text{b) } x^4 + 1 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$\text{c) } 64x^4 + y^4 = (2\sqrt{2x} + y)(16\sqrt{2x}^3 - 8x^2y + 2\sqrt{2x}y^2 - y^3)$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } x^5 + x^4 + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1 \\
&= x^3(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) = (x^3 - x + 1)(x^2 + x + 1)
\end{aligned}$$

Bài 4:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 &= x^5 - 2x^4 + x^4 - 2x^3 + x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2 \\ &= x^4(x - 2) + x^3(x - 2) + x^2(x - 2) + x(x - 2) + (x - 2) \\ &= (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1 &= (x^9 - x^7) - (x^6 - x^4) - (x^5 - x^3) + (x^2 - 1) \\ &= x^7(x^2 - 1) - x^4(x^2 - 1) - x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^7 - x^4 - x^3 + 1) = (x^2 - 1)[(x^7 - x^3) - (x^4 - 1)] \\ &= (x^2 - 1)(x^4 - 1)(x^3 - 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)^3(x + 1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Bài 5:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^5 + x + 1 &= x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x + 1 \\ &= (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + x^4 - x^2 + x^2 - x + x + 1 \\ &= (x^8 - x^2) + (x^4 - x) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x^6 - 1) + x(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= x^2(x^3 - 1)(x^3 + 1) + x(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1) + x(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1) \\
&= (x^2+x+1)\left[x^2(x-1)(x^3+1) + x(x-1) + 1\right] \\
&= (x^2+x+1)\left[(x^3-x^2)(x^3+1) + x^2 - x + 1\right] \\
&= (x^2+x+1)(x^6+x^3-x^5-x^2+x^2-x+1) \\
&= (x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x+1) \\
&= (x^2+x+1)\left[(x^6-x^5+x^4) - (x^4-x^3+x^2) + (x^2-x+1)\right] \\
&= (x^2+x+1)\left[x^4(x^2-x+1) - x^2(x^2-x+1) + (x^2-x+1)\right] \\
&= (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)
\end{aligned}$$

Nhận xét: Phương pháp trên có thể sử dụng đối với các đa thức có dạng:

$$x^5 + x^4 + 1; \quad x^8 + x^4 + 1; \quad x^{10} + x^8 + 1; \dots \text{ là những đa thức có dạng } x^m + x^n + 1$$

trong đó $m = 3k + 1; n = 3h + 2$.

Khi tìm cách giảm dần số mũ của lũy thừa ta cần chú ý đến các biểu thức dạng

$$x^6 - 1; \quad x^3 - 1 \text{ là những biểu thức chia hết cho } (x^2 + x + 1)$$

- Tuy nhiên, tùy theo đặc điểm của mỗi bài ta có thể có những cách giải khác gọn hơn, chẳng hạn đối với bài 5b:

$$\begin{aligned}
x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 \\
&= (x^4 + 1 + x^2)(x^4 + 1 - x^2) \\
&= \left[(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2\right](x^4 - x^2 + 1) \\
&= \left[(x^2 + 1)^2 - x^2\right](x^4 - x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1 - x)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)
\end{aligned}$$

Bài 6:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y - 35 &= (x - 2y)^2 - 2(x - 2y) - 35 \\ &= (x - 2y)^2 + 5(x - 2y) - 7(x - 2y) - 35 = (x - 2y)(x - 2y + 5) - 7(x - 2y + 5) \\ &= (x - 2y - 7)(x - 2y + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 &= (x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1) - 12 \\ &= (x^2 + x + 1) + 4(x^2 + x + 1) - 3(x^2 + x + 1) - 12 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 5) - 3(x^2 + x + 5) = (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 16 \\ &= (x^2 + 10x + 16)^2 + 8(x^2 + 10x + 16) + 16 \\ &= (x^2 + 10x + 16)^2 + 4(x^2 + 10x + 16) + 4(x^2 + 10x + 16) + 16 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 20) + 4(x^2 + 10x + 20) = (x^2 + 10x + 20)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 20) - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 10)^2 + 10(x^2 + 7x + 10) - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 10)^2 - 2(x^2 + 7x + 10) + 12(x^2 + 7x + 10) - 24 \\ &= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 8) + 12(x^2 + 7x + 8) \\ &= (x^2 + 7x + 8)(x^2 + 7x + 22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128 &= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 24) + 128 \\ &= (x^2 + 10x)^2 + 24(x^2 + 10x) + 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 10x)^2 + 8(x^2 + 10x) + 16(x^2 + 10x) + 128 \\ &= (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 8) + 16(x^2 + 10x + 8) \\ &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16) \\ &= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 2x + 8x + 16) = (x^2 + 10x + 8)[x(x + 2) + 8(x + 2)] \\ &= (x^2 + 10x + 8)(x + 2)(x + 8) \end{aligned}$$

Nguồn: Sư tâm

10. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đơn thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi biến của B đều là biến của A với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong A

Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B
- Chia lũy thừa của từng biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả vừa tìm được với nhau

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Làm phép tính chia:

$$\text{a) } (-18)^4 : 9^4; \quad \text{b) } \left(\frac{6}{5}\right)^2 : \left(\frac{7}{5}\right)^2. \quad \text{c) } \left(\frac{-1}{4}\right)^4 : \left(\frac{1}{4}\right)^3. \quad \text{d) } \left(\frac{1}{9}\right)^3 : \left(\frac{-1}{3}\right)^4.$$

Bài 2: Làm phép tính chia:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^5 : x^3. & \text{b) } 18x^7 : 6x^4. \\ \text{c) } 8x^6y^7z^2 : 4x^4y^7. & \text{d) } 65x^9y^5 : (-13x^4y^4). \\ \text{e) } \frac{27}{15}x^3yz^5 : \frac{9}{5}xz^2. & \text{f) } (5-x)^5 : (x-5)^4. \end{array}$$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = 15x^5y^3 : 10xy^2 \text{ tại } x = -3 \text{ và } y = \frac{2}{3}; & \\ \text{b) } B = -(x^3y^5z^2) : (-x^2y^3z)^3 \text{ tại } x = 1, y = -1 \text{ và } z = 100. & \\ \text{a) } C = \frac{3}{4}(x-2)^3 : -\frac{1}{2}(2-x) \text{ tại } x = 3; & \\ \text{b) } D = (x-y+z)^5 : (-x+y-z)^3 \text{ tại } x = 17, y = 16 \text{ và } z = 1. & \end{array}$$

Bài 4: Không làm phép tính chia, hãy nhận xét đơn thức A có chia hết cho đơn thức B hay không?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = 15x^3y^2 \text{ và } B = 5x^2y^3. & \text{b) } A = x^5y^6 \text{ và } B = x^4y^2z^3. \\ \text{c) } A = 3\frac{1}{2}x^5y^5z^4 \text{ và } B = -2,5x^5y^3. & \text{d) } A = -\frac{9}{2}x^{12}y^4z^3 \text{ và } B = \frac{3}{4}x^8y^2z. \end{array}$$

Bài 5:

a) Cho $A = 18x^{10}y^n$ và $B = -6x^7y^3$. Tìm điều kiện của n để biểu thức A chia hết cho biểu thức B .

b) Cho $A = -12x^8y^{2n}z^{n-1}$ và $B = 2x^4y^n z$. Tìm điều kiện của n để biểu thức A chia hết cho biểu thức B .

Bài 6: Tìm các giá trị nguyên của n để hai biểu thức A và biểu thức B đồng thời chia hết cho biểu thức C biết:

a) $A = x^6y^{2n-6}$, $B = 2x^{3n}y^{18-2n}$ và $C = x^2y^4$;

b) $A = 20x^n y^{2n+3}z^2$, $B = 21x^6y^{3-n}t$ và $C = 22x^{n-1}y^2$.

Bài tập tương tự:

Bài 7: Làm phép tính chia:

a) $8^3 : (-8)^{-5}$. b) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{12} : \left(\frac{5}{-6}\right)^4$. c) $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^4$; d) $\left(\frac{9}{7}\right)^9 : \left(\frac{-9}{-7}\right)^3$.

Bài 8: Làm phép tính chia:

a) $15x^2y^2 : 5xy^2$;

b) $x^3y^4 : x^3y$;

c) $5x^2y^4 : 10x^2y$;

d) $\frac{3}{4}(xy)^3 : \left(\frac{-1}{2}x^2y^2\right)$.

Bài 9: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = (-x^3y)^5 : (-x^{12}y^2)$ tại $x = 2$ và $y = -\frac{1}{2}$

b) $B = 84(x^2y^4)^2 : 14x^2y^6$ tại $x = \frac{-3}{4}$ và $y = 4$.

c) $C = 54(a-b-1)^2 : -18(1-a+b)$ tại $a = 21$ và $b = -10$;

b) $D = (2-2m)^6 : (m-1)^3$ tại $m = 11$.

Bài 10: Tìm điều kiện của n để biểu thức A chia hết cho biểu thức B :

a) $A = 35x^9y^n$ và $B = -7x^7y^2$

b) $A = 28x^8y^{2n}$ và $B = 4x^5y^2$.

Bài 11: Tìm các giá trị nguyên của n để hai biểu thức A và B đồng thời chia hết cho biểu thức C :

a) $A = 5x^3y^{3n+1}$, $B = -2x^{3n}y^5$ và $C = x^n y^4$

b) $A = 18x^{2n}y^{12-3n}z^2$, $B = 3^2x^3y^7$ và $C = 3x^3y^4$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Kết quả của phép chia $5^6 : 5^3$ là

A. 5^2 .

B. 5^3 .

C. 5^{18} .

D. 5^1 .

Câu 2: Thương $x^{10} : (-x)^8$ bằng:

- A. $-x^2$
- B. $(-x)^{\frac{10}{8}}$
- C. x^2
- D. $x^{\frac{5}{4}}$

Câu 3: Thương $4x^3y : 10xy^2$ bằng:

- A. $\frac{2}{5}x$
- B. $\frac{4}{10}xy$
- C. $\frac{2}{5}xy^2$
- D. $\frac{4}{10}x^2y^2$

Câu 4: Thương $(-xy)^6 : (2xy)^4$ bằng:

- A. $-(xy)^2$
- B. $(xy)^2$
- C. $(2xy)^2$
- D. $\left(\frac{1}{2}xy\right)^2$

Câu 5: $(-x^7) : (-x^5) = x^2$ A. Đúng B. Sai

Câu 6: $-21xy^5z^3 : 7xy^2z^3 = 3y^3$ A. Đúng B. Sai

Câu 7: Giá trị biểu thức $10x^2y^3 : (-2xy^2)$ tại $x=1; y=-1$ là

- A. 10.
- B. -10.
- C. 5.
- D. -5.

Câu 8: Cho $A = 51x^6y^n$ và $B = -17x^4y^4$. Có bao nhiêu nguyên số nguyên dương $n \leq 10$ thỏa mãn biểu thức A chia hết cho biểu thức B.

- A. 6.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 9.

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để có kết quả đúng.

A	B
a) $15xy^2 : 5xy$	1) $5x^2y^2$
b) $20x^3y^2 : 4xy^2$	2) $3y$
c) $40x^3y^3 : 8xy$	3) $5x^2$
	4) x^2

Câu 10: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

- a) $17xy^3 : 6y^2 = \dots\dots\dots$
- b) $20x^2yz : 7xy = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) 16.

b) $\frac{36}{49}$.

c) $\frac{1}{4}$.

d) $\frac{1}{9}$.

Bài 2: a) $x^5 : x^3 = x^2$.

b) $18x^7 : 6x^4 = 3x^3$.

c) $8x^6y^7z^2 : 4x^4y^7 = 2x^2z^2$.

d) $65x^9y^5 : (-13x^4y^4) = -5x^5y$.

e) $\frac{27}{15}x^3yz^5 : \frac{9}{5}xz^2 = x^2yz^2$.

f) $(5-x)^5 : (x-5)^4 = 5-x$.

Bài 3:

a) $A = \frac{3}{2}x^4y$. Thay $x = -3; y = \frac{2}{3}$ vào A ta tìm được $A = 81$.

b) $B = yz$. Thay $x = 1; y = -1; z = 100$ vào B ta được $B = -100$.

c) $C = \frac{3}{2}(x-2)^2$, thay $x = 3$ tính được $C = \frac{3}{2}$.

d) $D = -(x-y+z)^2$, thay $x = 17; y = 16; z = 1$ tính được $D = -4$.

Bài 4: a) A không chia hết cho B vì số mũ của y trong B lớn hơn mũ của y trong A .

b) A không chia hết cho B vì trong B có biến z mà trong A không có.

c) A chia hết cho B vì mỗi biến của B đều là một biến của A với số mũ của nó nhỏ hơn số mũ trong A .

d) A chia hết cho B vì mỗi biến của B đều là một biến của A với số mũ của nó nhỏ hơn số mũ trong A .

Bài 5: $A : B \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 3 \end{cases}$

b) $A : B \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$.

Bài 6: a) $\begin{cases} A : C \\ B : C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 2n - 6 \geq 4 \\ 3n \geq 2 \\ 18 - 2n \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \geq 5 \\ n \geq 1 \\ n \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 11 \geq n \geq 5 \end{cases}$.

$$\text{b) } \begin{cases} A:C \\ B:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n-1 \\ 2n+3 \geq 2 \\ 6 \geq n-1 \\ 3-n \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 5 \geq n \geq 0 \end{cases}$$

Bài 7: a) $8^3 : (-8)^{-5} = 8^8$.

b) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{12} : \left(\frac{5}{-6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^8$.

c) $\left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{25}{9}$

d) $\left(\frac{9}{7}\right)^9 : \left(\frac{-9}{-7}\right)^3 = \frac{9^6}{7^6}$

Bài 8: a) $15x^2y^2 : 5xy^2 = 3x$.

b) $x^3y^4 : x^3y = y^3$.

c) $5x^2y^4 : 10x^2y = \frac{1}{2}y^3$.

d) $\frac{3}{4}(xy)^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right) = \frac{-3}{2}xy$.

Bài 9: a) $A = (-x^3y)^5 : (-x^{12}y^2) = x^3y^3$. Thay $x=2$ và $y=-\frac{1}{2}$ vào A ta được $A=-1$.

b) $B = 84(x^2y^4)^2 : 14x^2y^6 = 6x^2y^2$. Thay $x=\frac{-3}{4}$ và $y=4$ vào B ta được $B=54$.

c) $C = 3(x-y-1)$, thay $x=21, y=-10$ tính được $C=90$.

d) $D = 64(x-1)^3$, thay $x=11$ tính được $D=64000$.

Bài 10: a) $A:B \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$

b) $A:B \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 1 \end{cases}$

Bài 11:

a) $\begin{cases} A:C \\ B:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 3 \geq n \\ 3n+1 \geq 4 \\ 3n \geq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq 3 \\ n \geq 1 \\ n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow n \in \{1; 2; 3\}$.

b) $\begin{cases} A:C \\ B:C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 2n \geq 3 \\ 13-3m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \geq \frac{3}{2} \\ n \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2} \leq n \leq 3 \end{cases} \Rightarrow n \in \{2; 3\}$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

11. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B (trường hợp các hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B) ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả lại với nhau.

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Làm phép tính chia:

a) $(6.8^4 - 5.8^3 + 8^2) : 8^2$;

b) $(5.9^2 + 3^5 - 2.3^3) : 3^2$

c) $(2.3^4 + 3^2 - 7.3^3) : 3^2$.

d) $(6.2^3 - 5.2^4 + 2^5) : 2^3$.

Bài 2: Làm phép tính chia:

a) $(x^3 + 12x^2 - 5x) : x$.

b) $(3x^4y^3 - 9x^2y^2 + 15xy^3) : xy^2$.

c) $\left(5x^5y^4z + \frac{1}{2}x^4y^2z^3 - 2xy^3z^2\right) : \frac{1}{4}xy^2z$

d) $\left[(x-y)^3 + 3(x-y)\right] : \frac{1}{3}(x-y)$.

e) $(8x^3 - 27y^3) : (2x - 3y)$.

f) $\left[5(x+2y)^6 - 6(x+2y)^5\right] : 2(x+2y)^4$.

Bài 3: Tính giá trị biểu thức:

a) $A = (15x^5y^3 - 10x^3y^2 + 20x^4y^4) : 5x^2y^2$ tại $x = -1; y = 2$.

b) $B = \left[(2x^2y)^2 + 3x^4y^3 - 6x^3y^2\right] : (xy)^2$ tại $x = y = -2$.

c) $C = (-2x^2y^2 + 4xy - 6xy^3) : \frac{2}{3}xy$ tại $x = \frac{1}{2}; y = 4$.

d) $D = \left(\frac{1}{3}x^2y^5 - \frac{2}{3}x^5y^2\right) : 2x^2y^2$ tại $x = -3; y = 3$.

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B:

a) $A = x^2y^4 + 2x^3y^3; B = x^n y^2$.

b) $A = 5x^8y^4 - 9x^{2n}y^6; B = -x^7y^n$.

c) $A = 4x^9y^{2n} + 10x^{10}y^5z^2; B = 2x^{3n}y^4$.

Bài 5:

a) $(-2.10^4 - 6.10^3 + 10^2) : 100$.

b) $(5.16^2 + 4^8 - 4.4^3) : 4^2$.

c) $(7.5^5 - 8.5^4 + 125) : 5^3$

d) $(3.4^2 + 8^2 + 3.16^2) : 2^3$;

Bài 6: Làm phép tính chia:

a) $(x^3 + 4x^2 + x) : x$.

b) $(8x^7 - 4x^6 - 12x^3) : 4x^3$.

c) $(2x^4y^3 - 3x^2y^2 + 2x^2y^3) : x^2y$.

d) $(x^2y^4z^3 + 5xy^3z^3 - 4xy^2z^2) : xy^2z$.

Bài 7: Tính giá trị biểu thức

a) $A = (20x^5y^4 + 10x^3y^2 - 5x^2y^3) : 5x^2y$ tại $x = 1; y = -1$.

b) $B = (-2x^2y^2 + xy^2 - 6xy) : \frac{1}{3}xy = -6xy + 3y - 18$ tại $x = -\frac{1}{2}; y = 1$.

c) $C = \left(\frac{1}{5}x^2y^5 - \frac{2}{5}x^5y^4\right) : 2x^2y^2$ tại $x = -5; y = 10$.

d) $D = (7x^5y^4z^3 - 3x^4z^2 + 2x^2y^2z) : x^2yz$ tại $x = -1; y = 1; z = 2$.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B.

a) $A = -13x^{17}y^{2n-3} + 22x^{16}y^7; B = -7x^{3n+1}y^6$.

b) $A = 20x^5y^{2n} - 10x^4y^{3n} + 15x^5y^6; B = 3x^{2n}y^{n+1}$.

Bài 9: Làm phép tính chia:

a) $[16(x+y)^5 - 12(x+y)^3] : 4(x+y)^2$.

b) $[2(x-y+2z)^4 + 3(y-x-2z)^2] : \frac{1}{2}(x-y+2z)^2$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Câu 1:** Thương của phép chia $(3x^5 - 2x^3 + 4x^2) : 2x^2$ bằng

A. $3x^3 - 2x + 4$; B. $\frac{3}{2}x^3 - x + 2$; C. $\frac{3}{2}x^3 + x + 2$; D. $\frac{3}{2}x^5 - x^3 + 2x^2$

Câu 2: Thương của phép chia $(-12x^4y + 4x^3 - 8x^2y^2) : (-4x^4)$ bằng

A. $-3x^2y + x - 2y^2$; B. $3x^4y + x^3 - 2x^2y^2$; C. $-12x^2y + 4x - 2y^2$; D. $3x^2y - x + 2y^2$

Câu 3: Thương của phép chia $(3xy^2 - 2x^2y + x^3) : \left(\frac{-1}{2}x\right)$ bằng

A. $\frac{-3}{2}y^2 + xy - \frac{1}{2}x^2$; B. $3y^2 + 2xy + x^2$; C. $-6y^2 + 4xy - 2x^2$; D. $6y^2 - 4xy + x^2$

Câu 4: Hãy xét xem lời giải sau đây là đúng hay sai?

$(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy = xy + xy^2 - 4$ A. Sai ; B. Đúng

Câu 5: $(25x^4y - 20x^2y^2 - 3x^2y) : 5x^2y = 5x^2 - 4y - 3$ A. Sai ; B. Đúng

Câu 6: Giá trị của biểu thức $15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2$ tại $x=1, y=-10$ và $z=2018$ là

- A. -30. B. 15. C. 25. D. 30.

Câu 7: Điều kiện của n để phép chia: $x^5y^n : x^ny^3$ (n là số tự nhiên) thực hiện được là

- A. $n=3$. B. $n=4$. C. $n=5$. D. $n \in \{3;4;5\}$.

Câu 8: Tìm điều kiện của tự nhiên n để phép chia $(4x^{10}y - xy^7 + x^5y^4) : 2x^ny^n$ là phép chia hết

- A. $n=0$. B. $n=1$. C. $n \in \{0;1\}$. D. $n=5$.

Câu 9: Hãy ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
a. $(x^3 - 2x^2y + xy^2) : 2x$	1. $-2xy + 4x^2 - 5$
b. $(15xy^2 + 19xy^3 + 16y^2) : 6y^2$	2. $\frac{5}{2}x + \frac{19}{6}xy + \frac{8}{3}$
c. $(-4x^2y^2 + 8x^3y - 10xy) : 2xy$	3. $\frac{1}{2}x - xy + \frac{3}{2}y^2$
	4. $xy + 4x^2 - 5$

Câu 10: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

a) $(-4x^4 + 3x^3 - x^2) : 2x^2 = \dots\dots\dots$

b) $(6xy^2 + 4x^2y - 2x^3) : \dots\dots\dots = 3y^2 + 2xy - x^2$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $6.8^2 - 5.8 + 1 = 345$

b) $(5.9^2 + 3^5 - 2.3^3) : 3^2 = 66$

c) $(2.3^4 + 3^2 - 7.3^3) : 3^2 = 2.3^2 + 1 - 7.3 = -2.$

d) $(6.2^3 - 5.2^4 + 2^5) : 2^3 = 6 - 5.2 + 2^2 = 0.$

Bài 2: a) $(x^3 + 12x^2 - 5x) : x = x^2 + 12x - 5.$

b) $(3x^4y^3 - 9x^2y^2 + 25xy^3) : xy^2 = 3x^3y - 9x + 25y$

c) $\left(5x^5y^4z + \frac{1}{2}x^4y^2z^3 - 2xy^3z^2\right) : \frac{1}{4}xy^2z = 20x^4y^2 + 2x^3z^2 - 8yz$

d) $\left[(x-y)^3 + 3(x-y)\right] : \frac{1}{3}(x-y) = 3(x-y)^2 + 9$

e) $(8x^3 - 27y^3) : (2x-3y) = (2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) : (2x-3y) = 4x^2 + 6xy + 9y^2$

f) $\left[5(x+2y)^6 - 6(x+2y)^5\right] : 2(x+2y)^4 = \frac{5}{2}(x+2y)^2 - 3(x+2y)$

Bài 3: a) $A = 3x^3y - 2x + 4x^2y^2.$

Thay $x = -1; y = 2$ vào biểu thức tính được kết quả $A = 12.$

b) $B = 4x^2 + 3x^2y - 6x$

Thay $x = y = -2$ vào biểu thức tính được kết quả $B = 4.$

c) $C = (-2x^2y^2 + 4xy - 6xy^3) : \frac{2}{3}xy = -3xy + 6 - 9y^2$

Thay $x = \frac{1}{2}; y = 4.$ vào biểu thức tính được kết quả $C = -144$

d) $D = \left(\frac{1}{3}x^2y^5 - \frac{2}{3}x^5y^2\right) : 2x^2y^2 = \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{3}x^3$

Thay $x = -3; y = 3.$ vào biểu thức tính được kết quả $D = \frac{27}{2}$

Bài 4: a) $A : B \Leftrightarrow 2 \geq n \Leftrightarrow n \leq 2$ mà $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \{0; 1; 2\}.$

b) $A : B \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq n \\ 2n \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq n \leq 4$ mà $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 4.$

$$c) A:B \Leftrightarrow \begin{cases} 2n \geq 4 \\ 10 \geq 3n \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq n \leq \frac{10}{3}, \text{ mà } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \{2, 3\}.$$

Bài 5: a) $(-2 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^3 + 10^2):100 = -2 \cdot 10^2 - 6 + 1 = -205.$

b) $(5 \cdot 16^2 + 4^8 - 4 \cdot 4^3):4^4 = 5 + 4^4 - 1 = 260.$

c) $(7 \cdot 5^5 - 8 \cdot 5^4 + 125):5^3 = 7 \cdot 25 + 8 \cdot 5 + 1 = 136$

d) $(3 \cdot 4^2 + 8^2 + 3 \cdot 16^2):2^3 = 110$

Bài 6:

a) $(x^3 + 4x^2 + x):x = x^2 + 4x + 1.$

b) $(8x^7 - 4x^6 - 12x^3):4x^3 = 2x^4 - x^3 - 12.$

c) $(2x^4y^3 - 3x^2y^2 + 2x^2y^3):x^2y = 2x^2y^2 - 3y + 2y^2.$

d) $(x^2y^4z^3 + 5xy^3z^3 - 4xy^2z^2):xy^2z = xy^2z^2 + 5yz^2 - 4z.$

Bài 7:

a) $A = (20x^5y^4 + 10x^3y^2 - 5x^2y^3):5x^2y^2 = 4x^3y^2 + 2x - y$

Thay $x=1; y=-1$ vào A ta được $A=7.$

b) $B = (-2x^2y^2 + xy^2 - 6xy):\frac{1}{3}xy = -6xy + 3y - 18.$ Thay $x=-\frac{1}{2}; y=1$ vào B ta được $B=-12.$

b) $C = \left(\frac{1}{5}x^2y^5 - \frac{2}{5}x^5y^4\right):2x^2y^2 = \frac{1}{10}y^3 - \frac{1}{5}x^3y^2.$ Thay $x=-5; y=10$ vào C ta được $C=2600.$

c) $D = (7x^5y^4z^3 - 3x^4z^2 + 2x^2y^2z):x^2yz = 7x^3y^3z^2 - 3x^2z + 2y.$ Thay $x=-1; y=1; z=2$ vào D ta được $D=-32.$

Bài 8:

a) $A:B \Leftrightarrow 2n-3 \geq 6$ và $16 \geq 3n+1.$ Giải ra được $n=5.$

b) $A:B \Leftrightarrow 4 \geq 2n; 2n \geq n+1$ và $6 \geq n+1.$ Giải ra được $n=1.$

Bài 9:

a) $[16(x+y)^5 - 12(x+y)^3]:4(x+y)^2 = 4(x+y)^3 - 3(x+y).$

b) $[2(x-y+2z)^4 + 3(y-x-2z)^2]:\frac{1}{2}(x-y+2z)^2 = 4(x-y+2z)^2 + 6.$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

12. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phép chia hai đa thức đã sắp xếp được thực hiện tương tự như phép chia hai số tự nhiên:

- Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, được hạng tử cao nhất của thương.

- Chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia, được hạng tử thứ hai của thương

- Quá trình trên diễn ra liên tục đến khi được dư cuối cùng bằng 0 (phép chia hết) hoặc dư cuối cùng khác 0 có bậc thấp hơn bậc của đa thức chia (phép chia có dư)

TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ ĐA THỨC A CHIA HẾT CHO ĐA THỨC B

* Thực hiện phép chia $A : B$ để tìm biểu thức dư R theo m

Để A chia hết cho B thì $R = 0 \Rightarrow m$

* Tìm số nguyên n để A chia hết cho B (với A, B là các biểu thức theo n)

- Thực hiện $A : B$ tìm số dư là số nguyên k , thương là biểu thức Q

- Viết $A = Q.B + k$

- Để A chia hết cho $B \Leftrightarrow k$ chia hết cho $B \Leftrightarrow B$ là Ư^(k) $\Rightarrow n$

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Thực hiện phép chia

a) $(x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$;

b) $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

c) $(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x - 3)$;

d) $(x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x + 5) : (x^2 + x - 1)$.

Bài 2: Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi tính:

a) $(5x^2 - 3x^3 + 15 - 9x) : (5 - 3x)$;

b) $(-4x^2 + x^3 - 20 + 5x) : (x - 4)$.

c) $(-x^2 + 6x^3 - 26x + 21) : (3 - 2x)$;

d) $(2x^4 - 13x^3 - 15 + 5x + 21x^2) : (4x - x^2 - 3)$.

Bài 3: Tìm thương Q và dư R sao cho $A = B.Q + R$ biết.

a) $A = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x + 9$ và $B = x^2 + 1$.

b) $A = 2x^3 - 11x^2 + 19x - 6$ và $B = x^2 - 3x + 1$.

c) $A = 2x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ và $B = x^2 + 1$.

Bài 4: Xác định k để đa thức A chia hết cho đa thức B

a) $A = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ và $B = x^2 - x - 2$

a) $A = x^4 - x^3 + 6x^2 - x + k$ và $B = x^2 - x + 5$;

Bài 5: Tìm k để :

a) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho $g(x) = x - 2$

b) $f(x) = x^4 - 10x^3 + 27x^2 + 8x + k$ chia hết cho $g(x) = x + 2$

c) $f(x) = x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 6x + k$ chia hết cho $g(x) = x - 3$

d) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 7x + k$ chia hết cho $g(x) = x + 4$

e) $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 11x^2 + x - k$ chia hết cho $g(x) = x - 4$

f) $f(x) = 4x^4 - 13x^3 + 23x^2 + 18x - k$ chia hết cho $g(x) = x + 4$

Bài 6: Tìm a và b để đa thức A chia hết cho đa thức B với:

a) $A = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ và $B = x^2 - 3x + 4$

b) $A = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + ax + b$ và $B = x^2 - x - 2$.

Bài 7: Tìm a và b để đa thức A chia hết cho đa thức B với:

a) $A = x^4 - 7x^3 + 10x^2 + (a-1)x + b - a$ và $B = x^2 - 6x + 5$.

a) $A = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ và $B = x^2 - x + b$

Bài 8: Tìm giá trị nguyên của x để đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ chia hết cho $g(x) = x^2 + x + 1$

Bài 9: Tìm giá trị nguyên của x để đa thức A chia hết cho đa thức B

a) $A = 8x^2 - 4x + 1$ và $B = 2x + 1$.

b) $A = 3x^3 + 8x^2 - 15x + 6$ và $B = 3x - 1$.

c) $A = x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ và $B = x + 4$

Bài 10: Tìm m và n để đa thức $x^3 - mx^2 - n$ khi chia cho đa thức $x - 3$ dư là 27 còn khi chia cho đa thức $x + 1$ được dư là 7.

Bài 11: Tìm x biết:

a) $(8x^2 - 4x) : (-4x) - (x + 2) = 8$.

b) $(2x^4 - 3x^3 + x^2) : (-x^2) + 4(x - 1)^2 = 0$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Kết quả của phép chia: $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y) =$

- A. $x - y$ B. $x + y$ C. $x + 2y$ D. $2x + y$

Câu 2: Kết quả của phép chia: $(x^2 - y^2)(x - y) =$

- A. $x + y$ B. $(x-y)^2$ C. $x - y$ D. $(x + y)^2$

Câu 3: Kết quả của phép chia: $(8x^3 + 1) : (2x + 1) =$

- A. $4x^2 + 1$ B. $4x^2 - 1$ C. $4x^2 - 4x + 1$ D. $4x^2 - 2x + 1$

Câu 4: Hãy xét xem lời giải sau đây là đúng hay sai?

$(x + y)^3 : (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$ A) Đúng B) Sai

Câu 5: $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3) = x + 3$ A) Đúng B) Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng?

A	B
a) $(x^3 - 1) : (x - 1)$	1) $x - y$
b) $(x - y)^3 : (x - y)$	2) $x^2 - 2xy + y^2$
c) $(x^2 - y^2) : (x + y)$	3) $x^2 + x + 1$
	4) $x^2 + 2x + 1$

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

a) $(x^3 + x^2 - 12) : (x - 2) = \dots\dots\dots$

b) $(27x^3 - 1) : (3x - 1) = \dots\dots\dots$

Bài 8:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - 3x - 1 & x^2 + x + 1 \\
 - \frac{x^3 + x^2 + x}{-4x^2 - 4x - 1} & x - 4 \\
 - \frac{-4x^2 - 4x - 1}{-4x^2 - 4x - 4} & \\
 \hline
 & 3
 \end{array}$$

Đề $f(x):g(x)$ thì $3:x^2 + x + 1$.

Vậy $\begin{cases} x^2 + x + 1 = -1 \\ x^2 + x + 1 = -3 \\ x^2 + x + 1 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 3 \end{cases}$.

Do $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên $\begin{cases} x^2 + x + 1 = 1 \\ x^2 + x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; x = 0 \\ x = 1; x = -2 \end{cases}$.

Vậy các giá trị cần tìm là $x \in \{0 ; -1 ; 1 ; -2\}$

Bài 9:

Bài 10:

Bài 11:

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

I. BÀI TẬP

Bài 1: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- a) $5x^2 - 10xy + 5y^2$
- b) $x^2 - y^2 + 6y - 9$
- c) $3x^4 - 75x^2y^2$
- d) $x^4y + xy^4$

Bài 2: Phân tích đa thức thành nhân tử:

- a) $x^7 + x^5 + 1$
- b) $x^5 - x^4 - 1$
- c) $x^4 + 324$

Bài 3: Phân tích các đa thức thành nhân tử:

- a) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
- b) $(a + b)(a^2 - b^2) + (b + c)(b^2 - c^2) + (c + a)(c^2 - a^2)$

Bài 4: Tìm x biết:

$$(8x^2 - 4x + 5)(2x^2 + 6x + 9) - (10x^2 - 2x + 3)(4x^2 + 8x + 7) = (8x^2 + 4x + 13)(-6x^2 - 2x + 3)$$

Bài 5: Cho $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2009$ và $ad + bc = 0$. Tính $ab + cd$.

Tự luyện:

Bài 6: Thực hiện phép tính:

- a) $(3x^3 - 2x^2 + x + 2) \cdot (5x^2)$
- b) $(a^2x^3 - 5x + 3a) \cdot (-2a^3x)$
- c) $(3x^2 + 5x - 2)(2x^2 - 4x + 3)$
- d) $(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(a^2 + a - 1)(a^2 - a + 1)$
- b) $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2a + 4)(a^2 - 2a + 4)$
- c) $(2 + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 12xy$
- d) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - (x^3 - 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Bài 8: Trong các biểu thức sau, biểu thức nào không phụ thuộc vào x:

- a) $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 6(x + 1)(x - 1)$
- b) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- c) $(x - 2)^2 - (x - 3)(x - 1)$
- d) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- e) $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 + 6(x + 1)(x - 1)$
- f) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 - 12x$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1

- a) $5(x - y)^2$
- b) $(x + y - 3)(x - y + 3)$
- c) $3x^2(x + 5y)(x - 5xy)$
- b) $xy(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Bài 2:

- a) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$
- b) $(x^2 - x + 1)(x^3 - x - 1)$
- c) $(x^2 + 6x + 18)(x^2 - 6x + 18)$

- Bài 3:** a) $(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c)$ b) $(a - b)(b - c)(c - a)$

Bài 4:

$$\begin{aligned} & (8x^2 - 4x + 5)(2x^2 + 6x + 9) - (10x^2 - 2x + 3)(4x^2 + 8x + 7) = (8x^2 + 4x + 13)(-6x^2 - 2x + 3) \\ \Leftrightarrow & (8x^2 - 4x + 5)(2x^2 + 6x + 9) + (10x^2 - 2x + 3)(-4x^2 - 8x - 7) = (8x^2 + 4x + 13)(-6x^2 - 2x + 3) \\ \\ \Leftrightarrow & \left[(5x^2 + x + 7) + (3x^3 - 5x - 2) \right] \left[(5x^2 + x + 7) - (3x^2 - 5x - 2) \right] \\ & + \left[(3x^2 - 5x - 2) + (7x^2 + 3x + 5) \right] \left[(3x^2 - 5x - 2) - (7x^2 + 3x + 5) \right] \\ = & \left[(x^2 + x + 8) + (7x^2 + 3x + 5) \right] \left[(x^2 + x + 8) - (7x^2 + 3x + 5) \right] \\ \\ \Leftrightarrow & (5x^2 + x + 7)^2 - (3x^2 - 5x - 2)^2 + (3x^2 - 5x - 2)^2 - (7x^2 + 3x + 5)^2 \\ = & (x^2 + x + 8)^2 - (7x^2 + 3x + 5)^2 \\ \\ \Leftrightarrow & (5x^2 + x + 7)^2 = (x^2 + x + 8)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + x + 7 = x^2 + x + 8 \\ 5x^2 + x + 7 = -x^2 - x - 8 \end{cases} \\ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x^2 = 1 \\ 6x^2 + 2x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ 5x^2 + (x + 1)^2 + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 5: $2009(ab + cd) = 2009ab + 2009cd$

$= (c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd = \dots = (ac + bd)(ad + bc) = 0$

ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I – ĐẠI SỐ

I. TRẮC NGHIỆM: (3đ) Khoanh tròn vào chữ cái trước câu trả lời đúng:

Câu 1. Kết quả của phép tính $xy(x^2 + x - 1)$ là:

A. $x^3y + x^2y + xy$

B. $x^3y - x^2y + xy$

C. $x^3y - x^2y - xy$

D. $x^3y - x^2y - xy$

Câu 2. Tìm x biết $x^2 - 25 = 0$ ta được:

A. $x = 25$

B. $x = -5$ hoặc $x = 5$

C. $x = 5$

D. $x = -5$

Câu 3. Kết quả của phép tính $(x^2 - 5x)(x + 3)$ là:

A. $x^3 - 2x^2 - 15x$

B. $x^3 + 2x^2 + 15x$

C. $x^3 + 2x^2 - 15x$

D. $x^3 - 2x^2 + 15x$

Câu 4. Phép chia hết trong các câu dưới đây là:

A. $-6x^3y : 5xy$

B. $(x^3 + x^2 + x) : x^2$

C. $(x^3y + x^2z + xy) : xy$

D. $(x^2 + 1) : (x - 1)$

Câu 5. Kết quả của phép tính $27x^4y^2z : 9x^4y$ là:

A. $3xyz$

B. $3xz$

C. $3yz$

D. $3xy$

Câu 6. Rút gọn biểu thức $A = (x - 2)(x + 2) - (x - 1)^2$ được kết quả là:

A. $2x^2 - 3$

B. -3

C. $2x + 5$

D. $2x - 5$

II. TỰ LUẬN: (7đ)

Bài 1. (2,5đ) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + 2x + x^2$

b) $x^2 + 2xy - 9 + y^2$

c) $x^2 - 3xy - 10y^2$

Bài 2. (2đ) Tìm x biết:

a) $x(x - 2) - x + 2 = 0$

b) $5x(x - 3)^2 - 5x(x - 1)^3 + 15(x + 2)(x - 2) = 0$

Bài 3. (1đ) Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi làm tính chia:

$(4x^2 - 5x + x^3 - 20) : (x + 4)$

Bài 4. (1đ) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì: $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$ chia hết cho 4

Bài 5. (0,5đ) Biết $x + y = 10$. Tính giá trị lớn nhất của $P = xy$.

1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$ trong đó $A; B$ là các đa thức và B khác đa thức 0.

A được gọi là tử thức (hay tử). B được gọi là mẫu thức (hay mẫu)

• $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$ với $B, D \neq 0$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{(x-3)(2y-x)}{(x-2y)^2} = \frac{3-x}{x-2y}$$

$$b) \frac{4-3x}{4+3x} = \frac{9x^2-24x+16}{16-9x^2}$$

$$c) \frac{x^3+64}{(3-x)(x^2-4x+16)} = \frac{-x-4}{x-3}$$

$$d) \frac{2x^2-7x+6}{2x-3} = \frac{x^2-7x+10}{x-5}$$

Bài 2: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x};$$

$$b) \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$$

$$c) \frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1};$$

$$d) \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

Bài 3: Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \frac{9x^2-30xy+25y^2}{25y^2-9x^2} = \frac{5y-3x}{5y+3x}$$

$$b) \frac{2x^2-11x+12}{3x^2-14x+8} = \frac{2x-3}{3x-2}$$

$$c) \frac{x^3+6x^2-x-30}{x^3+3x^2-25x-75} = \frac{x-2}{x-5}$$

$$d) \frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-4xy+3y^2} = \frac{x+y}{x-y}$$

Bài 4: Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy tìm các đa thức A, B, C, D , trong mỗi đẳng thức sau: (giả sử các mẫu đều có nghĩa)

$$a) \frac{64x^3+1}{16x^2-1} = \frac{A}{4x-1}$$

$$b) \frac{4x^2+3x-7}{B} = \frac{4x+7}{2x-3}$$

$$c) \frac{C}{3x^2 - 7x + 4} = \frac{3 - 2x}{x - \frac{4}{3}}$$

$$d) \frac{2x - y - 1}{4x - 2y} = \frac{4x^2 - 2x - y^2 - y}{D}$$

Bài 5: Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy tìm các đa thức A, B, C, D trong mỗi đẳng thức sau: (giả sử các đa thức mẫu đều có nghĩa)

$$a) \frac{3x^2 - 2x - 5}{A} = \frac{3x - 5}{2x - 3}$$

$$b) \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{B}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c) \frac{C}{2x + 1} = \frac{10x^2 - 5x}{4x^2 - 1}$$

$$b) \frac{4x^2 - 16x + 16}{x^2 - 4} = \frac{D}{x + 2}$$

Bài 6: a) Tìm GTNN của phân thức: $\frac{3 + |2x - 1|}{14}$

b) Tìm GTLN của phân thức: $\frac{-4x^2 + 4x}{15}$

Bài 7: Tìm GTLN của các phân thức:

$$a) \frac{5}{x^2 + 2x + 2}$$

$$b) \frac{3}{|2x - 5| + 2}$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Biểu thức nào sau đây không phải là phân thức đại số?

A. $\frac{|x^2 + 1|}{5}$

B. $\frac{2x}{5}$

C. $\frac{3x + 7}{x^2 - 3x + 10}$

D. 75

Câu 2: Trong các cặp phân thức sau cặp phân thức nào bằng nhau?

A. $\frac{x + 3}{x + 1}$ và $\frac{(x + 3)(x - 1)}{x^2 - 1}$;

B. $\frac{7y^2}{5}$ và $\frac{3xy^2}{2x}$;

C. $\frac{2x(x - 5)}{3(5 - x)}$ và $\frac{2x}{3}$;

D. $\frac{x^2 - 2}{5(x + 2)}$ và $\frac{x - 2}{5}$

Câu 3: Cặp phân thức nào sau đây không bằng nhau?

A. $\frac{20xy}{28x}$ và $\frac{5y}{7}$.

B. $-\frac{1}{2}$ và $\frac{15x}{-30x}$.

C. $\frac{7}{28x}$ và $\frac{5y}{20xy}$.

D. $-\frac{1}{15x}$ và $\frac{-2}{-30x}$.

Câu 4: Cho đẳng thức: $\frac{?}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}$. Đa thức ở dấu ? là:

- A. $x^2 + 4x$
- B. $x^2 - 4x$
- C. $x^2 + 4$
- D. $x^2 + 16x$

Câu 5: $\frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$. A. Đúng. B. Sai.

Câu 6: $\frac{1 - x^2}{x(x - 1)} = \frac{1 + x}{x}$. A. Đúng. B. Sai.

Câu 7: Giá trị của phân thức $\frac{2x^2 + x}{5x^3 - 19x^2 + 12x}$ với $x = -\frac{1}{2}$ là :

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. Một đáp số khác

Câu 8: Giá trị của phân thức $\frac{3x^2 - 4xy + 1}{2x^3 + 7x^2y - 15x + 2}$ với $x = 0 ; y = -\frac{2}{5}$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. $\frac{3}{4}$
- D. 2

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để có khẳng định đúng.

A	B
a) Với $x = 1$ thì $\frac{5}{-2x} =$	1) $-\frac{2}{5}$
b) Với $x = -2$ thì $\frac{x+4}{1-2x} =$	2) $\frac{2}{5}$
c) Với $x = -2$ thì $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+4} =$	3) $\frac{3}{10}$
	4) $\frac{5}{10}$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

a) Ta có: $(x - 3)(2y - x)(x - 2y) = -(3 - x)(2y - x)(x - 2y) = (3 - x)(x - 2y)^2$

$$\Rightarrow \frac{(x - 3)(2y - x)}{(x - 2y)^2} = \frac{3 - x}{x - 2y}$$

b) Ta có:

$$(4 - 3x)(16 - 9x^2) = (4 - 3x)\left[4^2 - (3x)^2\right] = (4 - 3x)(4 - 3x)(4 + 3x) = (4 + 3x)(4 - 3x)^2$$

$$(4 + 3x)(9x^2 - 24x + 16) = (4 + 3x)(4 - 3x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4 - 3x}{4 + 3x} = \frac{9x^2 - 24x + 16}{16 - 9x^2}$$

c) Ta có: $(x^3 + 64)(x - 3) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)(x - 3)$

$$(3 - x)(x^2 - 4x + 16)(-x - 4) = -(x + 4)(x^2 - 4x + 16)(3 - x) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)(x - 3)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 64}{(3 - x)(x^2 - 4x + 16)} = \frac{-x - 4}{x - 3}$$

d) Ta có: $(2x^2 - 7x + 6)(x - 5) = 2x^3 - 10x^2 - 7x^2 + 35x + 6x - 30 = 2x^3 - 17x^2 + 41x - 30$

$$(2x - 3)(x^2 - 7x + 10) = 2x^3 - 14x^2 + 20x - 3x^2 + 21x - 30 = 2x^3 - 17x^2 + 41x - 30$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 7x + 6}{2x - 3} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$$

Bài 2:**Bài 3:****Bài 4:****Hướng dẫn giải**

a) Ta có: $\frac{64x^3 + 1}{16x^2 - 1} = \frac{(4x)^3 + 1^3}{(4x - 1)(4x + 1)} = \frac{(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)}{(4x - 1)(4x + 1)}$

Vậy $A = 16x^2 - 4x + 1$

Các ý b,c,d làm tương tự

Bài 5:

Bài 6:

a) $\frac{3 + |2x - 1|}{14} \geq \frac{3}{14}$. GTNN của biểu thức là $\frac{3}{14}$ khi $x = \frac{1}{2}$

b) $\frac{-4x^2 + 4x}{15} = \frac{1 - (4x^2 - 4x + 1)}{15} = \frac{1 - (2x - 1)^2}{15} \leq \frac{1}{15}$

GTLN của biểu thức là $\frac{1}{15}$ khi $x = \frac{1}{2}$

Bài 7: a) Có $\frac{5}{x^2 + 2x + 2} = \frac{5}{(x + 1)^2 + 1} \leq \frac{5}{1}$. Vậy GTLN của biểu thức là 5 khi $x = -1$

b) $\frac{1}{|2x - 5| + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{|2x - 5| + 2} \leq \frac{3}{2}$. Vậy GTLN của biểu thức là $\frac{3}{2}$ khi $x = \frac{5}{2}$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ với $M \neq 0$
- $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$ với N là một nhân tử chung của A và B .
- Quy tắc đổi dấu: $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Dùng tính chất cơ bản của phân thức, hãy điền đa thức thích hợp vào chỗ trống (...) trong mỗi đẳng thức sau:

a) $\frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{\dots}{x}$

b) $\frac{2a^3+4a^2}{a^2-4} = \frac{\dots}{a-2}$

c) $\frac{x-y}{2-x} = \frac{y-x}{\dots}$

d) $\frac{\dots}{x-y} = \frac{3x^2-3xy}{3(y-x)^2}$

Bài 2: Tìm đa thức A; B biết:

a) $\frac{A}{x-2} = \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b) $\frac{B}{x-1} = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

Bài 3: Dùng tính chất cơ bản của phân thức để biến mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức:

a) $\frac{3}{x+1}$ và $\frac{x-1}{2x}$

b) $\frac{x+3}{4x}$ và $\frac{x^2-9}{2x+5}$

Bài 4: Dùng tính chất cơ bản của phân thức để biến mỗi cặp phân thức sau thành một cặp phân thức bằng nó và có cùng mẫu thức:

a) $\frac{2x}{x-5}$ và $\frac{3x+2}{5-x}$

b) $\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$ và $\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$

Bài 5: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của phân thức: $A = \frac{18}{4x-x^2-7}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của phân thức: $B = \frac{10}{x^2-2x+2}$

Bài 6: Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức dưới đây nhận giá trị nguyên.

a) $\frac{6}{2x+1}$

b) $\frac{3}{2x-1}$

c) $\frac{5}{x^2+1}$

d) $\frac{7}{x^2-x+1}$

Bài 7: Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A = \frac{10}{x-9}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B = \frac{-10}{x+21}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C = \frac{x-21}{x-10}$ dương.

Bài 8: Với giá trị nào của x thì:

a) Giá trị của phân thức $A = \frac{3}{x-2}$ dương;

b) Giá trị của phân thức $B = \frac{-3}{x-3}$ âm;

c) Giá trị của phân thức $C = \frac{x-1}{x-5}$ dương.

Bài 9: Số nào lớn hơn: $A = \frac{2020-2015}{2020+2015}$ và $B = \frac{2020^2-2015^2}{2020^2+2015^2}$.

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất của các phân thức sau:

a) $A = \frac{3}{x^2+2x+4}$;

b) $B = \frac{5}{4x^2-4x+3}$.

Bài 11: Tính giá trị của phân thức

a) $\frac{x^8-1}{(x^4+1)(x^2-1)}$ tại $x=4$

b) $\frac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6}$ tại $x=3$

c) $\frac{2xy-x^2+z^2-y^2}{x^2+z^2-y^2+2xz}$ tại $x=1; y=1; z=-5$

Bài 12: Tính giá trị của phân thức:

a) $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+1}$ với $x \neq -1$ tại $3x-1=0$;

b) $\frac{x-2}{x^2-5x+6}$ với $x \neq 2; x \neq 3$ tại $x^2-4=0$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho phân thức: $\frac{-2x^2y}{10xy^2}$. Phân thức nào sau đây bằng phân thức đã cho.

- A. $\frac{-x}{5y}$ B. $\frac{-1}{5}$ C. $\frac{2x^2y}{5y}$ D. $\frac{x}{5y}$

Câu 2: Phân thức: $\frac{2x-1}{3x}$ bằng phân thức nào sau đây.

- A. $\frac{1-4x^2}{-3x(2x+1)}$ B. $\frac{2x^2-1}{3x(2x+1)}$ C. $\frac{4x^2-1}{3x}$ D. $\frac{2x-1}{3x(2x+1)}$

Câu 3: Cho đẳng thức: $\frac{(y-x)^2}{2-x} = \frac{(x-y)^2}{?}$. Biểu thức cần điền vào dấu ? là:

- A. $2-x$ B. $x-2$ C. $(2-x)^2$ D. $(x-2)^2$

Câu 4: Giá trị của phân thức $\frac{2x^2+x}{5x^3-19x^2+127}$ với $x = -\frac{1}{2}$ là :

- A. -1 B. 0 C. 1 D. Một đáp số khác

Câu 5: Giá trị của phân thức $\frac{3x^2-4xy+1}{2x^3+7x^2y-15x+2}$ với $x = 0; y = -\frac{2}{5}$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{4}$ D. 2

Câu 6: Giá trị của biểu thức $\frac{x+1}{x^2+2x}$ bằng 0 với mọi giá trị của x là:

- A. -1 B. -2 C. 0 D. cả A , B , C

Câu 7: $\frac{(x-5)^2}{3(5-x)} = \frac{(5-x)^2}{3}$.

- A. Đúng. B. Sai

Câu 8: $\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{x+2}{x+1}$.

- A. Đúng. B. Sai

Câu 9: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để đượ kết quả đúng.

A		B	
a) $\frac{x-x^2}{5x^2-5} =$	c) $\frac{x^2y^2}{y+1} =$	1) $\frac{x^2y^3}{x^2+x}$	3) $-\frac{x}{5(x+1)}$
b) $\frac{xy^3}{x+1} =$		2) $\frac{x^2y^3}{y^2+y}$	4) $\frac{x}{5(x+1)}$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

$$\text{a) } \frac{(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2 : (x+1)}{x(x+1) : (x+1)} = \frac{x+1}{x}. \text{ Đa thức cần tìm là } x+1$$

$$\text{Bài 2: } A = x+1 ; B = x^2 + x - 2$$

$$\text{Bài 3: a) } \frac{3}{x+1} = \frac{6x}{2x(x+1)} ; \frac{x-1}{2x} = \frac{x^2-1}{2x(x+1)}$$

$$\text{b) } \frac{x+3}{4x} = \frac{(x+3)(2x+5)}{4x(2x+5)} ; \frac{x^2-9}{2x+5} = \frac{4x(x^2-9)}{4x(2x+5)}$$

$$\text{Bài 4: a) } \frac{2x}{x-5} ; \frac{3x+2}{5-x} = \frac{-(3x+2)}{x-5}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)} ; \frac{x+3}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\text{Bài 5: a) } A = \frac{18}{4x-x^2-7} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{18}{x^2-4x+7} \text{ lớn nhất.}$$

$$\frac{18}{x^2-4x+7} = \frac{18}{(x-2)^2+3} \leq \frac{18}{3} = 6. \text{ Vậy } A \text{ nhỏ nhất khi } x=2$$

$$\text{b) } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0. \text{ B lớn nhất khi } x^2 - 2x + 2 \text{ nhỏ nhất. Khi } x=1$$

$$\text{Bài 6: a) } \frac{6}{2x+1} \text{ nhận giá trị nguyên khi } 2x+1 \in U(6). \text{ Mà } 2x+1 \text{ lẻ nên}$$

$$2x+1 \in \{1; 3; -1; -3\}.$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 1; -1; -2\}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

c) Do $x^2 + 1 > 0$ nên
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

d) $x^2 - x + 1 > 0$ nên
$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 1 \\ x^2 - x + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ (x-3)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bài 7: a) $\frac{10}{x-9} > 0 \Leftrightarrow x-9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$.

b) $\frac{-10}{x+21} < 0 \Leftrightarrow x+21 < 0 \Leftrightarrow x < -21$.

c) $\frac{x-21}{x-10} > 0 \Leftrightarrow x-21$ và $x-10$ cùng dấu; mà $x-10 > x-21$ nên $x-21 > 0$ hoặc $x-10 < 0$
 $\Leftrightarrow x > 21$ hoặc $x < 10$.

Bài 8: KQ: a) $x > 2$ b) $x > 3$ c) $x > 5$ hoặc $x < 1$

Bài 9: Ta có $A = \frac{2020-2015}{2020+2015} = \frac{2020^2-2015^2}{(2020+2015)^2} < \frac{2020^2-2015^2}{2020^2+2015^2} \Rightarrow A < B$.

Bài 10: a) Ta có $A = \frac{3}{(x+1)^2+3} \leq \frac{3}{3} = 1$. Giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = -1$.

b) Ta có $B = \frac{5}{(2x-1)^2+2} \leq \frac{5}{2}$. Giá trị lớn nhất của B là $\frac{5}{2}$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 11:

a) $\frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{(x^4 + 1)(x^4 - 1)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)} = x^2 + 1$. Thay $x = 4$ tính

được giá trị biểu thức bằng 17

b) $\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6} = \frac{(2x + 3)^2}{(2x + 3)(x - 2)} = \frac{2x + 3}{x - 2}$. Thay $x = 3$ tính được GTBT bằng 9

c) $\frac{2xy - x^2 + z^2 - y^2}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz} = \frac{z^2 - (x - y)^2}{(x + z)^2 - y^2} = \frac{(z - x + y)(z + x - y)}{(x - y + z)(x + y + z)} = \frac{z - x + y}{x + y + z}$.

Thay $x = 1; y = 1; z = -5$ tính được GTBT bằng $= \frac{-5}{3}$

Bài 12: a) Rút gọn $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x - 3}{x + 1}$

Với $x = \frac{1}{3}$, thay vào ta tìm được kết quả bằng -2

b) Rút gọn thành $\frac{1}{x - 3}$ với $x^2 - 4 = 0$

* TH1: $x = 2$ (loại) vì không thỏa mãn điều kiện

* TH2: $x = -2$ thay vào được kết quả $\frac{-1}{5}$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3. RÚT GỌN PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn rút gọn một phân thức ta có thể:
 - Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung của chúng.
 - Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung.

II. BÀI TẬP

Bài 1: Rút gọn các phân thức

a) $\frac{18xy}{12yz}$ b) $\frac{-12x^2y}{-16xy^2}$ c) $\frac{-36x^3}{12y^3}$ d) $\frac{12x^3y}{15xy^4}$

Bài 2: Rút gọn các phân thức

a) $\frac{35(x^2 - y^2)(x + y)^2}{77(y - x)^2(x + y)^3}$ b) $\frac{4x^2y^2 + 1 - 4xy}{8x^3y^3 - 1 - 6xy(2xy - 1)}$

c) $\frac{x^2 - xy - xz + yz}{x^2 + xy - xz - yz}$ d) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

Bài 3: Rút gọn các phân thức

a) $\frac{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 25)}{x^2 + 7x + 10}$ b) $\frac{x^6 - y^6}{x^4 - y^4 - x^3y + xy^3}$

c) $\frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x - 3)^2 + 4x(3 - x)^2 + 4(x - 3)^2}$

Bài 4: Chứng minh đẳng thức

a) $\frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a + 1}{a - 2}$ b) $\frac{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2 + y)(1 + y)} = \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1}$

Bài 5: Rút gọn rồi tính giá trị của phân thức thu gọn:

a) $A = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4}$ tại $x = 3$ b) $B = \frac{x^2 + xy - x - y}{x^2 - xy - x + y}$ tại $x = 1; y = 5$

c) $C = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 9}$ tại $x = 2$

Bài 6: Rút gọn rồi tính giá trị của phân thức thu gọn:

a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 + 5x^2 - 25x - 125}$ với $x = 2010$

b) $\frac{xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1}{xyz + xy + yz - zx - x + y - z - 1}$ với $x = 5001; y = 5002; z = 5003$

c) $\frac{-2x^2 - 40y + 16x + 5xy}{x^2 + 24y - 8x - 3xy}$ với $\frac{x}{y} = \frac{10}{3}$

Bài 7: Cho biểu thức $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Bài 8: Cho biểu thức $B = \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2(x + 1)}$. Chứng minh rằng biểu thức B không

âm với mọi giá trị của x .

Bài 9: Cho phân thức: $B = \frac{1 - x^4}{x^{10} - x^8 + 4x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 4}$. Chứng tỏ B luôn nhận giá trị âm với mọi $x \neq \pm 1$.

Bài 10: Tìm x biết:

a) $a^2x + ax + x = a^3 - 1$ với a là hằng số.

b) $a^2x + 3ax + 9 = a^2$ với a là hằng số, $a \neq 0$ và $a \neq -3$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho phân thức: $\frac{21a^2}{12ab}$. Nhân tử chung của tử và mẫu là:

A. $3a$

B. a^2

C. $3a^2$

D. ab

Câu 2: Phân thức: $-\frac{5x}{5 - 5x}$ rút gọn thành:

A. $\frac{x}{x - 1}$

B. $\frac{x}{1 - x}$

C. $\frac{1}{5}$

D. $\frac{-x}{x + 1}$

Câu 3: Phân thức: $\frac{2(x - 5)}{2x(5 - x)}$ rút gọn thành:

A. $-\frac{1}{x}$

B. $\frac{1}{x}$

C. $-x$

D. $\frac{x - 5}{x(5 - x)}$

Câu 4: Đẳng thức $\frac{x+1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1}$ A. Đúng. B. Sai

Câu 5: Đẳng thức $\frac{(x+1)(x-1)+(x+1)}{x+1} = x$. A. Đúng. B. Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để có khẳng định đúng.

A	B	
a) $\frac{a^2 - ab}{a^2 - b^2} =$	1) $\frac{a}{a+b}$	3) $-\frac{a}{a-b}$
b) $\frac{a^2 - ab}{(a-b)^2} =$	2) $\frac{a}{a-b}$	4) $\frac{a}{a-b}$
c) $\frac{a^2b}{ab^2 - a^2b} =$	a) b) c)	

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

a) $\frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x - y} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{3x + 6x^2}{4x^2 - 1} = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $\frac{18xy}{12yz} = \frac{3x}{2z}$; b) $\frac{-12x^2y}{-16xy^2} = \frac{3x}{4y}$; c) $\frac{-36x^3}{12y^3} = \frac{-3x^3}{y^3}$; d) $\frac{12x^3y}{15xy^4} = \frac{4x^2}{5y^3}$

$$\text{Bài 2: a) } \frac{35(x^2 - y^2)(x + y)^2}{77(y - x)^2(x + y)^3} = \frac{5 \cdot 7(x - y)(x + y)^3}{7 \cdot 11(y - x)^2(x + y)^3} = \frac{-5(y - x)}{11(y - x)^2} = \frac{-5}{11(y - x)}$$

$$\text{b) } \frac{4x^2y^2 + 1 - 4xy}{8x^3y^3 - 1 - 6xy(2xy - 1)} = \frac{(2xy - 1)^2}{(2xy - 1)(4x^2y^2 + 2xy + 1) - 6xy(2xy - 1)}$$

$$= \frac{(2xy - 1)^2}{(2xy - 1)(4x^2y^2 - 4xy + 1)} = \frac{1}{2xy - 1}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - xy - xz + yz}{x^2 + xy - xz - yz} = \frac{x(x - y) - z(x - y)}{x(x + y) - z(x + y)} = \frac{(x - z)(x - y)}{(x - z)(x + y)} = \frac{x - y}{x + y}$$

$$\text{d) } \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{(a + c)^2 - b^2} = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)(a - b + c)} = \frac{a + b - c}{a - b + c}$$

$$\text{Bài 3: a) } \frac{(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 25)}{x^2 + 7x + 10} = \frac{(x + 1)(x + 2)(x + 5)(x - 5)}{(x + 2)(x + 5)} = (x + 1)(x - 5)$$

$$\text{b) } \frac{x^6 - y^6}{x^4 - y^4 - x^3y + xy^3} = \frac{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}{(x - y)(x^3 + y^3)} = x^2 + xy + y^2$$

$$\text{c) } \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2(x - 3)^2 + 4x(3 - x)^2 + 4(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)(x + 2)}{(x - 3)^2(x^2 + 4x + 4)} = \frac{x + 1}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$\text{Bài 4: a) } \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a^2(a - 4) - (a - 4)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)} = \frac{(a - 4)(a - 1)(a + 1)}{(a - 2)(a^2 + 2a + 4 - 7a)}$$

$$= \frac{(a - 4)(a - 1)(a + 1)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)} = \frac{(a - 4)(a - 1)(a + 1)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \frac{a + 1}{a - 2} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{b) } \frac{x^2y^2 + 1 + (x^2 - y)(1 - y)}{x^2y^2 + 1 + (x^2 + y)(1 + y)} = \frac{x^2y^2 + 1 + x^2 - x^2y - y + y^2}{x^2y^2 + 1 + x^2 + x^2y + y + y^2}$$

$$= \frac{x^2(y^2 + 1) + (y^2 + 1) - y(x^2 + 1)}{x^2(y^2 + 1) + (y^2 + 1) + y(x^2 + 1)} = \frac{(y^2 + 1)(x^2 + 1) - y(x^2 + 1)}{(y^2 + 1)(x^2 + 1) + y(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)(y^2 - y + 1)}{(x^2 + 1)(y^2 + y + 1)} = \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Bài 5: a) } A = \frac{x + 2}{x + 3}. \text{ Thay } x = 3 \text{ ta được } A = \frac{5}{6}$$

$$\text{b) } B = \frac{x + y}{x - y}. \text{ Thay } x = 1; y = 5 \text{ ta được } B = -\frac{3}{2}$$

$$c) C = \frac{x^2 - 3x}{x+3}. \text{ Thay } x = 2 \text{ ta được } C = \frac{-2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Bài 6: a) } & \frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 + 5x^2 - 25x - 125} = \frac{x^2 + 10x + 25}{(x^3 - 5^3) + 5x(x-5)} \\ & = \frac{x^2 + 10x + 25}{(x-5)(x^2 + 5x + 25) + 5x(x-5)} = \frac{x^2 + 10x + 25}{(x-5)(x^2 + 10x + 25)} = \frac{1}{x-5} \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = 2010, \text{ ta được: } \frac{1}{2010-5} = \frac{1}{2005}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & \frac{xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1}{xyz + xy + yz - zx - x + y - z - 1} = \frac{xy(z-1) - z(y+x) + (x+y) + (z-1)}{xy(z+1) + z(y-x) + (y-x) - (z+1)} \\ & = \frac{(z-1)(xy+1) - (z-1)(x+y)}{(xy-1)(z+1) + (z+1)(y-x)} = \frac{(z-1)(xy+1-x-y)}{(z+1)(xy-1-x+y)} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x = 5001, y = 5002, z = 5003 \Rightarrow x = y - 1; z = y + 1$$

$$\frac{(z-1)(xy+1-x-y)}{(z+1)(xy-1-x+y)} = \frac{y(y-2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} = \frac{y-2}{y+2} = \frac{5000}{5004} = \frac{1250}{1251}$$

$$c) \frac{-2x^2 - 40y + 16x + 5xy}{x^2 + 24y - 8x - 3xy} = \frac{-2x(x-8) - 5y(8-x)}{x(x-8) - 3y(x-8)} = \frac{(x-8)(5y-2x)}{(x-8)(x-3y)} = \frac{5y-2x}{x-3y}$$

$$\text{Vì: } \frac{x}{y} = \frac{10}{3} \Rightarrow 5y = \frac{3x}{2}; 3y = \frac{9x}{10}. \text{ Vậy: } \frac{5y-2x}{x-3y} = \frac{\frac{3x}{2} - 2x}{x - \frac{9x}{10}} = \frac{-\frac{1}{2}x}{\frac{1}{10}x} = -5$$

$$\begin{aligned} \text{Bài 7: a) } P &= \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a^2(a-4) - (a-4)}{a^3 - 2a^2 - 5a^2 + 10a + 4a - 8} \\ P &= \frac{(a^2-1)(a-4)}{a^2(a-2) - 5a(a-2) + 4(a-2)} = \frac{(a+1)(a-1)(a-4)}{(a-1)(a-4)(a-2)} = \frac{a+1}{a-2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } P = 1 + \frac{3}{a-2} \quad (a \neq 2)$$

$$\text{Vậy, } P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{a-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a-2 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Leftrightarrow a \in \{-1; 1; 3; 5\}.$$

Bài 8:
$$B = \frac{x^3(x-1) - (x-1)}{x^2(x^2+x+1) + 2(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+2)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x^2+2}$$

$B = \frac{(x-1)^2}{x^2+2} \geq 0$. Vậy B không âm với mọi giá trị của x .

Bài 9:
$$B = \frac{1-x^4}{x^{10}-x^8+4x^6-4x^4+4x^2-4} = \frac{-(1-x^2)(1+x^2)}{(1-x^2)(x^8+4x^4+4)} = -\frac{(1+x^2)}{(x^4+2)^2} < 0$$
 với $x \neq \pm 1$.

Bài 10: a) $a^2x + ax + x = a^3 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1} = a - 1$

b) $x = \frac{a^2 - 9}{a(a + 3)} = \frac{a - 3}{a}$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

4. QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta có thể làm như sau:
 - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung (MTC)
 - Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức (bằng cách chia mẫu thức chung cho từng mẫu thức)
 - Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng

III. BÀI TẬP

Bài 1: Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a) $\frac{3}{x^2-3x}$ và $\frac{5}{2x-6}$ b) $\frac{1}{2x^2-4x+2}$ và $\frac{3}{5x^2-5x}$

Bài 2: Quy đồng mẫu thức các phân thức: $\frac{1}{3x-12}$; $\frac{2}{3x+12}$; $\frac{3}{16-x^2}$

Bài 3: Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a) $\frac{2}{36a^2b^2-1}$; $\frac{1}{(6ab+1)^2}$; $\frac{1}{(6ab-1)^2}$ b) $\frac{x}{x^3-27}$; $\frac{2x}{x^2-6x+9}$; $\frac{1}{x^2+3x+9}$

c) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$; $\frac{3x}{x^3+2x^2+x}$; $2x$ d) $\frac{2}{x^2+5x+6}$; $\frac{x}{x^2+7x+10}$

Bài 4: Quy đồng mẫu thức các phân thức trong mỗi trường hợp sau:

a) $\frac{x}{3}$; $\frac{x-1}{4}$; $\frac{x^2}{6}$ b) $\frac{1}{6x^2y}$ và $\frac{1}{4x^3y^2}$

c) $x-1$ và $\frac{1}{x+1}$ d) $\frac{1}{3x-3y}$ và $\frac{1}{x^2-2xy+y^2}$

e) $\frac{x}{x+3}$; $\frac{1}{3-x}$; $\frac{1}{x^2-9}$ f) $\frac{1}{x^2+xy}$; $\frac{1}{xy-y^2}$; $\frac{2}{y^2-x^2}$

Bài 5: Quy đồng mẫu thức các phân thức trong mỗi trường hợp sau:

a) $\frac{x-y}{2x^2-4xy+2y^2}$; $\frac{x+y}{2x^2+4xy+2y^2}$; $\frac{1}{y^2-x^2}$

b) $\frac{1}{x^2+8x+15}$ và $\frac{1}{x^2+6x+9}$

$$c) \frac{1}{(a-b)(b-c)}; \frac{1}{(c-b)(c-a)}; \frac{1}{(b-a)(a-c)}$$

Bài 6: Quy đồng mẫu thức các phân thức trong mỗi trường hợp sau: (Tự luyện)

$$a) \frac{10}{x+3}, \frac{5}{2x-6} \text{ và } \frac{1}{9-3x}$$

$$b) \frac{7x^2-2x+5}{x^3-1}, \frac{1-3x}{x^2+x+1} \text{ và } 3$$

$$c) \frac{5}{2x}, \frac{7}{x-2y} \text{ và } \frac{x-y}{8y^2-2x^2}$$

$$d) \frac{6x^2-5x+11}{x^3-1}, \frac{3x}{x^2+x+1} \text{ và } \frac{7}{x-1}$$

$$e) \frac{1}{x^3+1}; \frac{2}{x+1}; \frac{3}{x^2-x+1}$$

$$f) \frac{1}{x^3-1}; \frac{1}{x^2+x+1}; \frac{1}{1-x}$$

TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Mẫu thức chung của hai phân thức: $\frac{1}{x^2-xy}$ và $\frac{1}{x^2}$ là:

- A. $x^2(x-y)$ B. $x^2(x^2-xy)$ C. x^2-xy D. $x^2(x+y)$

Câu 2: Khi quy đồng mẫu thức hai phân thức: $\frac{2}{6x^3y^2}$ và $\frac{x-1}{9x^2y^4}$ nhân tử phụ đơn giản nhất của phân thức thứ nhất là:

- A. $3y^2$ B. $3y$ C. $6y^2$ D. $3xy^2$

Câu 3: Khi quy đồng mẫu thức hai phân thức: $\frac{x}{2x-6}$ và $\frac{4}{x^2-9}$ ta được kết quả là:

- A. $\frac{x(x+3)}{2(x^2-9)}$ và $\frac{8}{x^2-9}$; B. $\frac{x}{2(x^2-9)}$ và $\frac{4}{x^2-9}$;
 C. $\frac{x(x+3)}{2x-6}$ và $\frac{8}{x^2-9}$; D. $\frac{2x}{2(x^2-9)}$ và $\frac{4(x-3)}{x^2-9}$

Câu 4: Mẫu thức chung của hai phân thức: $\frac{3}{2x^2-xy}$ và $\frac{x}{y^2+2xy}$ là $xy(4x^2-y^2)$

- A. Đúng. B. Sai

Câu 5: Quy đồng mẫu thức hai phân thức: $\frac{0,5}{x^2+4x}$ và $\frac{3x}{2x+8}$ ta được kết quả là:

$$\frac{0,5}{x^2+4x} = \frac{1}{2x(x+4)} \text{ và } \frac{3x}{2x+8} = \frac{3x^2}{2x(x+4)}$$

A. Đúng.

B. Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để có khẳng định đúng.

A	B
a) $\frac{1}{x+3}$ và $\frac{x}{x^2-6x+9}$	1) Có MTC là $(x+3)(x-3)^2$
b) $\frac{2x}{x^2-9}$ và $\frac{x-1}{x+3}$	2) Có MTC là $(x-3)(x+3)$
c) $\frac{2x-1}{x-3}$ và $\frac{1}{x^2+3x+9}$	3) Có MTC là $(x-3)(x^2+3x+9)$
	4) Có MTC là $(x-3)(x^2-3x+9)$

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng ?Quy đồng mẫu thức hai phân thức: $\frac{3-x}{x^2-5x}$ và $\frac{5x}{2x-10}$

a) MTC :

b) $\frac{3-x}{x^2-5x} = \dots$

c) $\frac{5x}{2x-10} = \dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ**TỰ LUẬN****Bài 1:** a) Ta có: $x^2 - 3x = x(x-3)$ và $2x - 6 = 2(x-3)$ Chọn mẫu thức chung : $2x(x-3)$. Khi đó: $\frac{3}{x^2-3x} = \frac{3 \cdot 2}{x(x-3) \cdot 2} = \frac{6}{2x^2-6x}$

Và $\frac{5}{2x-6} = \frac{5 \cdot x}{2(x-3) \cdot x} = \frac{5x}{2x^2-6x}$

b) Ta có: $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$ và $5x^2 - 5x = 5x(x-1)$. Chọn mẫu thức chung: $10x(x-1)^2$

Khi đó: $\frac{1}{2x^2-4x+2} = \frac{5x}{10x(x-1)^2}$ và $\frac{3}{5x^2-5x} = \frac{6(x-1)}{10x(x-1)^2}$

Bài 2: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử được $\frac{1}{3(x-4)}$; $\frac{2}{3(x+4)}$; $\frac{-3}{(x+4)(x-4)}$

Mẫu thức chung: $3(x-4)(x+4)$

Các nhân tử phụ: $x+4; x-4; 3$

Kết quả: $\frac{x+4}{3(x-4)(x+4)}; \frac{2(x-4)}{3(x-4)(x+4)}; \frac{-9}{3(x-4)(x+4)}$

Bài 3:

$$\text{a) } \frac{2}{36a^2b^2 - 1} = \frac{2(36a^2b^2 - 1)}{(36a^2b^2 - 1)^2}; \quad \frac{1}{(6ab + 1)^2} = \frac{(6ab - 1)^2}{(6ab + 1)^2(6ab - 1)^2} = \frac{(6ab - 1)^2}{(36a^2b^2 - 1)^2};$$

$$\frac{1}{(6ab - 1)^2} = \frac{(6ab + 1)^2}{(6ab - 1)^2(6ab + 1)^2} = \frac{(6ab + 1)^2}{(36a^2b^2 - 1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x^3 - 27} = \frac{x}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x^2 + 3x + 9)};$$

$$\frac{2x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2x}{(x-3)^2} = \frac{2x(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)^2(x^2 + 3x + 9)};$$

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)^2(x^2 + 3x + 9)}$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^2}; \quad \frac{3x}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{3}{(x+1)^2}; \quad 2x = \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2};$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2}{(x+2)(x+3)} = \frac{2(x+5)}{(x+2)(x+3)(x+5)};$$

$$\frac{x}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x}{(x+2)(x+5)} = \frac{x(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+5)}$$

Bài 4: a) $\frac{4x}{12}; \frac{3(x-1)}{12}; \frac{2x^2}{12};$

b) $\frac{2xy}{12x^3y^2}$ và $\frac{3}{12x^3y^2};$

c) $\frac{x^2-1}{x+1}$ và $\frac{1}{x+1};$

d) $\frac{x-y}{3(x-y)^2}$ và $\frac{3}{3(x-y)^2};$

e) $\frac{x(x-3)}{x^2-9}; \frac{-(x+3)}{x^2-9}; \frac{1}{x^2-9};$

f) $\frac{y(x-y)}{xy(x^2-y^2)}; \frac{x(x+y)}{xy(x^2-y^2)}; \frac{-2xy}{xy(x^2-y^2)}.$

Bài 5: a) Rút gọn được $\frac{1}{2(x-y)}; \frac{1}{2(x+y)}; \frac{-1}{x^2-y^2}.$

Quy đồng mẫu thức được $\frac{x+y}{2(x^2-y^2)}$; $\frac{x-y}{2(x^2-y^2)}$; $\frac{-2}{2(x^2-y^2)}$

b) $\frac{x+3}{(x+3)^2(x+5)}$ và $\frac{x+5}{(x+3)^2(x+5)}$

c) $\frac{c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$; $\frac{b-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}$; $\frac{b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

TRẮC NGHIỆM.

5. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Muốn cộng hai phân thức có cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức. $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$

2. Quy tắc cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau.

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{2x+5}{3} + \frac{x-2}{3}$

b) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a}$

c) $\frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a}$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2}$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} + \frac{2x^2}{x^2-1}$

c) $\frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2}$

d) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x-1}{2x+2} + \frac{x^2}{1-x^2}$

e) $\frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x}$

f) $\frac{x^2+3x}{x^2+6x+9} + \frac{3}{x-3} + \frac{6x}{9-x^2}$

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{x-1}{2x} + \frac{2x+1}{3x} + \frac{1-5x}{6x}$

b) $\frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} + \frac{3}{y^2-x^2}$

c) $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$

Bài 4: Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x^2+2}{x^3-1}$ Với $x = 11$

b) $\frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{1-x^2}$ Với $x = -\frac{1}{3}$

Bài 5: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+3}$

$$\text{b) } \frac{2}{x^2 + 2x} + \frac{2}{x^2 + 6x + 8} + \frac{2}{x^2 + 10x + 24} + \frac{2}{x^2 + 14x + 48}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x^3}{x^4+y^4} + \frac{8x^7}{x^8+y^8}$$

Bài 6: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}$$

$$\text{b) } \left(\frac{2a+2b-c}{3} \right)^3 + \left(\frac{2b+2c-a}{3} \right)^2 + \left(\frac{2c+2a-b}{3} \right) = a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 7: Xác định các hệ số a, b, c để cho:

$$\text{a) } \frac{10x-4}{x^3-4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$$

$$\text{b) } \frac{x^3}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Bài 8: Cho các số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $\frac{5x}{9} + \frac{4x}{9} =$

A: $\frac{-x}{9}$

B: $\frac{x}{9}$

C: $-x$

D: x

Câu 2: $\frac{3x-1}{5x^2y} + \frac{7x+1}{5x^2y} =$

A: $\frac{1}{xy}$

B: $\frac{-1}{xy}$

C: $\frac{2}{xy}$

D: $\frac{2}{5y}$

Câu 3: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} =$

A: $\frac{-1}{x(x+1)}$

B: $\frac{2x+1}{x(x+1)}$

C: $\frac{-(2x+1)}{x(x+1)}$

D: $\frac{1}{x(x+1)}$

Câu 4: $\frac{4x+5}{2x-1} + \frac{5-9x}{2x-1} = \frac{-5x}{2x-1}$

A: Đúng

B: Sai

Câu 5: $\frac{11x}{2x-3} + \frac{x-18}{3-2x} = \frac{12x-18}{2x-3}$

A: Đúng

B: Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với 1 ý ở cột B để được kết quả đúng:

A	B	
1, $\frac{5}{5+x} + \frac{x}{5+x} =$	a) $\frac{-3}{x+1}$	c) 1
2, $\frac{x+16}{7} + \frac{5-x}{7} =$	b) $\frac{4}{x+5}$	d) 3
3, $\frac{x-5}{x+1} + \frac{2-x}{x+1} =$	1 - ...; 2 - ...; 3 - ...; 4 - ...	

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

a, $\frac{x^2+2}{1-5x} + \frac{2-x^2}{1-5x} = \dots\dots\dots$

b, $\frac{4x+1}{5-x} + \frac{4x+1}{x-5} = \dots\dots\dots$

Tự luyện:

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau.

a) $\frac{x-2y}{2x-y} + \frac{x+y}{2x-y}$

b) $\frac{2x+2}{7} + \frac{3x+5}{7} + \frac{2x}{7}$

c) $\frac{3x-y}{x+2y} + \frac{x+3y}{x+2y} + \frac{2y-2x}{x+2y}$

d) $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{5-x}{x+3}$

Bài 2: Thực hiện các phép tính sau.

a) $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2x-2} + \frac{4-x}{6x^2-6x}$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{-3}{x^3+1} + \frac{1-x}{x^2-x+1}$

c) $\frac{2x+2}{x^2-1} + \frac{2x-5}{2-x-x^2} + \frac{3x-6}{x^2-4}$

d) $\frac{1}{x-2y} + \frac{8y^2}{4xy^2-x^3} + \frac{1}{x+2y}$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $\frac{2x+5}{3} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x+5+x-2}{3} = \frac{3x-3}{3} = x-1$

b) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

c) $\frac{a}{a-1} + \frac{-1}{a-1} = \frac{a-1}{a-1} = 1$

Bài 2: a) $\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2} = \frac{x}{y(x-y)} + \frac{2x-y}{x(y-x)}$

$$= \frac{x}{y(x-y)} + \frac{y-2x}{x(x-y)} = \frac{x^2+y^2-2xy}{xy(x-y)} = \frac{(x-y)^2}{xy(x-y)} = \frac{x-y}{xy}.$$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{x-1-(x+1)+2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^2-2}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)}{x^2-1} = 2.$

c) $\frac{x+y}{x-y}.$

d) $\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{-x^2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2-2x^2}{2(x^2-1)} = \frac{2}{2(x^2-1)} = \frac{1}{x^2-1}.$

e) $\frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{-1}{x-1} = \frac{x^2+2+x(x-1)-(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

f) $\frac{x(x+3)}{(x+3)^2} + \frac{3}{x-3} + \frac{-6x}{x^2-9} = \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x-3} + \frac{-6x}{(x-3)(x+3)}$

$$= \frac{x^2-3x+3x+9-6x}{(x-3)(x+3)} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

Bài 3: a) $\frac{x-1}{2x} + \frac{2x+1}{3x} + \frac{1-5x}{6x} = \frac{3(x-1)+2(2x+1)+1-5x}{6x} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} + \frac{3}{y^2-x^2} = \frac{-(x+y)+2(y-x)+3}{y^2-x^2}$

$$= \frac{-x-y+2y-2x+3}{y^2-x^2} = \frac{-3x+y+3}{y^2-x^2}$$

c) $\frac{(c-a)+(a-b)+(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$

Bài 4:

a) $A = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x^2+2}{x^3-1} = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x-1+x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1}. \text{ Khi } x=11 \text{ ta tính được } A = \frac{1}{11-1} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x+2}{1-x^2} = \frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{-x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)(x+1) - x^2 - 2x}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x^3-x}. \text{ Với } x = -\frac{1}{3} \text{ tính được } B = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}} = \frac{27}{8} \end{aligned}$$

Bài 5: a) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+3}$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x}$$

b) $\frac{2}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+6x+8} + \frac{2}{x^2+10x+24} + \frac{2}{x^2+14x+48}$

$$= \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} + \frac{2}{(x+6)(x+8)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} = \frac{8}{x+8}$$

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3x^2-4x+1} + \frac{3}{18x^2-9x+1} + \frac{4}{60x^2-16x+1} + \frac{5}{150x^2-25x+1}$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)(3x-1)} + \frac{3}{(3x-1)(6x-1)} + \frac{4}{(6x-1)(10x-1)} + \frac{5}{(10x-1)(15x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{3x-1} + \frac{3}{3x-1} - \frac{6}{6x-1} + \frac{6}{6x-1} - \frac{10}{10x-1} + \frac{10}{10x-1} - \frac{15}{15x-1}$$

$$= \frac{2}{x-1} - \frac{15}{15x-1} = \frac{30x-2-15x+15}{(x-1)(15x-1)} = \frac{15x+13}{(x-1)(15x-1)}$$

d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

$$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$$

$$= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{16}{1-x^{16}} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

e) $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x^3}{x^4+y^4} + \frac{8x^7}{x^8+y^8}$

$$= \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3}{x^4 + y^4} + \frac{8x^7}{x^8 + y^8}$$

$$= \frac{4x^3}{x^4 - y^4} + \frac{4x^3}{x^4 + y^4} + \frac{8x^7}{x^8 + y^8}$$

Bài 6: a) $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} - \frac{a^2}{c+a} - \frac{b^2}{a+b} - \frac{c^2}{b+c}$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = a - b + b - c + c - a = 0$$

Vậy $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c}$

b) $VT = \left(\frac{2a+2b-c}{3}\right)^3 + \left(\frac{2b+2c-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2c+2a-b}{3}\right)$

$$= \frac{4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab - 4ac - 4bc}{9} + \frac{4b^2 + 4c^2 + a^2 + 8bc - 4ab - 4ac}{9}$$

$$+ \frac{4c^2 + 4a^2 + b^2 + 8ac - 4bc - 4ab}{9}$$

$$= \frac{9a^2 + 9b^2 + 9c^2}{9} = \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{9} = a^2 + b^2 + c^2 = VP$$

Bài 7: $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2} = \frac{(a+b+c)x^2 + (2c-2d)x - 4a}{x^3 - 4x}$

Đồng nhất tử với phân thức $\frac{10x-4}{x^3-4x}$ ta có

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2c-2b=10 \\ -4a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ c-b=5 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy $\frac{10x-4}{x^3-4x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$

b) $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + a-b-d}{x^4-1}$

Đồng nhất với phân thức $\frac{x^3}{x^4 - 1}$ ta có:
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + d = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a - b - d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy:
$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

Bài 8: Ta có: $a + b + c = 1 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1. \quad (1)$

Ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow \frac{bc + ac + ab}{abc} = 0 \Rightarrow bc + ac + ab = 0. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 1.$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

6. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Muốn trừ một phân thức cho một phân thức khác có cùng mẫu thức, ta trừ các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A - C}{B}$$

- Muốn trừ hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi trừ các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

- Đổi dấu: $\frac{A}{B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Tìm phân thức đối của các phân thức:

a) $\frac{2x-3}{5}$

b) $\frac{xy-y^2}{xy-x^2}$

c) $-\frac{x+2}{x-2}$

d) $-\frac{x^2+x}{-x+2}$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{x}{x-y} - \frac{1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x}$

b) $x-1 - \frac{x^2-4}{x+1}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3-x^2+x-1}$

d) $\frac{3x-1}{6x+2} - \frac{3x+1}{2-6x} - \frac{6x}{9x^2-1}$

e) $\frac{x}{x^2-2x} - \frac{x^2+4x}{x^3-4x} - \frac{2}{x^2+2x}$

f) $\frac{2x^2+1}{x^3+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2}$ với $x = \frac{1}{4}$

b) $B = \frac{3x-y}{x-5} - \frac{2x-3y}{2y+5}$ với $y-2x=5$

c) $C = a + \frac{2a+x}{2-x} - \frac{2a-x}{2+x} + \frac{4a}{x^2-4}$ với $x = \frac{a}{a+1}$

Bài 4: Tìm x (với a, b là hằng và $a \neq b \neq 0$)

$$\text{a) } x - \frac{3a + b}{b} = \frac{2a^2 - 2ab}{b^2 - ab} \qquad \text{b) } \frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = x$$

Bài 5: Chứng minh đẳng thức:

$$\text{a) } \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2} = 1$$

$$\text{b) } \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)} = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}$$

Bài 6: Tìm các hằng số a và b sao cho phân thức $\frac{x-6}{x^2-2x}$ viết được thành $\frac{a}{x} - \frac{b}{x-2}$.

Tự luyện:

$$\text{Bài 7: a) } \frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{2}$$

$$\text{b) } x-2 - \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x^2-4x} - \frac{3}{5x}$$

$$\text{d) } \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$$

$$\text{e) } \frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} + \frac{y^2}{x^2-xy}$$

$$\text{f) } \frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{x}{2-x} - 1$$

Bài 8: Thực hiện phép tính.

$$\text{a) } A = \frac{x+3}{2x-1} - \frac{x^2-3}{4x^2-4x+1} - \frac{2x^3-x(1-5x)-1}{8x^3-12x^2+6x-1}$$

$$\text{b) } B = \frac{4(x+3)^2}{(3x+5)^2-4x^2} - \frac{x^2-25}{9x^2-(2x+5)^2} - \frac{(2x+3)^2-x^2}{(4x+15)^2-x^2}$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $\frac{3x}{7} - \frac{4x}{7} =$

A: $\frac{-x}{7}$

B: $\frac{x}{7}$

C: x

D: $-x$

Câu 2: $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y} =$

A: $\frac{1}{xy}$

B: $\frac{-1}{xy}$

C: $\frac{-yz}{x^2}$

D: $\frac{-x^2}{yz}$

Câu 3: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} =$

A: $\frac{-1}{x(x+1)}$

B: $\frac{2x+1}{x(x+1)}$

C: $\frac{-(2x+1)}{x(x+1)}$

D: $\frac{1}{x(x+1)}$

Câu 4: $\frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5-9x}{2x-1} = \frac{13x}{2x-3}$:

A. Đúng

B.Sai

Câu 5: $\frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x} = \frac{12x-18}{2x-3}$

A.Đúng

B.Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với 1 ý ở cột B để được kết quả đúng:

A	B	
1) $-\frac{4}{5-x} =$	a) $\frac{-3}{x+1}$	c) 1
2) $\frac{x+2}{7} - \frac{x-5}{7}$	b) $\frac{4}{x-5}$	d) 3
3) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+2}{x+1}$	1); 2); 3); 4)	

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $-\frac{2x-3}{5} = \frac{3-2x}{5}$

b) $-\frac{xy-y^2}{xy-x^2} = \frac{y^2-xy}{xy-x^2}$

c) $\frac{x+2}{x-2}$

d) $\frac{x^2+x}{-x+2}$

Bài 2:

a) $\frac{x-1+1-y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1;$

b) $\frac{x^2-1-(x^2-4)}{x+1} = \frac{3}{x+1}.$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2+1-2x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^2+1}.$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{3x-1}{2(3x+1)} + \frac{3x+1}{2(3x-1)} - \frac{6x}{9x^2-1} &= \frac{(3x-1)^2 + (3x+1)^2 - 12x}{2(3x+1)(3x-1)} = \frac{18x^2 - 12x + 2}{2(3x+1)(3x-1)} \\ &= \frac{2(3x-1)^2}{2(3x+1)(3x-1)} = \frac{3x-1}{3x+1}. \end{aligned}$$

e) 0;

$$\text{f) } \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} \text{ với } x = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } B = \frac{3x-y}{x-5} - \frac{2x-3y}{2y+5} \text{ với } y-2x=5$$

$$\text{c) } C = a + \frac{2a+x}{2-x} - \frac{2a-x}{2+x} + \frac{4a}{x^2-4} \text{ với } x = \frac{a}{a+1}$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2x+1}{4x-2} + \frac{1-2x}{4x+2} - \frac{2}{1-4x^2} &= \frac{2x+1}{2(2x-1)} + \frac{1-2x}{2(2x+1)} + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{(2x+1)(2x+1) - (2x-1)(2x-1) + 4}{2(2x+1)(2x-1)} = \frac{8x+4}{2(2x+1)(2x-1)} = \frac{2(2x+1)}{2(2x+1)(2x-1)} = \frac{2}{2x-1} \end{aligned}$$

Với $x = \frac{1}{4}$ tính được $A = -4$

$$\text{b) } y-2x=5 \Leftrightarrow y=2x+5$$

$$\begin{aligned} \frac{3x-y}{x-5} - \frac{2x-3y}{2y+5} &= \frac{3x-y}{x-5} + \frac{3y-2x}{2y+5} = \frac{x-(y-2x)}{x-5} + \frac{2y+(y-2x)}{2y+5} \\ &= \frac{x-5}{x-5} + \frac{2y+5}{2y+5} = 1+1=2 \end{aligned}$$

$$\text{e) } \text{Với } x = \frac{a}{a+1} \Rightarrow a = x.(a+1)$$

$$a + \frac{2a+x}{2-x} - \frac{2a-x}{2+x} + \frac{4a}{x^2-4} = a + \frac{(2a+x)(2+x) - (2a-x)(2-x) - 4a}{(2-x)(2+x)}$$

$$a + \frac{4x+4ax-4a}{(2-x)(2+x)} = a + \frac{4x(1+a)-4a}{(2-x)(2+x)} = a + \frac{4x(1+a)-4x(1+a)}{(2-x)(2+x)} = a$$

Bài 4:

$$\text{a) } x - \frac{3a+b}{b} = \frac{2a^2-2ab}{b^2-ab} \Leftrightarrow x = \frac{2a^2-2ab}{b^2-ab} + \frac{3a+b}{b}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2a(a-b)}{b(b-a)} + \frac{(3a+b)}{b} \Leftrightarrow x = \frac{-2a+3a+b}{b} \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{b}$$

$$\text{b) } \frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = x \Leftrightarrow \frac{a^2(a-x) - b^2(b+x)}{ab} = \frac{abx}{ab}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-x) - b^2(b+x) = abx \quad (ab \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - a^2x - b^3 - b^2x = abx \Leftrightarrow a^2x + b^2x + abx = a^3 - b^3 \Leftrightarrow (a^2 + ab + b^2)x = a^3 - b^3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} \Leftrightarrow x = a - b$$

$$\text{Bài 5: a) } \frac{4x^2 - (x-3)^2}{9(x^2-1)} - \frac{x^2-9}{(2x+3)^2-x^2} + \frac{(2x-3)^2-x^2}{4x^2-(x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x-x+3)(2x+x-3)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3-x)(2x+3+x)} + \frac{(2x-3-x)(2x-3+x)}{(2x-x-3)(2x+x+3)}$$

$$= \frac{3(x+3)(x-1)}{9(x-1)(x+1)} - \frac{(x-3)(x+3)}{3(x+3)(x+1)} + \frac{3(x-3)(x-1)}{3(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{x+3}{3(x+1)} - \frac{x-3}{3(x+1)} + \frac{3(x-1)}{3(x+1)} = \frac{x+3-x+3+3x-3}{3(x+1)} = \frac{3x+3}{3x+3} = 1$$

$$\text{b) } \frac{y-z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z-x}{(y-z)(y-x)} + \frac{x-y}{(z-x)(z-y)}$$

$$= \frac{(x-z)-(x-y)}{(x-y)(x-z)} + \frac{(y-x)-(y-z)}{(y-z)(y-x)} + \frac{(z-y)-(z-x)}{(z-x)(z-y)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z} + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y} \\
&= \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} \\
&= \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x}
\end{aligned}$$

Bài 6: Ta có $\frac{a}{x} - \frac{b}{x-2} = \frac{(a-b)x-2a}{x(x-2)}$. Để phân thức này là phân thức $\frac{x-6}{x(x-2)}$ ta phải có

$a-b=1$ và $-2a=-6$.

Do đó $a=3$ và $b=2$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

7. PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• **Quy tắc:** Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau

III. BÀI TẬP

Bài 1: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{8x}{15y^3} \cdot \frac{4y^2}{x^2}; \quad \text{b) } \frac{24y^5}{7x^2} \cdot \left(-\frac{21x}{12y^3}\right); \quad \text{c) } \frac{9x^2}{x+3} \cdot \frac{9-x^2}{6x^3};$$

Bài 2: Thực hiện các phép tính

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2 - 9y^2}{x^2y} \cdot \frac{3xy}{xz - 3yz} & \text{b) } \frac{x+y}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x-2y}{x^2 + 2xy + y^2} \\ \text{c) } \frac{9x - 9y}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \frac{4x^3 + 4y^3}{3x - 3y} & \text{d) } \left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right) \cdot \left(x - \frac{x^2 + y^2}{x+y}\right) \\ \text{e) } \frac{x^2 - 25}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{5x-1}{x^2 + 5x} + \frac{5x+1}{x^2 - 5x}\right) & \text{f) } \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 12} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 + 6x + 5} \end{array}$$

Bài 3: Thực hiện phép tính:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{ab + a^2}{b^2 - 5b + 5a - a^2} \cdot \frac{a^2 - 10a + 25 - b^2}{a^2 - b^2} & \text{b) } \frac{x^2 + xy}{5x^2 + 5xy + 5y^2} \cdot \frac{3x^3 - 3y^3}{xy + y^2} \\ \text{c) } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 4} & \text{d) } \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) \cdot \frac{y-x}{x^2 + y^2} \\ \text{e) } \frac{x^5 + x^3 + 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 4x}{x^5 + x^3 + 1} & \\ \text{f) } \frac{x-5}{x^2 - 4x + 3} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 10x + 25} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x} & \\ \text{g) } \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{4x-3}{x+1945} & \end{array}$$

Bài 4: Thực hiện phép tính:

$$\text{a) } \frac{2x+2y}{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \frac{ax - ay + bx - by}{2x^2 - 2y^2}$$

b) $\frac{a + b - c}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc}{a^2 - b^2}$

c) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 2}$

d) $\frac{x^8 - 1}{x + 1} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}$

e) $\frac{x - y}{xy + y^2} - \frac{3x + y}{x^2 - xy} \cdot \frac{y - x}{x + y}$

Bài 5: Chứng minh rằng tổng các phân thức sau bằng tích của chúng:

$$\frac{a - b}{1 + ab}; \frac{b - c}{1 + bc}; \frac{c - a}{1 + ca}.$$

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , giá trị của biểu thức sau là một số

tự nhiên: $\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2}$

Tự luyện:

Bài 7: Thực hiện phép tính

a) $\frac{10x^3}{11y^2} \cdot \frac{121y^5}{25x}$;

b) $\frac{24y^5}{7x^2} \cdot \left(-\frac{21x}{12y^3}\right)$;

c) $\left(-\frac{18y^3}{25x^4}\right) \cdot \left(-\frac{15x^2}{9y^3}\right)$;

d) $\frac{4x + 8}{(x - 10)^3} \cdot \frac{2x - 20}{(x + 2)^2}$;

Bài 8: Thực hiện phép tính

a) $\frac{x + 3}{x^2 - 4} \cdot \frac{8 - 12x + 6x^2 - x^3}{9x + 27}$;

b) $\frac{6x - 3}{5x^2 + x} \cdot \frac{25x^2 + 10x + 1}{1 - 8x^3}$;

c) $\frac{3x^2 - x}{x^2 - 1} \cdot \frac{1 - x^4}{(1 - 3x)^3}$.

d) $\frac{x - 2}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

e) $\frac{x + 1}{x^2 - 2x - 8} \cdot \frac{4 - x}{x^2 + x}$;

f) $\frac{x + 2}{4x + 24} \cdot \frac{x^2 - 36}{x^2 + x - 2}$.

g) $\frac{x^3}{x + 1975} \cdot \frac{2x + 1954}{x + 1} + \frac{x^3}{x + 1975} \cdot \frac{21 - x}{x + 1}$;

b) $\frac{19x + 8}{x - 7} \cdot \frac{5x - 9}{x + 1945} - \frac{19x + 8}{x - 7} \cdot \frac{4x - 2}{x + 1945}$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu1: $\frac{3x^2}{5y^2} \cdot \frac{2y}{6x^2} =$

- A. $\frac{5y}{2x}$ B. $\frac{1}{5y}$ C. $\frac{6x^3}{30y^3}$ D. $\frac{6xy^3}{30y^2x^3}$

Câu2: $--\left(\frac{x^2y^2}{z}\right) \cdot \left(\frac{z}{x^3y}\right) =$

- A. $\frac{yz}{x^2}$ B. $\frac{x^2}{yz}$ C. $\frac{-yz}{x^2}$ D. $\frac{1}{x}$

Câu3: $\frac{x^3y}{3z} \cdot 9zy^3 =$

- A. $\frac{9x^3}{27y^2z}$ B. $\frac{3x^2}{4y^2z}$ C. $\frac{4x^2}{3y^2z}$ D. $3x^3y^4$

Câu 4: $-\frac{x^3y^2}{z^4} \cdot \frac{z^4}{x^2y^2} = -x$

- A. Đúng B. Sai

Câu5: $-\frac{3y^2}{2x} \cdot \left(-\frac{2x}{3y^2}\right) = -1$

- A. Đúng B. Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với 1 ý ở cột B để được kết quả đúng.

A	B	
1) $\frac{x^3+5}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x^3+5} =$	a) $\frac{4}{5(x+4)}$	3) $\frac{x^3-9}{7x}$
2) $\frac{4x+12}{(x+4)^2} \cdot \frac{x+4}{5(x+3)}$	b) 1	4) $\frac{x-9}{7}$
3) $\frac{x^2}{7x} \cdot \frac{x-9}{x} =$	1) - 2) - 3) - 4) -	

Câu7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

a, $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \dots\dots\dots$ b, $\frac{2x+1}{x-2} \cdot \left(-\frac{x-2}{2x+1}\right) = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $\frac{32}{15xy}$;

b) $-\frac{6y^2}{x}$;

c) $\frac{9-3x}{2x}$;

Bài 2:

a) $\frac{x^2 - 9y^2}{x^2y} \cdot \frac{3xy}{xz - 3yz} = \frac{(x - 3y)(x + 3y) \cdot 3xy}{x^2y \cdot z(x - 3y)} = \frac{3 \cdot (x + 3y)}{xz}$

b) $\frac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x + y) \cdot 2 \cdot (x - y)}{(x - y)^2 \cdot (x + y)^2} = \frac{2}{x^2 - y^2}$

c) $\frac{9x - 9y}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \frac{4x^3 + 4y^3}{3x - 3y} = \frac{9(x - y) \cdot 4(x^3 + y^3)}{(x + y)^2 \cdot 3 \cdot (x - y)} = \frac{12(x^2 - xy + y^2)}{x + y}$

d) $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x - y}\right) \cdot \left(x - \frac{x^2 + y^2}{x + y}\right) = \frac{x + y}{y(x - y)} \cdot \frac{xy + y^2}{x + y} = \frac{y(x + y)}{y(x - y)} = \frac{x + y}{x - y}$

e) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{5x - 1}{x^2 + 5x} + \frac{5x + 1}{x^2 - 5x}\right) = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(5x - 1)(x - 5) + (5x + 1)(x + 5)}{x(x + 5)(x - 5)} = \frac{10x^2 + 10}{x(x^2 + 1)} = \frac{10}{x}$

Bài 3:

a) $\frac{ab + a^2}{b^2 - 5b + 5a - a^2} \cdot \frac{a^2 - 10a + 25 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a(a + b)}{(b - a)(b + a) - 5(b - a)} \cdot \frac{(a - 5)^2 - b^2}{(a - b)(a + b)}$
 $= \frac{a(a - 5 - b)(a - 5 + b)}{(b - a)(b + a - 5)(a - b)} = -\frac{a(a - b - 5)}{(a - b)^2}$

b) $\frac{x^2 + xy}{5x^2 + 5xy + 5y^2} \cdot \frac{3x^3 - 3y^3}{xy + y^2} = \frac{x(x + y)}{5(x^2 + xy + y^2)} \cdot \frac{3(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{y(x + y)} = \frac{3x(x - y)}{5y}$

c) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 3)(x + 4)} \cdot \frac{x(x + 3)}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 3)}{(x + 2)(x + 4)}$

d) $\left(\frac{x + y}{x} - \frac{2x}{x - y}\right) \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2x^2}{x(x - y)} \cdot \frac{y - x}{x^2 + y^2} = \frac{-(x^2 + y^2)}{x} \cdot \frac{-1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x}$

e) $\frac{x^5 + x^3 + 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 4x}{x^5 + x^3 + 1} = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot \frac{x^2 - 4x}{1} = \frac{x(x - 4)}{(x - 4)(x + 3)} = \frac{x}{x + 3}$

$$f) \frac{x-5}{x^2-4x+3} \cdot \frac{x^2-3x}{x^2-10x+25} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x} = \frac{x-5}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{x(x-3)}{(x-5)^2} \cdot \frac{(x-1)(x-5)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$g) \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{5x-8}{x+1945} - \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{4x-3}{x+1945} = \frac{2x+9}{x-5} \cdot \left(\frac{5x-8}{x+1945} - \frac{4x-3}{x+1945} \right)$$

$$= \frac{2x+9}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x+1945} = \frac{2x+9}{x+1945}$$

Bài 4:

a) $\frac{1}{a+b}$.

b) $\frac{a+b-c}{(a+b+c)(a+b-c)} \cdot \frac{(a+b)(a+b+c)}{(a+b)(a-c)} = \frac{1}{a-b}$.

c) $\frac{x-1}{2}$;

d) $x-1$.

e) $\frac{x-y}{y(x+y)} + \frac{3x+y}{x(x-y)} \cdot \frac{x-y}{x+y} = \frac{x(x-y)+y(3x+y)}{xy(x+y)} = \frac{(x+y)^2}{xy(x+y)} = \frac{x+y}{xy}$.

Bài 5: Ta cần chứng minh $\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ac}$ (1)

Dùng phương pháp biến đổi tương đương ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \left(1 - \frac{b-c}{1+bc} \cdot \frac{c-a}{1+ac} \right) + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{1+abc^2+ab+c^2}{(1+bc)(1+ac)} + \frac{b-ac^2-a+bc^2}{(1+bc)(1+ac)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{1+ab} \cdot \frac{(1+ab)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ac)} + \frac{(1+c^2)(b-a)}{(1+bc)(1+ac)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ac)} - \frac{(a-b)(1+c^2)}{(1+bc)(1+ac)} = 0. \text{ Ta được điều phải chứng minh}$$

Bài 6: $\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^3+n^2}{n^2+3n+2} = \frac{n(n+1)}{2}$, là một số tự nhiên. (Tích 2 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2)

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

8. PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hai phân thức được gọi là nghịch đảo nếu tích của chúng bằng 1.

Phân thức nghịch đảo của $\frac{A}{B}$ là $\frac{B}{A}$.

- Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0.$$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } (5 - 5x) : \frac{10 - 10x^2}{1 + x}$$

$$\text{b) } \frac{x^3y + xy^3}{x^4y} : (x^2 + y^2)$$

$$\text{c) } \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y}$$

$$\text{d) } \frac{x - y}{x^2 + xy + x + y} : \frac{y^2 - xy + y - x}{x + y}$$

$$\text{e) } \frac{2x^2 - 2y^2}{(x - y)^2} : \frac{x + y}{y - x} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x + 2y}$$

$$\text{f) } \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^3 - 6x^2} : \frac{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}{4x^3 - 9x}$$

$$\text{g) } \frac{(2x - 1)(4x^2 - 12x + 9)}{6(2x - 2)^3 + 6} : \frac{4x^2 - 8x + 3}{16x^2 - 40x + 28}$$

$$\text{h) } \frac{9x^4 - 81}{8x^3 - 8} : \frac{3x^2 - 6\sqrt{3}x + 9}{4x^2 - 8x + 4} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 3x - x^2 - 3}$$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } \frac{x^2 - y^2}{6x^2y} : \frac{x + y}{3xy}$$

$$\text{b) } \frac{5x - 15}{4x + 4} : \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{c) } \frac{6x + 48}{7x - 7} : \frac{x^2 - 64}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{d) } \frac{4x - 24}{5x + 5} : \frac{x^2 - 36}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{e) } \frac{3x + 21}{5x + 5} : \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x + 1}$$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 4}{2x} : (2 - x)$$

$$\text{b) } \frac{5x^2 - 20y^2}{3x + 6y} : \frac{5x - 10y}{9x}$$

c) $\frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 6x + 9} : \frac{2x - 6}{x + 3}$

d) $\frac{x - 2y}{3x + 6y} : \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 4xy + 4y^2}$

e) $\frac{x^3 - 8}{x^3 + 8} : \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 2x + 4}$

f) $\frac{2x - 2y}{x + y} : \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x}$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x - 10} : \frac{x - 5}{4x + 8}$

b) $\frac{1}{x + 2} : \frac{x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

Bài 5: Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức

a) $(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) : \frac{x + y - z}{x + y + z}$ với $x = 8,6; y = 2; z = 1,4$

b) $\left(\frac{1}{2x - y} - \frac{2}{2x + y} + \frac{3y}{y^2 - 4x^2} \right) : \left(\frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2} + 1 \right)$ với $x = \frac{1}{2000}; y = 2000$

Bài 7: Tìm x , biết: (với a, b là hằng số)

a) $\frac{a^3 - b^3}{a^4} \cdot x = \frac{b^2 - a^2}{a^2} (a \neq 0, a \neq b)$

b) $\frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - ab} \cdot x = \frac{a - b}{a^3 + b^3} (a \neq \pm b)$

c) $\frac{a^4 - b^4}{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} : x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (a \neq 0)$

Tự luyện**Bài 8:** Thực hiện phép tính:

a) $\frac{4 - 4x}{(1 + x)^2} : \frac{5x^2 - 5}{x + 1}$

b) $\frac{a^3 + a^2b}{b^2 - a^2} : \frac{a + b}{3a - 3b}$

c) $\frac{4x^3}{2y - 2x} : \frac{x^3 + x^2y}{5x^2 - 5y^2}$

d) $\frac{3 - 12x^2}{x^2 + 9} : \frac{12x - 6}{x^2}$

e) $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^2} : \frac{2x^2 + 4x + 2}{4x^2 - 8x + 4}$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $\frac{4x^2}{5y^2} : \frac{2x}{5y} =$

- A. $\frac{5y}{2x}$ B. $\frac{2x}{5y}$ C. $\frac{8x^3}{25y^3}$ D. $\frac{25y^3}{8x^3}$

Câu 2: $\left(-\frac{x^2y^2}{z}\right) : \left(-\frac{x^3y}{z^2}\right) =$

- A. $\frac{yz}{x^2}$ B. $\frac{x^2}{yz}$ C. $\frac{-yz}{x^2}$ D. $-\frac{x^2}{yz}$

Câu 3: $\frac{16x^3y}{3z} : 4x^2y^3 =$

- A. $\frac{x^2}{y^2z}$ B. $\frac{3x^2}{4y^2z}$ C. $\frac{4x^2}{3y^2z}$ D. một đáp án khác

Câu 4: $-\frac{18x^2y^2}{5z^4} : \frac{6xy^2}{10z^2} = -\frac{6x}{z^2}$

- A. Đúng B. Sai

Câu 5: $-\frac{3y^2}{2x} : \left(-\frac{2x}{3y^2}\right) = -1$

- A. Đúng B. Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng.

A	B	
1) $\frac{x^3+5}{x-7} : \frac{x^3+5}{x-7}$	a) $\frac{4}{x+4}$	c) $\frac{1}{x-2}$
2) $\frac{4x+12}{(x+4)^2} : \frac{x+3}{x+4}$	b) 1	d) $\frac{1}{x+2}$
3) $\frac{x+2}{7} : \frac{x^2-4}{7}$	1) -; 2) - 3) - 4) -.....	

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

a, $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \dots\dots\dots$ b, $\frac{2x+1}{x-2} : \left(-\frac{2x+1}{x-2}\right) = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

$$\text{Bài 1: a) } (5 - 5x) : \frac{10 - 10x^2}{1 + x} = 5(1 - x) \cdot \frac{10 \cdot (1 - x)(1 + x)}{1 + x} = 50 \cdot (1 - x)^2$$

$$\text{b) } \frac{x^3y + xy^3}{x^4y} : (x^2 + y^2) = \frac{xy(x^2 + y^2)}{x^4y} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{c) } \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y} = \frac{x(x^3 - y^3)}{y(2x + y)} \cdot \frac{2x + y}{x(x^2 + xy + y^2)} = \frac{x - y}{y}$$

$$\text{d) } \frac{x - y}{x^2 + xy + x + y} : \frac{y^2 - xy + y - x}{x + y} = \frac{x - y}{(x + 1)(x + y)} \cdot \frac{x + y}{(y - x)(y + 1)} = -\frac{1}{(x + 1)(y + 1)}$$

$$\text{e) } \frac{2x^2 - 2y^2}{(x - y)^2} : \frac{x + y}{y - x} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x + 2y} = \frac{2(x - y)(x + y)}{(x - y)^2} \cdot \frac{-(x - y)}{x + y} \cdot \frac{(x + y)^2}{2(x + y)} = -x - y$$

$$\text{f) } \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^3 - 6x^2} : \frac{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}{4x^3 - 9x} = \frac{(2x + 1)^2}{2x^2(2x - 3)} \cdot \frac{x(2x - 3)(2x + 3)}{(2x + 1)^3} = \frac{2x + 3}{2x(2x + 1)}$$

$$\text{g) } \frac{(2x - 1)(4x^2 - 12x + 9)}{6(2x - 2)^3 + 6} : \frac{4x^2 - 8x + 3}{16x^2 - 40x + 28} = \frac{(2x - 1)(2x - 3)^2}{6[(2x - 2)^3 + 1]} \cdot \frac{4(4x^2 + 10x + 7)}{(2x - 3)(2x - 1)}$$

$$= \frac{(2x - 3) \cdot 2 \cdot (4x^2 + 10x + 7)}{3(2x - 1)[(2x - 2)^2 - 2x + 2 + 1]} = \frac{2(2x - 3)(4x^2 + 10x + 7)}{3(2x - 1)(4x^2 - 10x + 7)} = \frac{4x - 6}{6x - 3}$$

$$\text{h) } \frac{9x^4 - 81}{8x^3 - 8} : \frac{3x^2 - 6\sqrt{3}x + 9}{4x^2 - 8x + 4} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 3x - x^2 - 3}$$

$$= \frac{9(x^2 - 3)(x^2 + 3)}{8(x^3 - 1)} \cdot \frac{4(x - 1)^2}{3(x - \sqrt{3})^2} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + 3)} = \frac{3 \cdot (x + \sqrt{3})}{2(x - \sqrt{3})}$$

$$\text{Bài 2: a) } \frac{(x - y)}{2x}$$

$$\text{b) } \frac{5(x + 1)}{4(x + 3)}$$

$$\text{c) } \frac{6(x - 1)}{7(x - 8)}$$

$$\text{d) } \frac{4(x + 1)}{5(x + 6)}$$

$$\text{e) } \frac{3(x + 1)}{5(x - 7)}$$

Bài 3: a) $-\frac{x+2}{2x}$;

b) $3x$;

c) $\frac{x-3}{x+3}$.

d) $\frac{1}{3}$;

e) $\frac{x-2}{x+2}$;

g) $2y$.

Bài 4: a) $\frac{(x-5)^2}{(x-5)(x+2)} \cdot \frac{4(x+2)}{x-5} = 4$;

b) $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-1)^2}{x-1} = x-1$.

Bài 5:

a)

$$(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) : \frac{x+y-z}{x+y+z} = (x^2 - (y-z)^2) \cdot \frac{x+y+z}{x+y-z} = (x-y+z)(x+y+z) = (x+z)^2 - y^2$$

Thay $x = 8,6$; $y = 2$; $z = 1,4$ ta được: $10^2 - 2^2 = 96$

b) $\left(\frac{1}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} + \frac{3y}{y^2-4x^2} \right) : \left(\frac{4x^2+y^2}{4x^2-y^2} + 1 \right) = \left(\frac{2x+y-2x+y-3y}{(2x+y)(2x-y)} \right) : \frac{8x^2}{4x^2-y^2} = \frac{-y}{8x^2}$

Thay $x = \frac{1}{2000}$; $y = 2000$ ta được: $\frac{-2000}{8 \cdot \frac{1}{2000^2}} = 1000000000$

Bài 7: a) $\frac{a^3-b^3}{a^4} \cdot x = \frac{b^2-a^2}{a^2} (a \neq 0, a \neq b)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b^2-a^2}{a^2} : \frac{a^3-b^3}{a^4} = \frac{(b-a)(b+a)}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = -\frac{a^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}$$

b) $\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2-ab} \cdot x = \frac{a-b}{a^3+b^3} (a \neq \pm b)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a-b}{a^3+b^3} : \frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2-ab} = \frac{a-b}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{(a-b)^2} = \frac{1}{a^2-b^2}$$

c) $\frac{a^4-b^4}{a^4+2a^2b^2+b^4} : x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} (a \neq 0)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^4-b^4}{a^4+2a^2b^2+b^4} : \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = 1$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

9. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ.

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Biểu thức hữu tỉ là phân thức hoặc một dãy các phép toán cộng, trừ, nhân, chia các phân thức.
- Điều kiện để giá trị của một phân thức được xác định là điều kiện của biến để giá trị tương ứng của mẫu thức khác 0.
- Thứ tự thực hiện phép tính trong biểu thức.

a) Trường hợp biểu thức không có dấu ngoặc, thứ tự thực hiện là:

Lũy thừa \longrightarrow Nhân, chia \longrightarrow Cộng, trừ

b) Trường hợp biểu thức có dấu ngoặc, thứ tự thực hiện là:

$() \rightarrow [] \rightarrow \{ \}$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho phân thức $M = \left[\frac{(x-1)^2}{3x + (x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$

a) Tìm điều kiện để giá trị của biểu thức xác định.

b) Rút gọn biểu thức M .

Bài 2: Rút gọn biểu thức:

a) $A = \left(\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2} \right) : \frac{x^2y-xy^2}{x^2-2xy+y^2}$

b) $B = \left(\frac{x+y}{2x-2y} - \frac{x-y}{2x+2y} - \frac{2y^2}{y^2-x^2} \right) : \frac{2y}{x-y}$

c) $C = \left(\frac{x^3+y^3}{x+y} - xy \right) : (x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y}$

d) $D = \left(\frac{x}{x-1} - \frac{4x}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{x^3-1} \right) \cdot \left(x + \frac{2x+1}{x-1} \right)$

Bài 3: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x^2+2x+1} - \frac{x-2}{x^2-1} \right) : \frac{2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

a) Rút gọn biểu thức A và tìm điều kiện của x để giá trị của A được xác định.

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -3; x = \frac{1}{4}; x = -\frac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của A bằng 3.

d) Tìm giá trị của x để giá trị của A bằng $\frac{2}{3}$.

Bài 4: Cho biểu thức $A = \left(x^2 + \frac{4x^2}{x^2 - 4} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x-4} + \frac{2-3x}{x^3-4x} \cdot \frac{x^2-4}{x-2} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A , biết $|2x-1|=3$.

Bài 5: Tìm giá trị của x để mỗi biểu thức sau là số nguyên:

a) $M = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$

b) $N = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2}$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5}$

Bài 7: . Tìm giá trị lớn nhất của $B = \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^2 + 3x + 3}$

Bài 8: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{3}{1-4x^2} - \frac{2}{2x+1} \right) : \frac{x^2}{2x^2+x}$

a) Rút gọn biểu thức A và tìm điều kiện của x để giá trị của A được xác định.

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -2$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của A bằng 4.

d) Tìm giá trị của x để giá trị của A bằng 1.

Bài 9: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{2x-4} - \frac{x-2}{2x+4} - \frac{8}{4-x^2} \right) : \frac{4}{x-2} \cdot (x^2 - 2x + 3)$

a) Rút gọn biểu thức A và tìm điều kiện của x để giá trị của A được xác định.

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -2, x = -\frac{1}{2}$.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của A bằng 3.

d) Tìm giá trị của x để A có giá trị nhỏ nhất.

Bài 10: Tìm số nguyên x để giá trị của phân thức sau là số nguyên:

$$\text{a) } A = \frac{x^4 - x^2 + 2x - 1}{x^3 + 1} \qquad \text{b) } B = \frac{15x + 8}{7x + 9}$$

Bài 11: a) Tìm x để phân thức $A = \frac{8}{x^2 - 4x + 12}$ đạt giá trị lớn nhất;

b) Tìm x để phân thức $B = -\frac{5}{x^2 + 2x + 11}$ đạt giá trị lớn nhất.

Tự luyện

Bài 12: Rút gọn biểu thức sau:

$$\text{a) } \left(\frac{x-y}{z-y} - \frac{y+z}{x+y} \right) : \left(\frac{x+y}{z-y} + \frac{y-z}{x+y} \right) \qquad \text{b) } \frac{x+2}{2x-4} + \frac{2-3x}{x^3-4x} \cdot \frac{x^2-4}{x-2} - \frac{x-2}{2x}$$

$$\text{c) } \left(\frac{4x^2+2x}{1-4x^2} - \frac{4x^2-2x}{1+4x^2} \right) : \left(\frac{1+2x}{1-2x} - \frac{1-2x}{1+2x} \right) \qquad \text{d) } \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) : \left[\frac{(x+y)^2}{xy} - 2 - \frac{2y}{x} \right]$$

Bài 13: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x, y

$$\text{a) } \left[\frac{2(x+1)(y+1)}{(x+1)^2 - (y+1)^2} + \frac{x-y}{2x+2y+4} \right] \cdot \frac{2x+2}{x+y+2} + \frac{y+1}{y-x}$$

$$\text{b) } \left[2(x+y)+1 - \frac{1}{1-2x-2y} \right] : \left[2x+2y - \frac{4x^2+8xy+4y^2}{2x+2y-1} \right] + 2(x+y)$$

Bài 14: Cho $A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \frac{2x}{5x-5}$

a) Tìm điều kiện của biến để giá trị của A xác định

b) Rút gọn A

c) Tìm giá trị của A với $x = -3, x = 1$

d) Với giá trị nào của x thì $A = 2, A = 10$

Bài 15: Cho biểu thức: $B = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 4x}$

a) Tìm điều kiện của biến để giá trị của B xác định

b) Rút gọn B

c) Có giá trị nào của x để giá trị của B bằng 0.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1 : Điều kiện xác định của phân thức : $\frac{x-4}{2x+6}$ là ?

- A. $x = -3$
- B. $x \neq -3$
- C. $x = -6$
- D. $x \neq -6$

Câu 2 : Giá trị của phân thức $\frac{x-5}{2x(x-3)}$ tại $x = 4$ là ?

- A. $-\frac{9}{8}$
- B. $\frac{9}{8}$
- C. $-\frac{1}{8}$
- D. $\frac{1}{8}$

Câu 3: $\frac{2 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{2}{x}} =$

- A. $\frac{2x+4}{2x-4}$
- B. $\frac{x+1}{x-1}$
- C. $\frac{1}{x}$
- D. $\frac{x+1}{x}$

Câu 4: $\frac{x-1}{x-5} = 5$ khi $x = 6$ A.Đúng B.Sai

Câu 5: Phân thức $\frac{4}{5x-10}$ có tập xác định là $x \neq 2$ A.Đúng B.Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng.

A	B	
a, $\frac{1}{x}$ có tập xác định là	1) $x = 1$	3) $x \neq 0; x \neq -1$
b, $\frac{2}{x(x+1)}$ có tập xác định là	2) $x = -1$	4) $x \neq 0$
c, $x + 1 = 0$ thì	a); b); c); d)	

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng

- a) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = \dots\dots\dots$
- b) $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

a) Điều kiện để giá trị của biểu thức xác định

$$\begin{cases} 3x + (x-1)^2 \neq 0 \\ x^3 - 1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x^2 + x \neq 0 \\ x^3 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 \neq 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x(x+1) \neq 0 \\ x(x^2 + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \text{ vì } x^2 + x + 1 > 0 \text{ và } x^2 + 1 > 0 \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

b) $M = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Bài 2: a) $A = \left[\frac{x}{y(x-y)} - \frac{2x-y}{x(x-y)} \right] \cdot \frac{xy(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{xy(x-y)}{(x-y)^2} = 1.$

b) $B = 1 ;$

c) $C = 1.$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \frac{x(x^2 + x + 1) - 4x(x-1) - (2x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{x^2 - x + 2x + 1}{x-1} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = x - 1. \end{aligned}$$

Bài 3: Điều kiện: $x \neq 0, x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}.$

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\frac{x+2}{(x+1)^2} - \frac{x-2}{(x+1)(x-1)} \right] \cdot \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{x(2x+1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x^2-1)}{x(2x+1)} = \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + x + 2}{x(2x+1)} = \frac{2}{2x+1} \end{aligned}$$

b) Tại $x = -3$ thì $A = -\frac{2}{5}$

Tại $x = \frac{1}{4}$ thì $A = \frac{4}{3}$

Tại $x = -\frac{1}{2}$ thì giá trị của A không xác định.

c) Giá trị của A bằng 3 khi $\frac{2}{2x+1} = 3$ và x thỏa mãn điều kiện (1)

Giải $\frac{2}{2x+1} = 3$ ta được $2x+1 = \frac{2}{3}$ hay $x = -\frac{1}{6}$, thỏa mãn (1)

Vậy tại $x = -\frac{1}{6}$ thì giá trị của A bằng 3.

d) Giá trị của A bằng $\frac{2}{3}$ khi $\frac{2}{2x+1} = \frac{2}{3}$ và x thỏa mãn điều kiện (1)

Giải $\frac{2}{2x+1} = \frac{2}{3}$ ta được $2x+1 = 3$ hay $x = 1$, không thỏa mãn (1)

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị của A bằng $\frac{2}{3}$.

Bài 4: a) $A = \frac{x^4}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{2x} = \frac{x^3}{2(x+2)}$.

Điều kiện : $x \neq 0; x \neq 2; x \neq -2$.

b) Xét $2x-1=3$ được $x=2$, loại.

Xét $2x-1=-3$ được $x=-1$, thỏa mãn. Khi đó giá trị của A bằng $-\frac{1}{2}$.

Bài 5:

a) $M = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x-3} = \frac{(2x^3 - 6x^2) + (x-3) - 5}{x-3} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x-3}$

$$M \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{x-3} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=5 \\ x-3=-5 \\ x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-2 \\ x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{b) } N = \frac{3x^2 - x + 3}{3x + 2} = \frac{(3x^2 + 2x) - (3x + 2) + 5}{3x + 2} = x - 1 + \frac{5}{3x + 2}$$

$$N \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{5}{3x+2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=5 \\ 3x+2=-5 \\ 3x+2=1 \\ 3x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=3 \\ 3x=-7 \\ 3x=-1 \\ 3x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{7}{3} \\ x=-\frac{1}{3} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{Bài 6: } A = \frac{2x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x + 5} = \frac{2(x^2 - 4x + 5) - 1}{x^2 - 4x + 5} = 2 - \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Suy ra A đạt GTNN khi $\frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ đạt GTLN, hay $x^2 - 4x + 5$ đạt GTNN.

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$$

Biểu thức $x^2 - 4x + 5$ đạt GTNN bằng 1 $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\text{Khi đó, } A = 2 - \frac{1}{x^2 - 4x + 5} = 2 - 1 = 1.$$

Vậy GTNN của A bằng 1 khi $x = 2$.

$$\text{Bài 7: } B = \frac{2x^2 + 6x + 7}{x^2 + 3x + 3} = \frac{2(x^2 + 3x + 3) + 1}{x^2 + 3x + 3} = 2 + \frac{1}{x^2 + 3x + 3}$$

Suy ra B đạt GTLN khi $\frac{1}{x^2 + 3x + 3}$ đạt GTLN, hay $x^2 + 3x + 3$ đạt GTNN.

$$\text{Ta có } x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Biểu thức $x^2 + 3x + 3$ đạt GTNN bằng $\frac{3}{4}$ khi $x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

$$\text{Khi đó, } B = 2 + \frac{1}{x^2 + 3x + 3} = 2 + \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{3}.$$

Vậy GTLN của B là $\frac{10}{3}$ khi $x = -\frac{3}{2}$

Bài 8: a) $A = \frac{2}{1-2x}$. Điều kiện của x là $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 0$.

b) Tại $x = -2$ thì giá trị của A bằng $\frac{2}{5}$.

c) Tại $x = \frac{1}{4}$ thì giá trị của A bằng 4.

d) Giải $\frac{2}{1-2x} = 1$ được $x = -\frac{1}{2}$, không thỏa mãn điều kiện của x để giá trị của A được xác định. Không có giá trị nào của x để giá trị của A bằng 1.

Bài 9: Điều kiện của x là $x \neq 2$ và $x \neq -2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left[\frac{x+2}{2(x-2)} - \frac{x-2}{2(x+2)} + \frac{8}{x^2-4} \right] \cdot \frac{x-2}{4} \cdot (x^2-2x+3) \\ &= \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2 + 16}{2(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot (x^2-2x+3) \\ &= \frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4+16}{2(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{4} \cdot (x^2-2x+3) \\ &= \frac{8x+16}{8(x+2)} \cdot (x^2-2x+3) = x^2-2x+3 \end{aligned}$$

b) Tại $x = -2$ thì giá trị của A không xác định.

Tại $x = -\frac{1}{2}$, thì giá trị của A là $4\frac{1}{4}$.

c) Giá trị của A bằng 3 khi $x \neq \pm 2$ và $x^2-2x+3=3$

$$\text{Giải } x^2-2x+3=3 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Loại $x=2$ vì không thỏa mãn điều kiện của x

Vậy tại $x=0$ thì $A=3$.

$$\text{d) } A = x^2-2x+3 = x^2-2x+1+2 = (x-1)^2+2 \geq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2 tại $x=1$.

Bài 10: a) $A = x^2+2x-1 + \frac{3}{x-5}$. Vậy $A \in \mathbb{Z}$ khi $x-5 \in U(3) = \{-1, -3; 1; 3\}$

$x-5$	1	-1	3	-3
x	6	4	8	2

b) $B = \frac{x^2 - 64x + 67}{x + 8} = x - 8 + \frac{67}{x + 8}$. Vậy $B \in \mathbb{Z}$ khi $x + 8 \in U(67) = \{-1, -67; 1; 67\}$

$x + 8$	1	-1	67	-67
x	-7	-9	59	-75

Bài 11: a) Ta có $x^2 - 4x + 12 = (x - 2)^2 + 8 \geq 8$ hay $\frac{1}{x^2 - 4x + 12} \leq \frac{1}{8}$ dẫn đến $M \leq 1$. Từ đó tìm được GTNN của $M = 1$ khi $x = 2$.

b) Tương tự: Có $x^2 + 2x + 11 \geq 10$ hay $\frac{1}{x^2 + 2x + 11} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow N \geq \frac{-1}{2}$. GTNN của $N = \frac{-1}{2}$ khi $x = -1$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm phương trình một ẩn

• Phương trình một ẩn x là phương trình có dạng $A(x) = B(x)$ trong đó $A(x)$ và $B(x)$ là các biểu thức của biến x .

2. Các khái niệm khác liên quan

• Giá trị x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu đẳng thức $A(x_0) = B(x_0)$ đúng.

• Giải phương trình là đi tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

• Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình được gọi là tập nghiệm của phương trình đó.

• Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Chú ý: Hai phương trình cùng vô nghiệm tương đương nhau.

II. BÀI TẬP

Bài 1: Thử xem mỗi số trong dấu ngoặc có phải là nghiệm của phương trình tương ứng hay không?

a) $(x - 2)^2 = 5(x - 2)$ ($x = 7; x = 2$)

b) $|4x - 1| = 5(x - 2)$ ($x = -2; x = -1$)

c) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25} = 0$ ($x = -5; x = 5$)

Bài 2: Chứng tỏ các phương trình sau đây vô nghiệm

a) $(x - 2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 6(x - 1)^2$

b) $4x^2 - 12x + 10 = 0$

c) $(x - 4)^{2000} = -(x - 2000)^4 - 3$

Bài 3: Chứng tỏ rằng các phương trình sau đây có vô số nghiệm. Hãy cho biết tập nghiệm của phương trình đó.

a) $(x + 1)(x^2 - x + 1) = (x + 1)^3 - 3x(x + 1)$

b) $(x^2 - 5)^2 = [(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)]^2$

c) $|2x - 1| = 1 - 2x$

Bài 4: Cho phương trình: $(x + 3)(x - \sqrt{3})(2x - 1) = 0$

Hãy viết tập nghiệm S của phương trình trên trong các trường hợp sau

a) Ấn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp \mathbb{N} .b) Ấn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp \mathbb{Z} c) Ấn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp \mathbb{Q} d) Ấn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp \mathbb{R} **Bài 5:** Trong các cặp phương trình sau, hãy chỉ ra các phương trình tương đương, không tương đương? Vì sao?

a) $x + 7 = 9$ và $x^2 + x + 7 = 9 + x^2$

b) $(x + 3)^3 = 9(x + 3)$ và $(x + 3)^3 - 9(x + 3) = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 7.5x + 28 = 0$ và $x^2 - 15x + 56 = 0$

d) $2x - 1 = 3$ và $x(2x - 1) = 3x$

Bài 6: . Tìm m sao cho phương trình

a) $2x - 3m = x + 9$ nhận $x = -5$ là nghiệm

b) $4x + m^2 = 22$ nhận $x = 5$ là nghiệm

Bài 7: Giải phương trình

a) $12 - 6x = 0$

b) $2x + x + 120 = 0$

c) $x - 5 = 3 - x$

d) $7 - 3x = 9 - x$

e) $\frac{-5}{9}x + 1 = \frac{2}{3}x - 10$

f) $2(x + 1) = 3 + 2x$

Bài 8: Xét xem hai phương trình sau có tương đương không?

a) $x^2 - 2x = x^3 + 3x - 1$ và $x = -1$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) = 2x - 5$ và $x = 2$

Tự luyện:

Câu 2: Trong các số sau số nào là nghiệm của phương trình $\frac{3x - 4}{2} + 1 = 0$

- A. -1
- B. 2
- C. -2
- D. $\frac{2}{3}$

Câu 3: Tập nghiệm của phương trình $x + 1 = 1 + x$ có

- A. 1 nghiệm
- B. Vô số nghiệm
- C. Vô nghiệm

Câu 4: Giá trị $x = -1$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau

- A. $4x - 1 = 3x - 2$
- B. $x + 1 = 2(x - 3)$
- C. $2(x + 1) + 3 = 2 + x$

Câu 5: Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
1) $x = -1$ là một nghiệm của PT	1) $3(x - 1) = 2x - 1$
2) $x = 2$ là một nghiệm của PT	2) $\frac{1}{x + 1} = 1 - \frac{x}{4}$
3) $x = 3$ là một nghiệm của PT	3) $x^2 + x = 0$
1- ...; 2; 3	4) $x^2 - x = 0$

Câu 6: Hãy điền vào chỗ trống để được các khẳng định đúng

- a) $x + 3 = 4 - x \Leftrightarrow \dots(1)\dots = 4 - 3 \Leftrightarrow x = \dots(2)\dots$
- b) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(\dots(1)\dots) = 0 \Leftrightarrow x = \dots(2)\dots$ và $x = 3$

Câu 7: Tập nghiệm của phương trình $2x = 6$ là $S = \{6\}$ A .Đúng B. Sai

Câu 8: $x = 1$ và $x^2 = 1$ là hai phương trình tương đương. A .Đúng B. Sai

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $x = 7; x = 2$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $x = -2; x = -1$ đều không là nghiệm của phương trình.

c) $x = 5$ không là nghiệm của phương trình, $x = -5$ là nghiệm của ptring.

Bài 2: HD: a) Dùng hằng đẳng thức triển khai ta được $0 = -6$ (vô lý)

b) $4x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 + 1 = 0$ do $(2x - 3)^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow (2x - 3)^2 + 1 > 0$. PTVN

c) $-(x - 2000)^4 - 3 < 0; (x - 4)^{2000} \geq 0$. Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm.

Bài 3:

a) $x^3 + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 3x \Leftrightarrow 0 = 0$ (đúng với mọi x). Tập nghiệm là \mathbb{R} .

b) $(x^2 - 5)^2 = (5 - x^2)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 5)^2 = (x^2 - 5)^2$ (đúng với mọi x). Tập nghiệm là \mathbb{R} .

c) ĐK: $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$. Với $x \leq \frac{1}{2}$ thì $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1 - 2x$

Phương trình trở thành $1 - 2x = 1 - 2x$ (luôn đúng với mọi $x \leq \frac{1}{2}$).

Tập nghiệm: $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \right\}$

Bài 4: KQ: a) $S = \emptyset$; b) $S = \{-3\}$; c) $S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$; d) $S = \left\{-3; \frac{1}{2}; \sqrt{3}\right\}$

Bài 5: a) Cặp phương trình tương đương là a, b, c

b) Cặp phương trình không tương đương là d.

Bài 6: a) $x = -5$ là nghiệm phương trình $2x - 3m = x + 9$ nên ta có

$$2 \cdot (-5) - 3m = (-5) + 9$$

$$\Leftrightarrow -10 - 3m = 4 \Leftrightarrow -3m = 4 + 10 \Leftrightarrow m = \frac{14}{-3}. \text{ Kết luận...}$$

b) $x = 5$ là nghiệm phương trình $4x + m^2 = 22$ nên ta có $4 \cdot 5 + m^2 = 22$

$\Leftrightarrow 20 + m^2 = 22 \Leftrightarrow m^2 = 22 - 20 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$. Kết luận.

Bài 7: KQ: a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-40\}$; c) $S = \{4\}$; d) $S = \{-1\}$; e) $S = \{9\}$; f) $S = \emptyset$

Bài 8: KQ: a, b : Hai phương trình không tương đương

Tự luyện:

Bài 9:

Bài 10:

KQ: a, c, d, e, f là hai phương trình tương đương. b không phải là hai phương trình tương đương.

Bài 11:

Bài 12:

Bài 13: Giải các phương trình của bài tập 5 và bài tập 10.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN VÀ CÁCH GIẢI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

(Phiếu này tham khảo nguồn bài tập của đồng nghiệp)

Định nghĩa

Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$. Trong đó a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

Các quy tắc cơ bản

a) Quy tắc chuyển vế: Khi chuyển vế hạng tử từ một vế của phương trình sang vế còn lại, ta phải đổi dấu hạng tử đó: $A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow A(x) = C(x) - B(x)$.

b) Quy tắc nhân (hoặc chia) với một số khác 0:

Khi nhân (hoặc chia) hai vế của phương trình với một số khác 0 ta được phương trình mới tương đương với phương trình đã cho:

$$A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow mA(x) + mB(x) = mC(x);$$

$$A(x) + B(x) = C(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{m} + \frac{B(x)}{m} = \frac{C(x)}{m} \text{ với } m \neq 0.$$

Cách giải phương trình bậc nhất

Ta có: $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (sử dụng quy tắc chuyển vế)

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ (sử dụng quy tắc chia hai vế cho } a \neq 0).$$

II. BÀI TẬP

Bài 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $x - 10 = 0$

b) $7 - 3x = 0$

c) $4x^2 - 10 = 0$

d) $\frac{-5}{2}x = 0$

e) $\frac{4}{x} + 2 = 0$

f) $0x + 0 = 0$

g) $\frac{x}{2} - 1 = 0$

h) $2x - \frac{3}{4} = 0$

k) $2x^3 - \frac{3}{4} = 0$

Bài 2: Với giá trị nào của m thì mỗi phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $\frac{1}{5}x + m - 1 = 0$

b) $(m + 3)x - \frac{3}{4} = 0$

c) $(m - 2)x + 5 = 0$

d) $(x - 3)m - 1 = 0$

e) $(2x + 3)2m - 5 = 0$

f) $mx + m - 2 = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $3x - 9 = 0$

b) $5x + 35 = 0$

c) $9x - 3 = 0$

d) $24 - 8x = 0$

e) $-6x + 16 = 0$

f) $-7x + 15 = 0$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $4x + 5 = 1$

b) $-5x + 2 = 14$

c) $6x - 3 = 8x + 9$

d) $7x - 5 = 13 - 5x$

e) $2 - 3x = 5x + 10$

f) $13 - 7x = 4x - 20$

Bài tập tương tự

Bài 5: Hãy chỉ ra phương trình bậc nhất một ẩn trong các phương trình sau:

a) $2 + x = 0$.

b) $x - 2x^2 = 0$.

c) $3z - 2 = 0$.

d) $y = 0$.

e) $x - 2y = 0$.

f) $0 \cdot x + 5 = 0$.

g) $-t - 2 = 0$.

h) $-3 - 4z = 0$.

Bài 6: Tìm điều kiện của m để phương trình sau là phương trình bậc nhất một ẩn (m là tham số).

a) $(2m + 3)x + 3 = 0$.

b) $4x + 3m = 0$.

c) $(4 - m)x + 4 - m = 0$.

d) $(m^2 - 1)x^2 + mx + 3 = 0$.

e) $(m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - m = 0$.

f) $(m - 1)x + 2my + 4 = 0$.

Bài 7: Bằng quy tắc chuyển vế, giải các phương trình sau

a) $x + 2,25 = -0,75$.

b) $21,2 = 12 + x$.

c) $3,4 - x = -4$.

d) $x - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

e) $-\frac{2}{3} - x = \frac{3}{2}$.

f) $2\frac{3}{4} + x = 4$.

Bài 8: Bằng quy tắc nhân, tìm giá trị gần đúng nghiệm của các phương trình sau, làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba (dùng máy tính bỏ túi để tính toán).

a) $2x = \sqrt{3}$.

b) $-3x = 1 - \sqrt{6}$.

c) $\sqrt{3}x = 2\sqrt{5}$.

Bài 9: Giải các phương trình sau:

a) $2x - 10 = 0$.

b) $x + 4x - 15 = 0$.

c) $2(x - 3) - 3x + 5 = 0$.

d) $x + 12 = 2 - x$.

e) $7 - 3x = 9 + x$.

f) $3(2x - 1) - 23 = -23$.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình bậc nhất?

A. $1 + x = 0$

B. $1 + 2y = 0$

C. $-3x + 2 = 0$

D. $2x + x^2 = 0$

Câu 2: Trong các phương trình sau phương trình nào vô nghiệm

A. $11 - x = x - 1$

B. $x^2 = 1$

C. $|x| = -1$

Câu 3: Phương trình $3x + 1 = 7x - 11$ có nghiệm là

- A. -3 B. 3 C. -1 D. $\frac{-12}{10}$

Câu 4: Nghiệm của phương trình $-2x + 14 = 0$ là

- A. 7 B. -7 C. 12

Câu 5: Nghiệm của phương trình $12 - 6x = 0$ là

- A. 6 B. -2 C. 2

Câu 6: Nối mỗi phương trình sau với tập nghiệm của nó ?

A	B
a) $5x - 2 = 0$	1) $S = \left\{ \frac{-2}{9} \right\}$
b) $5 - 3x = 6x + 7$	2) $S = \{-3\}$
c) $-7x + 21 = 0$	3) $S = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$
a); b)	4) $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$
c); d)	

Câu 7: Điền vào chỗ trống để hoàn thiện

a) $\frac{4}{3}x - \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = \dots\dots(1)\dots\dots \Leftrightarrow x = \dots\dots(2)\dots\dots$

b) $15 - 8x = 9 - 5x \Leftrightarrow 8x - 5x = \dots\dots(1)\dots\dots \Leftrightarrow x = \dots\dots(2)\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Phương trình ở ý a; b; d; g; h là các phương trình bậc nhất 1 ẩn (vì có dạng $ax + b = 0$ với a;b là hai số đã cho, $a \neq 0$)

Bài 2: a) $\frac{1}{5}x + m - 1 = 0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x với $\forall m \in R$ vì có hệ số $a = \frac{1}{5} \neq 0$

b) $(m + 3)x - \frac{3}{4} = 0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x khi $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$

c) $(m-2)x+5=0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x khi $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

d) $(x-3)m-1=0 \Leftrightarrow mx-(3m+1)=0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x khi $m \neq 0$

e) $(2x+3)2m-5=0 \Leftrightarrow 4mx+6m-5=0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x khi $4m \neq 0 \Leftrightarrow \pm m \neq 0$

f) $mx+m-2=0$ là phương trình bậc nhất 1 ẩn x khi $m \neq 0$

Bài 3 a) $3x-9=0 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$

b) $5x+35=0 \Leftrightarrow 5x=-35 \Leftrightarrow x=-35:5 \Leftrightarrow x=-7$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-7\}$

c) $9x-3=0 \Leftrightarrow 9x=3 \Leftrightarrow x=3:9 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

d) $24-8x=0 \Leftrightarrow 8x=24 \Leftrightarrow x=24:8 \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$

e) $-6x+16=0 \Leftrightarrow 6x=16 \Leftrightarrow x=16:6 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

f) $-7x+15=0 \Leftrightarrow 7x=15 \Leftrightarrow x=\frac{15}{7}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{15}{7}\right\}$

Bài 4: a) $4x+5=1 \Leftrightarrow 4x=1-5 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-4:4 \Leftrightarrow x=-1$. Tập nghiệm $S = \{-1\}$

b) $-5x+2=14 \Leftrightarrow 5x=2-14 \Leftrightarrow 5x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{5}$. Tập nghiệm $S = \left\{\frac{-12}{5}\right\}$

c) $6x-3=8x+9 \Leftrightarrow 8x-6x=-3-9 \Leftrightarrow 2x=-12 \Leftrightarrow x=-12:2 \Leftrightarrow x=-6$. Tập nghiệm $S = \{-6\}$

d) $7x-5=13-5x \Leftrightarrow 7x+5x=13+5 \Leftrightarrow 12x=18 \Leftrightarrow x=\frac{18}{12} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

e) $2-3x=5x+10 \Leftrightarrow 5x+3x=2-10 \Leftrightarrow 8x=-8 \Leftrightarrow x=-8:8 \Leftrightarrow x=-1$. Tập nghiệm $S = \{-1\}$

f) $13-7x=4x-20 \Leftrightarrow 4x+7x=13+20 \Leftrightarrow 11x=33 \Leftrightarrow x=33:11 \Leftrightarrow x=3$. Tập nghiệm $S = \{3\}$

Bài 5: Các phương trình bậc nhất trong các phương trình đã cho là:

$$2+x=0; 3z-2=0; y=0; -t-2=0; -3-4z=0.$$

Bài 6: a) Để phương trình $(2m+3)x+3=0$ là phương trình bậc nhất ẩn x thì

$$2m+3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}.$$

b) Để phương trình $4x+3m=0$ là phương trình bậc nhất một ẩn thì $4 \neq 0$ (hiển nhiên). Vậy $m \in R$.

c) Để phương trình $(4-m)x+4-m=0$ là phương trình bậc nhất một ẩn thì

$$4-m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4.$$

d) Để phương trình $(m^2 - 1)x^2 + mx + 3 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn thì

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

e) Để phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m + 2)x - m = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn thì

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

f) Để phương trình $(m - 1)x + 2my + 4 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn thì

$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Bài 7: a) $S = \{-3\}$; b) $S = \{8, 8\}$; c) $S = \{7, 4\}$; d) $S = \{1\}$; e) $S = \left\{-\frac{13}{6}\right\}$; f) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

Bài 8: a) $2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

b) $-3x = 1 - \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6} - 1}{3} \approx 0,483$.

c) $\sqrt{3}x = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \approx 2,582$.

Bài 9: a) $2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Tập nghiệm $S = \{5\}$.

b) $x + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$. Tập nghiệm $S = \{3\}$.

c) $2(x - 3) - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$. Tập nghiệm $S = \{-1\}$.

d) $x + 12 = 2 - x \Leftrightarrow 2x = -10 \Leftrightarrow x = -5$. Tập nghiệm $S = \{-5\}$.

e) $7 - 3x = 9 + x \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

f) $3(2x - 1) - 23 = -23 \Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG $ax + b = 0$

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Sử dụng các quy tắc trong bài học trước để đưa phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$.
- Chú ý đến các kiến thức liên quan, bao gồm:
 - Các hằng đẳng thức đáng nhớ;
 - Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối cơ bản;
 - Các quy tắc về đổi dấu;

II. BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $2(7x + 10) + 5 = 3(2x - 3) - 9x$

b) $(x + 1)(2x - 3) = (2x - 1)(x + 5)$

c) $2x + x(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

d) $(x - 1)^3 - x(x + 1)^2 = 5x(2 - x) - 11(x + 2)$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2(x - 3)}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6x + 9}{3} - 2$

b) $\frac{2(3x + 1) + 1}{4} - 5 = \frac{2(3x - 1)}{5} - \frac{3x + 2}{10}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x - 2}{4} = 0,5x - 2,5$

d) $\frac{2x - 4}{3} - 2x = -\frac{6x + 3}{5} + \frac{1}{15}$

Bài 3: : Giải các phương trình sau:

a) $\frac{(x + 10)(x + 4)}{12} - \frac{(x + 4)(2 - x)}{4} = \frac{(x + 10)(x - 2)}{3}$

b) $\frac{(2x + 1)^2}{5} - \frac{(x - 1)^2}{3} = \frac{7x^2 - 14x - 5}{15}$

c) $\frac{(x - 2)^2}{3} - \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{8} + \frac{(x - 4)^2}{6} = 0$

Phương pháp giải: Xét phương trình (ẩn x) dạng: $\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} = \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h}$

Bước 1: Nếu $a + b = c + d = e + f = g + h = k$, ta cộng mỗi phân thức thêm 1. Nếu $a - b = c - d = e - f = g - h = k$, ta cộng mỗi phân thức thêm -1 .

Bước 2: Quy đồng từ phân thức, chuyển vế nhóm nhân tử chung.

Chú ý: Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-23}{24} + \frac{x-23}{25} = \frac{x-23}{26} + \frac{x-23}{27}$$

$$b) \left(\frac{x+2}{98} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{97} + 1 \right) = \left(\frac{x+4}{96} + 1 \right) + \left(\frac{x+5}{95} + 1 \right)$$

$$c) \frac{x+1}{1998} + \frac{x+2}{1997} = \frac{x+3}{1996} + \frac{x+4}{1995}$$

$$d) \frac{201-x}{99} + \frac{203-x}{97} + \frac{205-x}{95} + 3 = 0$$

$$e) \frac{x-45}{55} + \frac{x-47}{53} = \frac{x-55}{45} + \frac{x-53}{47}$$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x+24}{1996} + \frac{x+25}{1995} + \frac{x+26}{1994} + \frac{x+27}{1993} + \frac{x+2036}{4} = 0$$

$$b) \frac{x-342}{15} + \frac{x-323}{17} + \frac{x-300}{19} + \frac{x-273}{21} = 10$$

$$c) \frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{7} + \frac{x+4}{4} + 7 = 0$$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$a) x + \frac{2x + \frac{x-1}{5}}{3} = 1 - \frac{3x - \frac{1-2x}{3}}{5}$$

$$b) \frac{3x-1 - \frac{x-1}{2}}{3} - \frac{2x + \frac{1-2x}{3}}{2} = \frac{3x-1}{2} - 6$$

Bài 7: Giải phương trình.

$$a) 5 - (x-6) = 4(3-2x).$$

$$b) 3 - 4x(25-2x) = 8x^2 + x - 300.$$

$$c) 2x - (x-3)(5-x) = (x+4)^2.$$

$$d) (4x+1)(x-2) + 25 = (2x+3)^2 - 4x.$$

Bài 8: Giải phương trình.

$$a) \frac{x-1}{3} + \frac{2}{5} = x.$$

$$b) \frac{3-2x}{5} - 3x = \frac{x+1}{2}.$$

$$c) \frac{3x+2}{2} - \frac{3x+1}{6} = 2x + \frac{5}{3}.$$

$$d) x - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+8}{6} = 7 + \frac{x-1}{3}.$$

Bài 9: Giải phương trình.

$$a) \frac{x+4}{4} - \frac{x-3}{6} = \frac{x}{3}$$

$$b) \frac{x-1}{2} - \frac{1-x}{4} = 1 - \frac{2(x-1)}{3}$$

$$c) \frac{3x-2}{6} - 5 = \frac{3-2(x+7)}{4}$$

$$d) \frac{4x+1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{x-3}{6} = x$$

$$e) \frac{x+1}{3} + \frac{2x-9}{-8} = \frac{x}{6} + 1$$

$$f) \frac{3x-2}{5} + \frac{x-1}{9} = \frac{14x-3}{15} - \frac{2x+1}{9}$$

$$g) \frac{x}{2000} + \frac{x+1}{2001} + \frac{x+2}{2002} + \frac{x+3}{2003} = 4$$

$$h) \frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

$$i) \frac{x+14}{86} + \frac{x+15}{85} + \frac{x+16}{84} + \frac{x+17}{83} + \frac{x+116}{4} = 0$$

$$j) \frac{x-90}{10} + \frac{x-76}{12} + \frac{x-58}{14} + \frac{x-36}{16} + \frac{x-15}{17} = 15$$

$$k) (2x-1)^2 - (2x-3)^2 = 4(x+3)$$

$$l) (x+5)(2x-1) = (2x-3)(x+1)$$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nghiệm của phương trình $3x - 2 = 2x - 3$ là

- A. 1 B. -1 C. $-\frac{1}{5}$ D. -5

Câu 2: phương trình $4x - 6 = 9 - x$ là

- A. 1 B. -3 C. 3 D. $\frac{3}{5}$

Câu 3: Điều kiện của x để phân thức $\frac{3x+2}{2(x-1)-3(2x-1)}$ xác định là

- A. $x \neq 1$ B. $x \neq \frac{1}{2}$ C. $x \neq \frac{1}{4}$ D. $x \neq \frac{-5}{4}$

Câu 4: Phương trình nào có nghiệm là số tự nhiên:

A. $5x = -3$. B. $x - 5 = 0$. C. $x + 5 = -x - 5$. D. $2(x + 5) = 2$.

Câu 5: Phương trình $(m + 2)x - 4 = 0$ có nghiệm duy nhất khi $m = ?$

A. $m \neq \pm 2$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \neq 2$. D. $m \neq -2$.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $3x + 8 = 2x - 3$ là $x = 5$ A. Đúng B. Sai

Câu 7: Nghiệm của phương trình $2(x + 1) = x + 3$ là $x = 1$ A. Đúng B. Sai

Câu 8: Nối mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A		B
1) $x = 2$ là một nghiệm của PT		a) $ x = x$
2) $x = -1$ là một nghiệm của PT		b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
3) $x = -3$ là một nghiệm của PT		c) $\frac{6}{1-x} = x + 4$
1) 2) 3) 4)		d) $\frac{6}{1+x} = x + 4$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: a) $\Leftrightarrow 17x = -34 \Leftrightarrow x = -2$. Tập nghiệm $S = \{-2\}$

b) $\Leftrightarrow -10x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$. Tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

c) $\Leftrightarrow 2x + x^3 - x - x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Tập nghiệm $S = \{1\}$

d) $\Leftrightarrow 3x = -21 \Leftrightarrow x = -7$. Tập nghiệm $S = \{-7\}$

Bài 2: a) $\frac{2(x-3)}{4} - \frac{1}{2} = \frac{6x+9}{3} - 2 \Leftrightarrow \frac{6(x-3)}{12} - \frac{6}{12} = \frac{24x+36}{12} - \frac{24}{12}$
 $\Leftrightarrow \frac{6(x-3)-6}{12} = \frac{24x+36-24}{12} \Leftrightarrow 6x-18-6 = 24x+12 \Leftrightarrow -18x = 36 \Leftrightarrow x = -2$

b) $\frac{2(3x+1)+1}{4} - 5 = \frac{2(3x-1)}{5} - \frac{3x+2}{10} \Leftrightarrow \frac{10(3x+1)+5}{20} - \frac{100}{20} = \frac{8(3x-1)}{20} - \frac{6x+4}{20}$
 $\Leftrightarrow \frac{30x+10+5-100}{20} = \frac{24x-8-6x-4}{20} \Leftrightarrow 30x-85 = 18x-12 \Leftrightarrow x = \frac{73}{12}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{x-2}{4} = 0,5x - 2,5 \Leftrightarrow 4x + 3x - 6 = 6x - 30 \Leftrightarrow x = -24$

d) $\frac{2x-4}{3} - 2x = -\frac{6x+3}{5} + \frac{1}{15} \Leftrightarrow \frac{10x-20-30x}{15} = \frac{-18x-9+1}{15} \Leftrightarrow -20x-20 = -18x-8$
 $\Leftrightarrow x = -6$

Bài 3: a) $\Leftrightarrow (x+10)(x+4) - 3(x+4)(2-x) = 4(x+10)(x-2)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 14x + 40 + 3x^2 + 6x - 24 = 4x^2 + 32x - 80$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 14x + 3x^2 + 6x - 4x^2 - 32x = -80 - 40 + 24$$

$$\Leftrightarrow -12x = -96 \Leftrightarrow x = 8$$

b) $\Leftrightarrow 3(2x+1)^2 - 5(x-1)^2 = 7x^2 - 14x - 5$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2 + 4x + 1) - 5(x^2 - 2x + 1) = 7x^2 - 14x - 5$$

$$\Leftrightarrow 36x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12}$$

c) $\Leftrightarrow 8(x-2)^2 - 3(2x-3)(2x+3) + 4(x-4)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 8(x^2 - 4x + 4) - 3(4x^2 - 9) + 4(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$\Leftrightarrow -64x = -123 \Leftrightarrow x = \frac{123}{64}$$

Bài 4: a) $\frac{x-23}{24} + \frac{x-23}{25} = \frac{x-23}{26} + \frac{x-23}{27} \Leftrightarrow (x-23)\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} - \frac{1}{27}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 23 = 0 \Leftrightarrow x = 23. \text{ Tập nghiệm } S = \{23\}$$

b) $\left(\frac{x+2}{98} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{97} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{96} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{95} + 1\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{x+100}{98} + \frac{x+100}{97} - \frac{x+100}{96} - \frac{x+100}{95} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+100)\left(\frac{1}{98} + \frac{1}{97} - \frac{1}{96} - \frac{1}{95}\right) = 0 \Leftrightarrow x+100 = 0 \Leftrightarrow x = -100. \text{ Tập nghiệm } S = \{-100\}$$

c) $\frac{x+1}{1998} + \frac{x+2}{1997} = \frac{x+3}{1996} + \frac{x+4}{1995}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{1998} + 1\right) + \left(\frac{x+2}{1997} + 1\right) - \left(\frac{x+3}{1996} + 1\right) - \left(\frac{x+4}{1995} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1999}{1998} + \frac{x+1999}{1997} - \frac{x+1999}{1996} - \frac{x+1999}{1995} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1999)\left(\frac{1}{1998} + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1996} - \frac{1}{1995}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1999 = 0 \Leftrightarrow x = -1999. \text{ Tập nghiệm } S = \{-1999\}$$

d) $\frac{201-x}{99} + \frac{203-x}{97} + \frac{205-x}{95} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{201-x}{99} + 1\right) + \left(\frac{203-x}{97} + 1\right) + \left(\frac{205-x}{95} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{300-x}{99} + \frac{300-x}{97} + \frac{300-x}{95} = 0$$

$$\Leftrightarrow (300-x)\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{97} + \frac{1}{95}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 300-x = 0 \Leftrightarrow x = 300. \text{ Tập nghiệm } S = \{300\}$$

e) $\frac{x-45}{55} + \frac{x-47}{53} = \frac{x-55}{45} + \frac{x-53}{47}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-45}{55}-1\right) + \left(\frac{x-47}{53}-1\right) - \left(\frac{x-55}{45}-1\right) - \left(\frac{x-53}{47}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-100}{55} + \frac{x-100}{53} - \frac{x-100}{45} - \frac{x-100}{47} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-100) \left(\frac{1}{55} + \frac{1}{53} - \frac{1}{45} - \frac{1}{47} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-100=0 \Leftrightarrow x=100. \text{ Tập nghiệm } S=\{100\}$$

Bài 5: a) $\frac{x+24}{1996} + \frac{x+25}{1995} + \frac{x+26}{1994} + \frac{x+27}{1993} + \frac{x+2036}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x+24}{1996} + \frac{x+25}{1995} + \frac{x+26}{1994} + \frac{x+27}{1993} + \frac{x+2020+16}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+24}{1996} + 1 + \frac{x+25}{1995} + 1 + \frac{x+26}{1994} + 1 + \frac{x+27}{1993} + 1 + \frac{x+2020}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2020}{1996} + \frac{x+2020}{1995} + \frac{x+2020}{1994} + \frac{x+2020}{1993} + \frac{x+2020}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2020) \left(\frac{1}{1996} + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1994} + \frac{1}{1993} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2020=0 \Leftrightarrow x=-2020. \text{ Tập nghiệm } S=\{-2020\}$$

b) $\frac{x-342}{15} + \frac{x-323}{17} + \frac{x-300}{19} + \frac{x-273}{21} = 10$

$$\Leftrightarrow \frac{x-342}{15} - 1 + \frac{x-323}{17} - 2 + \frac{x-300}{19} - 3 + \frac{x-273}{21} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-357}{15} + \frac{x-357}{17} + \frac{x-357}{19} + \frac{x-357}{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-357) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-357=0 \Leftrightarrow x=357. \text{ Tập nghiệm } S=\{357\}$$

c) $\frac{x+1}{15} + \frac{x+2}{7} + \frac{x+4}{4} + 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{15} + 1 + \frac{x+2}{7} + 2 + \frac{x+4}{4} + 4 = 0$

$$\frac{x+16}{15} + \frac{x+16}{7} + \frac{x+16}{4} = 0. \Leftrightarrow (x+16) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x+16=0 \Leftrightarrow x=-16$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{-16\}$.

Bài 6: a) $x + \frac{2x + \frac{x-1}{5}}{3} = 1 - \frac{3x - \frac{1-2x}{3}}{5}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{11x-1}{15} = 1 - \frac{11x-1}{15} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Tập nghiệm } S = \{1\}$$

$$\text{b) } \frac{3x-1-\frac{x-1}{2}}{3} - \frac{2x+\frac{1-2x}{3}}{2} = \frac{\frac{3x-1}{2}-6}{5} \Leftrightarrow \frac{5x-1}{6} - \frac{4x+1}{6} = \frac{3x-13}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{6} = \frac{3x-13}{10} \Leftrightarrow 5(x-2) = 3(3x-13) \Leftrightarrow 5x-10 = 9x-39 \Leftrightarrow -4x = -29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{4}$$

$$\text{Tập nghiệm } S = \left\{ \frac{29}{4} \right\}$$

Bài 7: KQ: a) $S = \left\{ \frac{11}{7} \right\}$; b) $S = \left\{ \frac{101}{7} \right\}$; c) $S = \left\{ -\frac{1}{14} \right\}$; d) $S = \{-11\}$.

Bài 8: KQ: a) $S = \{0,1\}$; b) $S = \left\{ \frac{1}{39} \right\}$; c) $S = \left\{ -\frac{5}{6} \right\}$; d) $S = \{10\}$.

Bài 9: KQ: a) $S = \{6\}$; b) $S = \left\{ \frac{29}{17} \right\}$; c) $S = \left\{ \frac{31}{12} \right\}$;

d) $S = \{-1\}$; e) $S = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$; f) $S = \emptyset$

g) $S = \{2000\}$; h) $S = \{100\}$; i) $S = \{-100\}$

j) $S = \{100\}$; k) $S = \{5\}$; l) $S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

4. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Muốn giải phương trình $A(x).B(x) = 0$ ta giải hai phương trình $A(x) = 0$ và $B(x) = 0$ rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

$$A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ B(x) = 0 \end{cases}$$

II. BÀI TẬP

Bài 1: Giải phương trình

a) $(x + 5)(2x - 3) = 0$

c) $\left(\frac{3}{4}x - 2\right)\left(\frac{5}{3}x + 1\right) = 0$

[Dạng cơ bản]

b) $(x^2 + 1)(6x + 3) = 0$

d) $2(x + 3)(x - 4) = 0$

Bài 2: Giải phương trình

a) $(x^2 - 9)(4 - x) = 0$

c) $(4x - 10)\left(\frac{4x - 3}{5} - \frac{2(x + 3)}{7}\right) = 0$

[Dạng cơ bản]

b) $(5x + 3)\left(\frac{3x + 11}{4} - \frac{x - 7}{12}\right) = 0$

Bài 3: Giải phương trình

a) $2x(3x - 1) = (3x - 1)$

c) $(x - 1)(2x + 3) + 2x = 2$

[Đưa về phương trình tích]

b) $3(x - 5)(x + 2) = x^2 - 5x$

d) $\frac{7 - x}{2} + \frac{2}{3}(x - 7)(x - 3) = 0$

Bài 4: Giải phương trình

a) $(x + 2)^3 - 9(x + 2) = 0$

c) $(2x - 1)^2 + (x - 3)(2x - 1) = 0$

[Đưa về phương trình tích]

b) $(3 - 2x)^2 + 4x^2 - 9 = 0$

d) $4(3x - 2) + (2 - 3x)^3 = 0$

Bài 6: Giải phương trình

a) $(x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = 0$

c) $(x - 1)(x^2 - 9) = -x - 3$

[Đưa về phương trình tích]

b) $9(2x + 1)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$

d) $(x + 1)^2 + 2(x + 1) + 1 = 0$

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $(3x-2)(x+1)=0$

b) $(x^2+4)(2x-3)=0$

c) $(x+3)(2x+4)(x-5)=0$

d) $(x+6)\left(\frac{x+6}{2}-\frac{4x}{3}\right)=0$

Bài 8: Giải phương trình

[Đưa về phương trình tích]

a) $3x^2-11x+6=0$

b) $-2x^2+5x+3=0$

c) $x^2+2x-3=0$

d) $x^2-4x-5=0$

Bài 9: Giải phương trình

[Đưa về phương trình tích]

a) $2x^4+3x^2-5=0$

b) $x^4-8x^3-9x^2=0$

c) $x^3-4x^2+4-x=0$

d) $x^4+2x^3+5x^2+4x-12=0$

Bài 10: Giải các phương trình:

[PP đặt ẩn phụ]

a. $x(x+1)(x-1)(x+2)=24.$

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)=180.$

Bài 11: Giải các phương trình:

[PP đặt ẩn phụ]

a. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0.$

b. $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)=24.$

Bài 12: Chứng minh rằng phương trình sau vô nghiệm: $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ (1)

Bài 13: Giải các phương trình:

(Tự luyện)

a) $(x-1)^2=2(x^2-1)$

b) $2(x+2)^2-x^3-8=0$

c) $(x-1)(x^2+5x-2)-x^3+1=0$

d) $(x-3)^2=(2x+7)^2$

e) $\frac{3}{7}x-1=\frac{1}{7}x(3x-7)$

f) $(x^2-2)(4x-3)=(x^2-2)(x-12)$

g) $(x+2)(3-4x)=x^2+4x+4$

h) $x^2-3x+2=0$

i) $x^2+7x+12=0$

j) $x^2-3x-10=0$

k) $x^2+2x-15=0$

l) $2x^2-5x+3=0$

m) $3x^2-5x-2=0$

n) $x^3+1=x(x+1)$

o) $x^3+x^2+x+1=0$

p) $x^3-3x^2-3x+9=0$

Bài 14: Giải các phương trình sau:

- a) $(2x+1)^2 - 2x - 1 = 2;$
- b) $(x^2 - 3x)^2 + 5(x^2 - 3x) + 6 = 0;$
- c) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x) - 2 = 0.$
- d) $(5 - 2x)^2 + 4x - 10 = 8;$
- e) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 1) = 3;$
- f) $x(x - 1)(x^2 - x + 1) - 6 = 0.$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $x(x + 1) = 0$ có các nghiệm là:

- A. $x = 1; x = 0 ;$
- B. $x = 1; x = -1 ;$
- C. $x = -1; x = 0 ;$
- D. $x = 1$

Câu 2: $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

- A. $x - 1 = 0$ hoặc $x + 2 = 0 ;$
- B. $x - 1 = 0 ;$
- C. $x - 1 = 0$ hoặc $x - 2 = 0 ;$
- D. $x + 2 = 0 .$

Câu 3: Phương trình $(3 - x)(2x - 5) = 0$ có tập nghiệm là :

- A. $S = \{- 3; 2, 5\} ;$
- B. $S = \{- 3; -2, 5\} ;$
- C. $S = \{ 3; 2, 5\} ;$
- D. $S = \{3; -2, 5\} .$

Câu 4: $(4 + x)(4x + 5) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{- 4; 1, 25\}$: A. Đúng ; B. Sai .

Câu 5: $(2x + 3)(3 - x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{- 1, 5; 3\}$: A. Đúng ; B. Sai

Câu 6: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng:

A	B
1) $(5 - x)x = 0$ có tập nghiệm là	a) $S = \{- 2; 1; 2\}$
2) $(x - 1)(x + 2)(x - 2) = 0$ có tập nghiệm là	b) $S = \{- 2; 3\}$
3) $(3x - 9)(2 + x) = 0$ có tập nghiệm là	c) $S = \{0; 5\}$
1) 2) 3)	d) $S = \{-2; 5\}$

Câu 7: Điền vào chỗ trống để được kết quả đúng:

a) $(3x - 6)(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6 = \dots\dots\dots$ hoặc $\dots\dots\dots$

b) $x^2 + 5x - 6 = 0 \iff x = \dots\dots\dots$ hoặc $x = \dots\dots\dots$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: KQ: a) $S = \left\{-5; \frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{-3}{5}; \frac{8}{3}\right\}$ d) $S = \{-3; 4\}$

Bài 2: KQ: a) $S = \{-3; 3; 4\}$ b) $S = \left\{-5; \frac{-3}{5}\right\}$; c) $S = \left\{\frac{5}{2}; \frac{17}{6}\right\}$

Bài 3: KG: a) $S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$ b) $S = \{-3; 5\}$ c) $S = \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{15}{4}; 7\right\}$

Bài 4: KQ: a) $S = \{-5; -2; 1\}$ b) $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right\}$ d) $S = \left\{0; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$

Bài 6: KQ: a) $S = \{-5; -1\}$ b) $S = \left\{\frac{-5}{8}; \frac{-1}{4}\right\}$ c) $S = \{-3; 1; 3\}$ d) $S = \{-2\}$

Bài 7: KQ: a) $S = \{-1\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \{-3; -2; 5\}$ d) $S = \{-6\}$

Bài 8: a) $\iff (x-3)(3x-2) = 0. S = \left\{\frac{2}{3}; 3\right\}$

b) $\iff (x-3)(-2x-1) = 0. S = \left\{\frac{-1}{2}; 3\right\}$

c) $\iff (x-1)(x+3) = 0. S = \{-3; 1\}$

d) $\iff (x+1)(x-5) = 0. S = \{-1; 5\}$

Bài 9: KQ: a) $\iff (x-1)(x+1)(2x^2+5) = 0. S = \{-1; 1\}$

b) $\iff x^2(x+1)(x-9) = 0. S = \{-1; 0; 9\}$

c) $\iff (x-4)(x-1)(x+1) = 0. S = \{-1; 1; 4\}$

d) $\iff (x+2)(x-1)(x^2+x+6) = 0. S = \{-2; 1\}$

Bài 10: HD: a. $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24$$

Đặt $x^2 + x = y$ ta được: $y(y-2) = 24 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow (y+4)(y-6) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

Với $y = -4 \Rightarrow x^2 + x + 4 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

$$\text{Với } y = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -3, x = 2$.

b. $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6) = 180$.

$$\Leftrightarrow [(x+2)(x-5)][(x+3)(x-6)] = 180$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 18) = 180$$

Đặt $x^2 - 3x - 14 = y$ ta được: $(y+4)(y-4) = 180 \Leftrightarrow y^2 = 196 \Leftrightarrow y = \pm 14$

$$\text{Với } y = -14 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 14 \Rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 7 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm là $x = -4, x = 0, x = 3, x = 7$.

Bài 11: HD:

a. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$ (1)

Đặt $x^2 - 5x = t$ khi đó (1) trở thành $t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow (t+4)(t+6) = 0 \Leftrightarrow t = -4$ hoặc $t = -6$

Với $t = -4$ ta có $x^2 - 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 4$

Với $t = -6$ ta có $x^2 - 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = 2; x = 3; x = 4$.

$$b. (x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24.$$

Đặt $x^2 + 5x = t$ khi đó (1) trở thành $t^2 - 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t+4)(t-6) = 0 \Leftrightarrow t = -4$ hoặc $t = 6$

Với $t = -4$ ta có $x^2 + 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -4$

Với $t = 6$ ta có $x^2 + 5x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -6$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 1; x = -1; x = -4; x = -6$.

Bài 12: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (1)

HD:

Nhân 2 vế của phương trình (1) với $x-1$, ta được:

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 = 1 \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm $x = 1$ nhưng giá trị này không thỏa mãn phương trình (1). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 13: KQ:

a) $S = \{-3; 1\}$

b) $S = \{-2; 0; 4\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \left\{-10; \frac{-4}{3}\right\}$

e) $S = \left\{1; \frac{7}{3}\right\}$

f) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -3\}$

g) $S = \left\{-2; \frac{1}{5}\right\}$

h) $S = \{1; 2\}$

i) $S = \{-3; -4\}$

j) $S = \{-2; 5\}$

k) $S = \{-5; 3\}$

l) $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$

m) $S = \left\{2; \frac{-1}{2}\right\}$

n) $S = \{-1; 1\}$

o) $S = \{-1\}$

p) $S = \{-3; 3\}$

Bài 14:

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta cần đặc biệt chú ý đến *điều kiện xác định* (ĐKXD) là tất cả các mẫu thức phải khác 0.

• **Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu**

Bước 1. Tìm ĐKXD của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4. Kiểm tra và kết luận.

II. BÀI TẬP

(Phần ĐKXD ở mỗi bài toán đều có vì vậy trong phiếu không đề cập dạng tìm ĐKXD)

Bài 1: Giải phương trình

$$\text{a) } \frac{4x-8+(4-2x)}{x^2+1} = 0 \quad \text{b) } \frac{x^2+2x+1}{x+1} = 0$$

$$\text{c) } \frac{2x-5}{x+5} = 3$$

$$\text{d) } \frac{4}{x-2} - 2 = 0$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{7x+7}{x-1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \frac{2}{1+x} = \frac{1}{3-7x}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3-x}{x-2}$$

$$\text{d) } \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} = \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6}$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3$$

$$\text{b) } 3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}$$

$$\text{c) } \frac{x+4}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$$

$$\text{e) } \frac{4x}{x^2+4x+3} - 1 = 6 \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2x+2} \right)$$

$$\text{f) } \frac{3}{4(x-5)} + \frac{15}{50-2x^2} = \frac{7}{6x+30}$$

$$\text{g) } \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

$$\text{h) } \frac{12x+1}{6x-2} - \frac{9x-5}{3x+1} = \frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}$$

$$\text{i) } x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{j) } \frac{1}{x} + 2 = \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 + 2)$$

$$k) \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$b) \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$c) \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x^2}{x^2+2x+2} + \frac{x^2}{x^2-2x+2} - \frac{4x^2-20}{x^4+4} = \frac{322}{65}$$

$$b) \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} = \frac{1}{8}$$

$$c) \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{5}{x^2+11x+24} + \frac{2}{x^2+18x+80} = \frac{9}{52}$$

$$d) \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$$

Bài 6: Tìm x sau cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau, với $A = x + \frac{1}{x}$; $B = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

(Cách giải khác của Bài 3 – câu i)

Bài 7: Tìm x sau cho biểu thức $\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2}$ có giá trị bằng 2.

Tự luyện

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{4x-3}{x-5} = \frac{29}{3}$$

$$b) \frac{2x-1}{5-3x} = 2$$

$$c) \frac{4x-5}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$$

$$d) \frac{7}{x+2} = \frac{3}{x-5}$$

$$e) \frac{2x+5}{2x} - \frac{x}{x+5} = 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$a) \frac{1}{1+x} = 5$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0$$

c) $1 + \frac{1}{2+x} = \frac{12}{x^3+8}$

d) $\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x^2+6x-16}{x-2} = x+8$

b) $3x - \frac{1}{x-2} = \frac{x-1}{2-x}$

c) $\frac{x^2-15x+1}{x+17} = x-2$

d) $\frac{x-1}{x-2} - 3 + x = \frac{1}{x-2}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{8}{x-8} + \frac{11}{x-11} = \frac{9}{x-9} + \frac{10}{x-10}$

b) $\frac{x}{x-3} - \frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-6}$

c) $\frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 1 = 0$

d) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}$

Bài 5: Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{6x-1}{3x+2}$ và $\frac{2x+5}{x-3}$ bằng nhau.**Bài 6:** Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3}$ và $\frac{-8}{(x-1)(x-3)}$ bằng nhau.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình chứa ẩn ở mẫu là:

A. $x + 5x^2 - 3 = 0$;

B. $2x + 5 = 0$;

C. $3x^2 + 5x - 8 = 0$;

D. $x + \frac{3}{x+5} = 15$

Câu 2: ĐKXĐ của phương trình $\frac{x+3}{2x} = \frac{3x-5}{4x-9}$ là:

A. $x \neq 0$ và $x \neq -2,25$;

B. $x \neq 0$;

C. $x \neq 0$ và $x \neq 2,25$;

D. $x \neq -2,25$

Câu 3: Điều kiện xác định của phương trình $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}$ là :

A. $x \neq 4$

B. $x \neq -4$

C. $x \neq 4$ và $x \neq -4$

D. Xác định với mọi x thuộc R.

Câu 4: Phương trình $\frac{2x+1}{2} = \frac{x^2-2}{x}$ có tập nghiệm là:

A. $S = \{-2\}$;

B. $S = \{-4\}$;

C. $S = \{-1\}$;

D. $S = \{-1; 3\}$.

Câu 5: $\frac{2x+1}{2+x} = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow x(2x+1) = (x-2)(2+x)$ (ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $x \neq -2$)

A. Đúng ; B. Sai .

Câu 6: $\frac{x+3}{2+x} = \frac{x-2}{x} \Leftrightarrow x^2+3x = x^2+2$ A. Đúng ; B. Sai .

Câu 7: Giải phương trình $5 + \frac{96}{x^2-16} = \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x}$ ta được nghiệm là :

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

Câu 8: Giải phương trình $x - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{x}{2}$ ta được nghiệm là :

A. $x = \frac{1}{3}$ B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{4}$ D. $x = \frac{5}{4}$

Câu 9: Giải phương trình $\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x-3)(x+1)}$ ta được nghiệm là :

A. $x = 4$ B. $x = -1$ C. $x = 0$ D. Vô nghiệm

Câu 10: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng:

A	B
1) $\frac{x}{1+x} = \frac{x}{x-1}$ có ĐKXĐ là:	a) $x \neq -5$ và $x \neq 2$
2) $\frac{1}{2+x} = \frac{x}{2x+1}$ có tập nghiệm là	b) $x \neq -1$ và $x \neq 1$
3) $\frac{x}{5+x} = \frac{x^2}{x-2}$ có ĐKXĐ là:	c) $S = \{-1; 1\}$
1) 2) 3)	d) $S = \{-1; 3\}$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:

$$a) \frac{4x-8+(4-2x)}{x^2+1} = 0$$

Điều kiện: $x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ vì
 $x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{4x-8+(4-2x)}{x^2+1} &= 0 \\ \Rightarrow 4x-8+(4-2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Vậy $S = \{2\}$

$$c) \frac{2x-5}{x+5} = 3$$

Điều kiện: $x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{x+5} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+5} &= \frac{3 \cdot (x+5)}{x+5} \\ \Rightarrow 2x-5 &= 3 \cdot (x+5) \\ \Leftrightarrow 2x-5 &= 3x+15 \\ \Leftrightarrow x &= 20 \text{ (nhận)}. \text{ Vậy } S = \{20\} \end{aligned}$$

Bài 2: Hướng dẫn giải

$$a) \frac{7x-7}{x-1} = \frac{2}{3} \text{ (ĐK } x \neq 1)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3(7x-7) &= 2(x-1) \\ \Leftrightarrow 21x+21 &= 2x-2 \\ \Leftrightarrow 19x &= -23 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-23}{19} \text{ (tm)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{-23}{19} \right\}$$

$$b) \frac{x^2+2x+1}{x+1} = 0$$

Điều kiện: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+1}{x+1} &= 0 \\ \Rightarrow x^2+2x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \text{ (loại)} \\ \text{Vậy } S &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$d) \frac{4}{x-2} - 2 = 0$$

Điều kiện: $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-2} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - \frac{2 \cdot (x-2)}{x-2} &= 0 \\ \Rightarrow 4 - 2 \cdot (x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 2x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x &= -8 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \text{ (nhận)}. \text{ Vậy } S = \{4\} \end{aligned}$$

$$b) \frac{2}{1+x} = \frac{1}{3-7x} \text{ (ĐK } x \neq -1; x \neq \frac{3}{7})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 6 - 14x &= x + 1 \\ \Leftrightarrow 15x &= 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \text{ (tm)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{1}{x-2} + 3 &= \frac{3-x}{x-2} \text{ (ĐK } x \neq 2) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} &= \frac{3-x}{x-2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1+3x-6}{x-2} &= \frac{3-x}{x-2} \\
 \Leftrightarrow 3x-5 &= 3-x \\
 \Leftrightarrow 4x &= 8 \\
 \Leftrightarrow x &= 2 \text{ (loại)} \\
 \text{Vậy } S &= \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4} &= \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} \text{ (ĐK } x \neq 4) \\
) \\
 \Leftrightarrow \frac{14}{3(x-4)} - \frac{2+x}{x-4} &= \frac{3}{2(4-x)} - \frac{5}{6} \\
 \Leftrightarrow \frac{56-24-12x}{12(x-4)} &= \frac{-18-10x+40}{12(x-4)} \\
 \Leftrightarrow 32-12x &= 58-10x \\
 \Leftrightarrow -26 &= 2x \\
 \Leftrightarrow x &= -13 \text{ (tm)} \\
 \text{Vậy } S &= \{-13\}
 \end{aligned}$$

Bài 3: KQ:

$$\text{a) } \frac{4}{x-1} - \frac{5}{x-2} = -3 \quad (1) \quad \text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Mẫu chung: $(x-1)(x-2)$

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned}
 \frac{4(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{5(x-1)}{(x-2)(x-1)} &= \frac{-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\
 \Rightarrow 4(x-2) - 5(x-1) &= -3(x-1)(x-2) \\
 \Leftrightarrow 4x - 8 - 5x + 5 &= -3(x^2 - 3x + 2) \\
 \Leftrightarrow -x - 3 &= -3x^2 + 9x - 6 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3x(x-3) - (x-3) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-3)(3x-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (nhận). Vậy } S &= \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Giải ra nghiệm $\begin{cases} x = 2 & (l) \\ x = \frac{-1}{3} & (t/m) \end{cases}$. Vậy $S = \left\{ \frac{-1}{3} \right\}$

c) Điều kiện $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Tập nghiệm $S = \{-4\}$

d) Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Giải ra nghiệm $\begin{cases} x = 2 & (l) \\ x = 3 & (t/m) \end{cases}$. Vậy $S = \{3\}$

e) Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$. Giải ra nghiệm $\begin{cases} x = 0 & (t/m) \\ x = -3 & (l) \end{cases}$. Vậy $S = \{0\}$

f) Điều kiện: $\begin{cases} x + 5 \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq 5 \end{cases}$. Giải ra nghiệm $x = 5$ (loại). Vậy $S = \{\emptyset\}$

g) Điều kiện: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ vì $x^2 + x + 1 > 0 \forall x$.

Giải ra nghiệm $\begin{cases} x = 0 & (t/m) \\ x = 1 & (l) \end{cases}$. Vậy $S = \{0\}$

h) Điều kiện: $\begin{cases} 3x - 1 \neq 0 \\ 3x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq \frac{-1}{3} \end{cases}$. Giải ra tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

i) Điều kiện: $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Điều kiện: $x \neq 0$. Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, phương trình trở thành $t^2 - t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t(t + 1) - 2(t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2 = 0 \\ t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta có } x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Với } t = -1, \text{ ta có } x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 1 = -x \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô nghiệm) vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$$

$$\text{Vậy } S = \{1\}$$

j) Điều kiện: $x \neq 0$. Dùng pp nhóm giải ra nghiệm $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$

$$\text{k) } \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - 1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \text{ Điều kiện: } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + 1 + \frac{1}{x} + x - 1 - \frac{1}{x}\right) \left(x + 1 + \frac{1}{x} - x + 1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x \left(2 + \frac{2}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 + \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = -1 \text{ (t/m)} \end{cases} \cdot \text{Vậy } S = \{-1\}$$

Bài 4:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)} \text{ ĐKXĐ: } x \neq 0$$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1).x - (x-1)(x^2+x+1)x = 3$$

$$\Leftrightarrow (x^3+1)x - (x^3-1)x = 3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (t/m)}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là } S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

$$b) \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

ĐKXĐ: $x \neq -4, x \neq -5, x \neq -6, x \neq -7$

$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow (x+7) \cdot 18 - (x+4) \cdot 18 = (x+4)(x+7)$$

$$\Leftrightarrow 18x + 126 - 18x - 72 = x^2 + 11x + 28 \Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+13) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -13 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2; -13\}$

$$c) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}. \text{ Đặt } x^2 - 2x + 2 = t, t > 0$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2}$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t+2) + 2t(t+2) = 6t(t+1) \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 + 2t^2 + 4t = 6t^2 + 6t$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (3t+2)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-3}{2} (l) \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1\}$

$$\text{Bài 5: a) } \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} - \frac{4x^2 - 20}{x^4 + 4} = \frac{322}{65} \quad (1)$$

Điều kiện với mọi $x \in R$

$$\text{Ta có } x^4 + 4 = (x^2)^2 + 2^2 = (x^2 + 2)^2 - 2 \cdot 2x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{65x^2(x^2 - 2x + 2)}{65(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)} + \frac{65x^2(x^2 + 2x + 2)}{65(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} - \frac{65(4x^2 - 20)}{65(x^4 + 4)}$$

$$= \frac{322(x^4 + 4)}{65(x^4 + 4)}$$

$$\Rightarrow 65x^4 - 130x^3 + 130x^2 + 65x^4 + 130x^3 + 130x^2 - 260x^2 + 1300 = 322x^4 + 1288$$

$$\Leftrightarrow 130x^4 + 1300 = 322x^4 + 1288 \Leftrightarrow 192x^4 = 12 \Leftrightarrow x^4 = \frac{12}{192} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$$

$$b) \frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} = \frac{1}{8}$$

$$\text{ĐK: } x \neq \{-2; -3; -4; -6; 6\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x+6)}{8(x+2)(x+6)} - \frac{8(x+2)}{8(x+6)(x+2)} = \frac{(x+6)(x+2)}{8(x+6)(x+2)}$$

$$\Rightarrow 8x + 48 - 8x - 16 = x^2 + 8x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow x(x-2) + 10(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-10 \end{cases} \text{ (nhận). Vậy } S = \{2; -10\}$$

$$c) \frac{2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{5}{x^2 + 11x + 24} + \frac{2}{x^2 + 18x + 80} = \frac{9}{52}$$

$$\text{ĐKXD: } x \neq \{-1; -3; -8; -10\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x+3)(x+1)} + \frac{5}{(x+8)(x+3)} + \frac{2}{(x+8)(x+10)} = \frac{9}{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+8} + \frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{52} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{52(x+10)}{52(x+1)(x+10)} - \frac{52(x+1)}{52(x+1)(x+10)} = \frac{9(x+10)(x+1)}{52(x+1)(x+10)}$$

$$\Rightarrow 52(x+10) - 52(x+1) = 9(x+10)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 52x + 520 - 52x - 52 = 9x^2 + 99x + 90$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 99x - 378 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 11x - 42 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-14 \end{cases} \text{ (nhận). Vậy } S = \{3; -14\}$$

d) $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} + 6$ Điều kiện $x \neq \pm 1; x \neq 2$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{5}{x-1} + 1 + \frac{-5}{x+1} = 1 + \frac{10}{x-2} + 1 + \frac{-10}{x+2} + 6$$

$$\Leftrightarrow 5 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \right) - 10 \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2} \right) = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \cdot 2}{(x-1)(x+1)} - \frac{10 \cdot 4}{(x-2)(x+2)} = 6$$

$$\Rightarrow 10(x^2 - 4) - 40(x^2 - 1) = 6(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 40 - 40x^2 + 40 = 6(x^4 - 5x^2 + 4) \Leftrightarrow 6x^4 + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x^4 + 4) = 0 \text{ (vô nghiệm) vì } x^4 + 4 > 0 \forall x. \text{ Vậy } S = \{\emptyset\}$$

Bài 6: (Cách giải khác của Bài 3 – câu i)

Ta có $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$. Điều kiện: $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} - x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + x - x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x^4 - x^3) + (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1-x^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 1-x^3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (nhận)}$$

Bài 7: Biểu thức có giá trị bằng 2 tức là $\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} = 2$. Ta sẽ đi giải phương trình này.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x-5 \neq 0 \\ 3x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-9)(3x-2)}{(2x-5)(3x-2)} + \frac{3x(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)} = \frac{2 \cdot (3x-2)(2x-5)}{(3x-2)(2x-5)}$$

$$\Rightarrow (2x-9)(3x-2) + 3x(2x-5) = 2 \cdot (3x-2)(2x-5)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 4x - 27x + 18 + 6x^2 - 15x = 12x^2 - 30x - 8x + 20 \Leftrightarrow -8x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{4} \text{ (nhận)}$$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

06. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH.

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Các bước để giải toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình

- Đặt ẩn số và điều kiện cho ẩn phù hợp.
- Biểu diễn các dữ kiện bài toán chưa biết thông qua ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình đã lập.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện và đưa ra kết luận của bài toán

II. BÀI TẬP

Bài 1: Hiệu hai số là 12. Nếu chia số bé cho 7 và lớn cho 5 thì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai là 4 đơn vị. Tìm hai số đó.

Bài 2: Hai thư viện có cả thảy 15000 cuốn sách. Nếu chuyển từ thư viện thứ nhất sang thư viện thứ hai 3000 cuốn, thì số sách của hai thư viện bằng nhau. Tính số sách lúc đầu ở mỗi thư viện.

Bài 3: Số công nhân của hai xí nghiệp trước kia tỉ lệ với 3 và 4. Nay xí nghiệp 1 thêm 40 công nhân, xí nghiệp 2 thêm 80 công nhân. Do đó số công nhân hiện nay của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11. Tính số công nhân của mỗi xí nghiệp hiện nay.

Bài 4: Tính tuổi của hai người, biết rằng cách đây 10 năm tuổi người thứ nhất gấp 3 lần tuổi của người thứ hai và sau đây hai năm, tuổi người thứ hai sẽ bằng một nửa tuổi của người thứ nhất.

Bài 5: Một phòng họp có 100 chỗ ngồi, nhưng số người đến họp là 144. Do đó, người ta phải kê thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy ghế phải thêm 2 người ngồi. Hỏi phòng họp lúc đầu có mấy dãy ghế?

Bài 6: Đường sông từ A đến B ngắn hơn đường bộ là 10km, Ca nô đi từ A đến B mất 2 giờ 20 phút, ô tô đi hết 2 giờ. Vận tốc ca nô nhỏ hơn vận tốc ô tô là 17km/h.

Bài 7: Một tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80km, cả đi lẫn về mất 8 giờ 20 phút.

Tính vận tốc của tàu thủy khi nước yên lặng? Biết rằng vận tốc dòng nước là 4 km/h.

Bài 8: Một Ôtô đi từ Lạng Sơn đến Hà Nội. Sau khi đi được 43km nó dừng lại 40 phút, để về Hà nội kịp giờ đã quy định, Ôtô phải đi với vận tốc 1,2 vận tốc cũ. Tính vận tốc trước biết rằng quãng đường Hà nội- Lạng Sơn dài 163km.

Bài 9: Hai Ô tô cùng khởi hành từ hai bến cách nhau 175 km để gặp nhau. Xe 1 đi sớm hơn xe 2 là 1 giờ 30 phút với vận tốc 30km/h. Vận tốc của xe 2 là 35km/h. Hỏi sau mấy giờ hai xe gặp nhau?

Bài 10: Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A, sau đó 5 giờ 20 phút một chiếc ca nô cũng chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền tại một điểm cách A là 20km.

Hỏi vận tốc của thuyền? Biết rằng ca nô chạy nhanh hơn thuyền 12km/h.

Bài 11: Một người đi xe đạp từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 50km. Sau đó 1 giờ 30 phút một xe máy cũng đi từ tỉnh A đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ. Tính vận tốc của mỗi xe? Biết rằng vận tốc xe máy gấp 2,5 vận tốc xe đạp.

Bài 12: Một người dự định đi xe đạp từ nhà ra tỉnh với vận tốc trung bình 12km/h. Sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc đó vì xe hỏng nên người đó chờ ô tô mất 20 phút và đi ô tô với vận tốc 36km/h do vậy người đó đến sớm hơn dự định 1 giờ 40 phút. Tính quãng đường từ nhà ra tỉnh?

Bài tập tự luyện

Bài 13: Một phân số có tử số nhỏ hơn mẫu số 11 đơn vị. Nếu tăng tử số lên 3 đơn vị và giảm mẫu số đi 4 đơn vị thì được một phân số bằng $\frac{3}{4}$. Tìm phân số ban đầu. Đ/S: $\frac{9}{20}$

Bài 14: Một ô tô đi từ Hà Nội lúc 8 giờ sáng và dự kiến đến Hải Phòng lúc 10 giờ 30 phút. Nhưng mỗi giờ ô tô đi chậm hơn so với dự kiến là 10km nên đến 11 giờ 20 phút xe mới tới Hải Phòng. Tính quãng đường Hà Nội – Hải Phòng. Đ/S: 100 km

Bài 15: Lúc 7 giờ sáng, một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B cách nhau 36km, rồi ngay lập tức trở về và đến bến A lúc 11 giờ 30 phút. Tính vận tốc ca nô khi xuôi dòng biết vận tốc dòng nước là 6km/h

Đ/S: Vận tốc ca nô xuôi dòng là 24 km/h.

Bài 16: Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến bến B mất 4 giờ và ngược dòng từ bến B về bến A mất 5 giờ. Tính khoảng cách giữa hai bến A và bến B, biết vận tốc dòng nước là 2km/h.

Đ/S: 80 (km).

Bài 17: Một đội thợ mỏ lập kế hoạch khai thác than, theo đó mỗi ngày phải khai thác được 50 tấn than. Khi thực hiện, mỗi ngày đội khai thác được 57 tấn than. Do đó, đội đã hoàn thành kế hoạch trước 1 ngày và còn vượt mức 13 tấn than. Hỏi theo kế hoạch, đội phải khai thác bao nhiêu tấn than? Đ/S: 500 tấn than

Bài 18: Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn nước, sau $4\frac{4}{9}$ giờ thì đầy bể. Mỗi giờ lượng nước vòi 1 chảy được bằng $1\frac{1}{4}$ lượng nước vòi 2 chảy. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể.

Đ/S: Vòi 1 chảy trong 8 giờ đầy bể, vòi 2 chảy riêng trong 10 giờ đầy bể

Bài 19: Cho một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm. Hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 2cm. Tìm diện tích của tam giác vuông.

Đ/S: Hai cạnh góc vuông của tam giác là 6 cm và 8cm. Diện tích của tam giác là 24cm^2 .

Bài 20: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng. Nếu tăng mỗi cạnh thêm 5m thì diện tích vườn tăng thêm 385m^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn trên.

Đ/S: Chiều rộng là 18 m và chiều dài là 54 m.

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Số thứ nhất là a , số thứ hai là 59; tổng của hai số bằng:

- A. $a - 59$; B. $a + 59$; C. $59a$; D. $a : 59$.

Câu 2: Vận tốc của một xe lửa là y (km/h), quãng đường xe lửa đi được trong thời gian 5 h 15 phút là:

- A. $y + 5,25$; B. $5,15 \cdot y$; C. $5,25 \cdot y$; D. $y : 5,25$.

Câu 3: Hình chữ nhật có chiều dài là a , chiều rộng là b ; diện tích của hình đó là:

- A. $a + b$; B. $(a + b) \cdot 2$; C. $a - b$; D. $a \cdot b$.

Câu 4: Tổng của hai số là 90, số này gấp đôi số kia. Hai số cần tìm là:

- A. 20 và 70 ; B. 30 và 60 ;
C. 40 và 50 ; D. 10 và 80.

Câu 5: Một vật có khối lượng riêng D , thể tích là V ; khối lượng của vật sẽ bằng $m = D \cdot V$:

- A. Đúng ; B. Sai .

Câu 6: Tổng của hai số bằng 40, hiệu của chúng là 10; Hai số đó là 30 và 10:

- A. Đúng ; B. Sai .

Câu 7: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng:

Tóm tắt các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình :

A	B
1) Bước 1	a) Giải phương trình
2) Bước 2	b) Trả lời
3) Bước 3	c) Lập phương trình

Câu 8: Một Canô có vận tốc t km/h đi trên dòng sông, biết vận tốc dòng chảy là 5km/h. Vận tốc (km/h) đi ngược dòng là:

- A. $t + 5$ B. $t - 5$ C. $t^2 - 5^5$ D. $\frac{(t + 5)}{2}$

Câu 9: Hai người cùng làm một công việc sau 24h thì xong. Một giờ hai người đó làm được

- A. $\frac{1}{24}$ (công việc) B. $\frac{2}{24}$ (công việc) C. 24 (công việc)

Câu 10: Quãng đường từ Hà Nội - Đèo Ngang là 675 km, một ô tô xuất phát ở Hà Nội lúc 7h30 đến Huế lúc 16h30, vận tốc của ô tô là

- A. 57 km/h B. 76 km/h C. 74 km/h D. 75 km/h

Câu 11: Cho 1 số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Nếu gọi chữ số hàng đơn vị là a ($0 < a \leq 9$) thì chữ số hàng chục là:

- A. $3a$ B. $a + 3$ C. $a - 3$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 12: Gọi x (km) là vận tốc của canô thứ nhất. Canô thứ hai có vận tốc nhanh hơn Canô thứ nhất là 4km/h. Khi đó vận tốc của canô thứ hai được biểu thị là (đơn vị km/h):

- A. $x - 4$ B. $x.4$ C. $x + 4$ D. $\frac{x}{4}$

Câu 13: Tuổi của Bố hiện nay là 45 tuổi, 5 năm trước tuổi của Bố là

- A. 50 tuổi B. 44 tuổi C. 35 tuổi D. 40 tuổi

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Gọi số bé là x .

Số lớn là $x + 12$.

Chia số bé cho 7 ta được thương là $\frac{x}{7}$.

Chia số lớn cho 5 ta được thương là: $\frac{x+12}{5}$

Vì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai 4 đơn vị nên ta có phương trình: $\frac{x+12}{5} - \frac{x}{7} = 4$

Giải phương trình ta được $x = 28$

Vậy số bé là 28.

Số lớn là: $28 + 12 = 40$.

Bài 2: Gọi số sách lúc đầu ở thư viện I là x (cuốn), x nguyên, dương.

Số sách lúc đầu ở thư viện II là: $15000 - x$ (cuốn)

Sau khi chuyển số sách ở thư viện I là: $x - 3000$ (cuốn)

Sau khi chuyển số sách ở thư viện II là:

$$(15000 - x) + 3000 = 18000 - x \quad (\text{cuốn})$$

Vì sau khi chuyển số sách 2 thư viện bằng nhau nên ta có phương trình:

$$x - 3000 = 18000 - x$$

Giải phương trình ta được: $x = 10500$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số sách lúc đầu ở thư viện I là 10500 cuốn.

Số sách lúc đầu ở thư viện II là: $15000 - 10500 = 4500$ cuốn.

Bài 3: Gọi số công nhân xí nghiệp I trước kia là x (công nhân), x nguyên, dương.

Số công nhân xí nghiệp II trước kia là $\frac{4}{3}x$ (công nhân).

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp I là: $x + 40$ (công nhân).

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp II là: $\frac{4}{3}x + 80$ (công nhân).

Vì số công nhân của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11 nên ta có phương trình:

$$\frac{x + 40}{8} = \frac{\frac{4}{3}x + 80}{11}$$

Giải phương trình ta được: $x = 600$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số công nhân hiện nay của xí nghiệp I là: $600 + 40 = 640$ công nhân.

Số công nhân hiện nay của xí nghiệp II là: $\frac{4}{3} \cdot 600 + 80 = 880$ công nhân.

Bài 4: Gọi số tuổi hiện nay của người thứ nhất là x (tuổi), x nguyên, dương.

Số tuổi người thứ nhất cách đây 10 năm là: $x - 10$ (tuổi).

Số tuổi người thứ hai cách đây 10 năm là: $\frac{x-10}{3}$ (tuổi).

Sau đây 2 năm tuổi người thứ nhất là: $x + 2$ (tuổi).

Sau đây 2 năm tuổi người thứ hai là: $\frac{x+2}{2}$ (tuổi).

Theo bài ra ta có phương trình phương trình như sau:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{x-10}{3} + 10 + 2$$

Giải phương trình ta được: $x = 46$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số tuổi hiện nay của người thứ nhất là: 46 tuổi.

Số tuổi hiện nay của người thứ hai là: $\frac{46+2}{2} - 2 = 12$ tuổi.

Bài 5: Gọi số dây ghế lúc đầu là x (dây), x nguyên dương.

dây ghế sau khi thêm là: $x + 2$ (dây).

Số ghế của một dây lúc đầu là: $\frac{100}{x}$ (ghế).

Số ghế của một dây sau khi thêm là: $\frac{144}{x+2}$ (ghế).

Vì mỗi dây ghế phải thêm 2 người ngồi nên ta có phương trình: $\frac{144}{x+2} - \frac{100}{x} = 2$

Giải phương trình ta được $x = 10$ (thỏa mãn đk)

Vậy phòng họp lúc đầu có 10 dây ghế.

Bài 6: Gọi vận tốc của ca nô là x km/h ($x > 0$).

Vận tốc của ô tô là: $x + 17$ (km/h).

Quãng đường ca nô đi là: $\frac{10}{3}x$ (km).

Quãng đường ô tô đi là $2(x + 17)$ (km).

Vì đường sông ngắn hơn đường bộ 10km nên ta có phương trình:

$$2(x + 17) - \frac{10}{3}x = 10$$

Giải phương trình ta được $x = 18$.(thỏa mãn đk).

Vậy vận tốc ca nô là 18 km/h. Vận tốc ô tô là $18 + 17 = 35$ (km/h).

Bài 7: Gọi vận tốc của tàu khi nước yên lặng là x km/h ($x > 0$)

Vận tốc của tàu khi xuôi dòng là: $x + 4$ km/h

Vận tốc của tàu khi ngược dòng là: $x - 4$ km/h

Thời gian tàu đi xuôi dòng là: $\frac{80}{x+4}$ h

Thời gian tàu đi ngược dòng là: $\frac{80}{x-4}$ h

Vì thời gian cả đi lẫn về là 8h 20 phút = $\frac{25}{3}$ h nên ta có phương trình: $\frac{80}{x+4} + \frac{80}{x-4} = \frac{25}{3}$

Giải phương trình ta được: $x_1 = \frac{-4}{5}$ (loại) $x_2 = 20$ (tmđk) . Vậy vận tốc của tàu khi nước yên lặng là 20 km/h

Bài 8: Gọi vận tốc lúc đầu của ô tô là x km/h ($x > 0$)

Vận tốc lúc sau là $1,2x$ km/h

Thời gian đi quãng đường đầu là: $\frac{163}{x}$ h

Thời gian đi quãng đường sau là: $\frac{100}{x}$ h

Theo bài ra ta có phương trình $\frac{43}{x} + \frac{2}{3} + \frac{100}{x} = \frac{163}{x}$

Giải phương trình ta được $x = 30$ (tmđk)

Vậy vận tốc lúc đầu của ô tô là 30 km/h.

Bài 9: Gọi thời gian đi của xe 2 là x (giờ) ($x > 0$)

Thời gian đi của xe 1 là $x + \frac{3}{2}$ (giờ)

Quãng đường xe 2 đi là: $35x$ km

Quãng đường xe 1 đi là: $30\left(x + \frac{3}{2}\right)$ km

Vì 2 bến cách nhau 175 km nên ta có phương trình: $30\left(x + \frac{3}{2}\right) + 35x = 175$

Giải phương trình ta được $x = 2$ (tmđk)

Vậy sau 2 giờ xe 2 gặp xe 1.

Bài 10: Gọi vận tốc của thuyền là x (km/h)

Vận tốc của ca nô là $x = 12$ (km/h)

Thời gian thuyền đi là: $\frac{20}{x}$

Thời gian ca nô đi là: $\frac{20}{x+12}$

Vì ca nô khởi hành sau thuyền 5h20' và đuổi kịp thuyền nên ta có phương trình

$$\frac{x}{20} - \frac{20}{x+12} = \frac{16}{3}$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = -15$ (không thỏa mãn); $x_2 = 3$ (tmđk)

Vậy vận tốc của thuyền là 3 km/h.

Bài 11: Gọi vận tốc của người đi xe đạp là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc người đi xe máy là: $\frac{5x}{2}$ km/h

Thời gian người đi xe đạp đi là: $\frac{50}{x}$ h

Thời gian người đi xe máy đi là: $\frac{20}{x}$ h

Do xe máy đi sau 1h30' và đến sớm hơn 1h nên ta có phương trình: $\frac{50}{x} = \frac{20}{x} + \frac{3}{2} + 1$

Giải phương trình ta được $x = 12$ (tmđk)

Vậy vận tốc người đi xe đạp là 12km/h.

Bài 12: Phân tích bài toán:

Đây là dạng toán chuyển động $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ quãng đường của chuyển động, có thay đổi vận tốc và đến sớm, có nghỉ. Bài yêu cầu tính quãng đường AB thì gọi ngay quãng đường AB là x km ($x > 0$). Chuyển động của người đi xe đạp xảy ra mấy trường hợp sau:

- + Lúc đầu đi $\frac{1}{3}$ quãng đường bằng xe đạp.
- + Sau đó xe đạp hỏng, chò ô tô (đây là thời gian nghỉ)
- + Tiếp đó người đó lại đi ô tô ở $\frac{2}{3}$ quãng đường sau.
- + Vì thế đến sớm hơn so với dự định.

- Học sinh cần điền thời gian dự định đi, thời gian thực đi hai quãng đường bằng xe đạp, ô tô, đổi thời gian nghỉ và đến sớm ra giờ.

- Công thức lập phương trình:

$$t_{\text{dự định}} = t_{\text{đi}} + t_{\text{ngủ}} + t_{\text{đến sớm}}$$

- Phương trình là: $\frac{x}{12} = \frac{x}{36} + \frac{x}{52} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3}$

Đáp số: $55\frac{1}{17}$ km.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

MỘT SỐ BÀI TẬP KHÔNG ĐÁP ÁN

Bài 1. Năm 1994, bố 39 tuổi, con 9 tuổi. Hỏi năm nào thì tuổi bố gấp 3 lần tuổi con?

Bài 2. Học kỳ I, số học sinh giỏi của lớp 8A bằng $\frac{1}{8}$ số học sinh cả lớp. Đến học kỳ II, có thêm 3 bạn phấn đấu trở thành học sinh giỏi nữa, do đó số học sinh giỏi bằng 20% số học sinh cả lớp. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu học sinh?

Bài 3. Số quyển sách ở ngăn I bằng $\frac{2}{3}$ số quyển sách ở ngăn II. Nếu lấy bớt 10 quyển ở ngăn II và thêm 20 quyển vào ngăn I thì số quyển sách ở ngăn II bằng $\frac{5}{6}$ số quyển sách ở ngăn I. Tính số quyển sách ở mỗi ngăn lúc đầu?

Bài 4. Có hai kho chứa hàng. Nếu chuyển 100 tấn hàng từ kho I sang kho II thì số tấn hàng ở 2 kho bằng nhau. Nếu chuyển 100 tấn từ kho II sang kho I thì số tấn hàng ở kho II sẽ bằng $\frac{5}{13}$ số tấn hàng ở kho I. Tính số tấn hàng ở mỗi kho lúc đầu.

Bài 5. Hai bể nước chứa 800 lít và 1300 lít. Người ta tháo ra cùng một lúc ở bể thứ nhất 15 lít/phút, bể thứ hai 25 lít/phút. Hỏi sau bao lâu số nước ở bể thứ nhất bằng $\frac{2}{3}$ số nước ở bể thứ hai?

Bài 6. Tiểu sử của nhà toán học cổ đại nổi tiếng Diophante (Đi – ô – phăng) được tóm tắt trên bia mộ của ông như sau: Hỡi người qua đường! Đây là nơi chôn cất di hài của Diophante, người mà một phần sáu cuộc đời là tuổi niên thiếu huy hoàng; một phần mười hai cuộc đời nữa trôi qua, trên cỏ đã mọc râu lún phún. Diophante lấy vợ, một phần bảy cuộc đời trong cảnh vợ chồng hiếm hoi. Năm năm trôi qua, ông sung sướng khi có cậu con trai đầu lòng khôi ngô. Nhưng cậu ta chỉ sống được bằng nửa cuộc đời đẹp đẽ của cha. Rút cục thì với nỗi buồn thương sâu sắc, ông chỉ sống thêm được 4 năm nữa từ sau khi cậu ta lìa đời”. Tính tuổi thọ của Diophante.

Bài 7. Bốn số tự nhiên có tổng bằng 1998. Biết rằng nếu lấy số I bớt đi 2, số II thêm 2, số III chia cho 2 và số IV nhân với 2 thì được kết quả bằng nhau. Tìm bốn số đó.

Bài 8. Tìm hai số nguyên, biết hiệu của hai số đó là 99. Nếu chia số bé cho 3 và chia số lớn cho 11 thì thương I lớn hơn thương II là 7 đơn vị.

Bài 9. Tìm hai số nguyên dương biết tỉ số của hai số đó là $\frac{4}{7}$. Nếu chia số bé cho 9 và chia số lớn cho 6 thì thương thứ nhất nhỏ hơn thương thứ hai 13 đơn vị.

Bài 10. Tìm một phân số có tử nhỏ hơn mẫu 22 đơn vị, biết rằng nếu thêm 5 đơn vị vào tử và bớt đi 2 đơn vị ở mẫu thì được phân số mới bằng $\frac{4}{5}$.

Bài 11. Tìm một phân số nhỏ hơn 1, có tử và mẫu là hai số nguyên dương và có tổng của tử và mẫu là 32, biết rằng nếu tăng mẫu thêm 10 đơn vị và giảm tử đi một nửa, thì được phân số mới bằng phân số $\frac{2}{17}$.

Bài 12. Chu vi một miếng đất hình chữ nhật bằng 80m. Nếu giảm chiều rộng 3m và tăng chiều dài 8m thì diện tích tăng thêm 32m². Tính kích thước miếng đất.

Bài 13. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều dài bằng $\frac{3}{2}$ chiều rộng. Nếu giảm mỗi chiều đi 4m thì diện tích giảm đi 164m². Tính kích thước miếng đất.

Bài 14. Chu vi hình vuông I dài hơn chu vi hình vuông II là 12m; còn diện tích thì lớn hơn 135m². Tính cạnh của mỗi hình vuông.

Bài 15. Tính kích thước của một hình chữ nhật có chu vi là 20cm và diện tích là 24cm².

Bài 16. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E (BE < AB). Vẽ hình vuông BEFG (G ∈ BC). Tính cạnh của mỗi hình vuông, biết tổng chu vi của hai hình vuông là 64cm và tổng diện tích của hai hình vuông là 130cm².

Bài 17. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 140m. Người ta làm một lối đi chung xung quanh vườn có chiều rộng lối đi là 1m và diện tích vườn còn lại là 1064m². Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

Bài 18. Tìm một số có hai chữ số, biết tổng hai chữ số là 10 và nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số mới lớn hơn số cần tìm 18 đơn vị.

Bài 19. Tìm một số có hai chữ số. Biết tỉ số giữa chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng chục là $\frac{2}{3}$. Nếu viết thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số thì được số mới lớn hơn số đã cho 540 đơn vị.

Bài 20. Một số thập phân có phần nguyên là số có hai chữ số. Nếu viết thêm chữ số 4 vào bên trái số đó, sau đó chuyển dấu phẩy sang trái hai chữ số thì được số mới bằng 33% số ban đầu. Tính số thập phân lúc đầu.

Bài 21. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Vận tốc của ô tô I bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của ô tô II. Nếu ô tô I tăng vận tốc 5km/h, còn ô tô II giảm vận tốc 5km/h thì sau 5 giờ, quãng đường ô tô I đi được ngắn hơn quãng đường ô tô II đã đi là 25km. Tính vận tốc mỗi ô tô.

Bài 22. Ô tô I đi từ A đến B. Nửa giờ sau, ô tô II đi từ B đến A với vận tốc gấp rưỡi vận tốc ô tô I. Sau đó 45 phút 2 ô tô gặp nhau. Tính vận tốc mỗi ô tô, biết quãng đường AB dài 95km.

Bài 23. Ô tô I đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc 40km/h. Sau đó 1 giờ, ô tô II đi từ B đến A với vận tốc 65km/h. Hai ô tô gặp nhau khi ô tô I mới đi được $\frac{2}{5}$ quãng đường AB. Tính quãng đường AB.

Bài 24. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h và quay từ B về A với vận tốc 40km/h. Tính vận tốc trung bình của ô tô.

Bài 25. Lúc 6 giờ một ô tô khởi hành từ A. Lúc 7 giờ 30 phút, ô tô II cũng khởi hành từ A với vận tốc lớn hơn vận tốc ô tô I là 20km/h và gặp ô tô I lúc 10 giờ 30 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài 26. Hai người cùng khởi hành một lúc từ A đến B, đường dài 60km. Vận tốc người I là 12km/h, vận tốc người II là 15km/h. Hỏi sau lúc khởi hành bao lâu thì người I cách B một quãng đường gấp đôi khoảng cách từ người II đến B.

Bài 27. Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 100km. Ba mươi phút sau một người đi ô tô cũng từ tỉnh A đến B với vận tốc bằng $\frac{3}{2}$ vận tốc của xe máy. Tính vận tốc của mỗi người, biết người đi ô tô đến B trước người đi xe máy 20 phút.

Bài 28. Ba người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Vận tốc của người I hơn vận tốc của người III là 2km/h. Vận tốc của người III bằng trung bình cộng vận tốc của người I và người II. Tính vận tốc của mỗi người, biết thời gian đi hết quãng đường AB của người I ít hơn người II là 1 giờ.

Bài 29. Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 50km/h. Đi được 24 phút thì gặp đường xấu nên vận tốc trên quãng đường còn lại giảm còn 40km/h. Vì vậy đã đến nơi chậm mất 18 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 30. Lúc 7 giờ, anh Việt đi xe đạp từ A đến B dài 30km. Trong 18km đầu tiên anh đi với vận tốc lớn hơn vận tốc đi trong đoạn đường còn lại là 2km/h và thời gian đi trong 18km đầu nhiều hơn thời gian đi đoạn đường còn lại là 18 phút. Hỏi anh Việt đến B lúc mấy giờ?

Bài 31. Anh Nam đi xe đạp từ A đến B với vận tốc 12km/h. Đi được 6km, xe đạp hư, anh Nam phải đi bằng ô tô và đã đến B sớm hơn dự định 45 phút. Tính quãng đường AB, biết vận tốc của ô tô là 30km/h.

Bài 32. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A để đến B dài 120km. Ô tô I đi với vận tốc không đổi trong suốt quãng đường AB. Ô tô II đi với vận tốc lớn hơn vận tốc của ô tô I là 5km/h trong phân nửa của quãng đường AB và đi với vận tốc nhỏ hơn 4km/h so với ô tô I trong quãng đường còn lại. Hai ô tô đến B cùng một lúc. Tính thời gian đã đi của mỗi ô tô.

Bài 33. Một đội máy cày dự định một ngày cày 40ha. Khi thực hiện, mỗi ngày cày được 52ha. Vì vậy không những đã cày xong trước 2 ngày mà còn cày thêm 4ha nữa. Tính diện tích ruộng mỗi đội phải cày theo kế hoạch đã định.

Bài 34. Một tổ sản xuất dự định phải làm một số dụng cụ trong 30 ngày. Do mỗi ngày đã vượt năng suất so với dự định 10 dụng cụ nên không những đã làm thêm được 20 dụng cụ mà tổ đó còn làm xong trước thời hạn 7 ngày. Tính số dụng cụ mà tổ sản xuất đó phải làm theo kế hoạch.

Bài 35. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 2 giờ bể đầy. Mỗi giờ lượng nước vòi I chảy được bằng $\frac{3}{2}$ lượng nước chảy được của vòi II. Hỏi mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu đầy bể?

Bài 36. Hai ô tô khởi hành cùng lúc ngược chiều nhau và gặp nhau sau 4 giờ. Ô tô I đi từ A với vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của ô tô II đi từ B. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB thì mất bao lâu?

Bài 37. Một ca nô xuôi dòng từ A đến B mất 5 giờ và ngược dòng từ B đến A mất 6 giờ. Tính khoảng cách AB? Biết rằng vận tốc dòng nước là 2km/h.

Bài 38. Hai bến sông A và B cách nhau 40km. Cùng một lúc với ca nô xuôi dòng từ bến A có chiếc bè trôi từ bến A với vận tốc 3km/h. Sau khi đến B, ca nô trở về bến A ngay và gặp bè khi bè đã trôi được 8km. Tính vận tốc riêng của ca nô.

Bài 39. Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B mất 8 giờ và ngược dòng từ B về A mất 10 giờ. Hỏi một chiếc bè trôi từ A đến B mất mấy giờ?

Bài 40. Một vòi nước chảy vào bể không có nước. Cùng lúc đó một vòi chảy từ bể ra. Mỗi giờ lượng nước chảy ra bằng $\frac{4}{5}$ lượng nước chảy vào. Sau 5 giờ, nước trong bể đạt tới $\frac{1}{8}$ dung tích bể. Hỏi nếu bể không có nước và chỉ mở vòi chảy vào thì sau bao lâu đầy bể?

Bài 41. Hai người cùng làm một công việc trong 3 giờ 20 phút thì xong. Nếu người I làm 3 giờ và người II làm 2 giờ thì tất cả được $\frac{4}{5}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong bao lâu thì xong công việc đó?

Bài 42. Hai công nhân cùng làm chung thì trong 12 giờ sẽ hoàn thành xong một công việc. Họ làm chung với nhau trong 4 giờ thì người I chuyển đi làm việc khác, người II tiếp tục làm hết công việc trong 10 giờ. Hỏi người II làm một mình thì bao lâu hoàn thành xong công việc?

Bài 43. Người ta đặt một vòi nước chảy vào một bể nước và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả 2 vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra, mở vòi chảy vào thì sau một giờ rưỡi đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh gấp 2 lần vòi chảy ra. Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

Nếu chiều cao bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Bài 44. Có hai vòi nước khác nhau cùng chảy vào bể. Thời gian để vòi I chảy một mình đầy bể ít hơn thời gian để vòi II chảy một mình đầy bể là 2 giờ. Tích hai thời gian đó bằng 4 lần thời gian cần cho cả hai vòi cùng chảy đầy bể. Tính thời gian để mỗi ngày chảy một mình đầy bể.

Bài 45. Một cửa hàng bán trứng trong một số ngày. Ngày thứ nhất cửa hàng bán 150 quả trứng và $\frac{1}{9}$ số còn lại, ngày thứ hai bán 200 quả và $\frac{1}{9}$ số trứng còn lại, ngày thứ ba bán 250

quả trứng và $\frac{1}{9}$ số còn lại ... Cứ bán như vậy cho đến khi hết số trứng thì mỗi ngày bán bằng nhau. Hỏi số trứng đó có tất cả bao nhiêu quả.

Bài 46. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô cùng đi từ A đến B, khởi hành lần lượt lúc 6 giờ, 7 giờ, 8 giờ với vận tốc theo thứ tự là 10km/h, 30km/h và 40km/h. Hỏi lúc mấy giờ thì ô tô ở giữa và cách đều người đi xe đạp và người đi xe máy.

Bài 47. Trên một quãng đường AB của một thành phố cứ 6 phút thì lại có một chiếc xe bus đi theo chiều từ A đến B, và cũng cứ 6 phút thì lại có một chiếc xe bus đi theo chiều ngược lại. Các xe này chuyển động đều với một vận tốc như nhau và không thay đổi trong suốt thời gian chuyển động. Một khách du lịch đi bộ từ A đến B nhận thấy cứ 5 phút lại gặp một xe đi từ B về phía mình. Hỏi cứ bao nhiêu phút lại có một xe đi từ A vượt qua người đó ?

Bài 48. Một tàu thủy chạy trên khúc sông dài 80 km, cả đi và về hết 8 giờ 20 phút. Biết vận tốc dòng nước là 4 km/giờ. Tính vận tốc tàu thủy khi nước yên lặng.

Bài 49. Một nông dân có một mảnh ruộng hình vuông. Ông ta khai hoang mở rộng thêm thành một mảnh ruộng hình chữ nhật, một bề thêm 8m, một bề thêm 12m. Diện tích mảnh ruộng hình chữ nhật hơn diện tích mảnh ruộng hình vuông 3136 m². Hỏi độ dài cạnh của mảnh ruộng hình vuông ban đầu bằng bao nhiêu?

Bài 50. Một công nhân nhà máy quạt phải ráp một số quạt trong 1818 ngày. Vì đã vượt định mức mỗi ngày 88 chiếc nên chỉ sau 1616 ngày anh đã ráp xong số quạt được giao và còn ráp thêm được 2020 chiếc quạt nữa. Hỏi mỗi ngày anh ta ráp được bao nhiêu quạt?

1. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nếu số a không nhỏ hơn số b , thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là a **lớn hơn hoặc bằng** b , ký hiệu $a \geq b$
- Nếu số a không lớn hơn số b thì phải có hoặc $a < b$ hoặc hoặc $a = b$. Khi đó ta nói gọn là a **nhỏ hơn hoặc bằng** b , ký hiệu $a \leq b$
- Ta gọi hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b; a \leq b; a \geq b$) là bất đẳng thức và a được gọi là **vế trái**, b là **vế phải** của bất đẳng thức.
- Ta gọi $a < b$ và $c < d$ là hai bất đẳng thức **cùng chiều**; còn hai bất đẳng thức $m < n$ và $p > q$ là hai bất đẳng thức **ngược chiều**.
- Với ba số a, b và c ta có

Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$; nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$; nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$

Hay phát biểu bằng lời: **Khi cộng cùng một số vào cả hai vế của bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.**

- Với ba số dương a, b và c ta thấy rằng nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$. Tính chất này gọi là tính chất bắc cầu.

Tương tự các thứ tự lớn hơn ($>$); nhỏ hơn hoặc bằng (\leq), lớn hơn hoặc bằng (\geq) cũng có tính chất bắc cầu.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) $5 + (-8) < 3$

b) $(-3) \cdot (-7) > (-5) \cdot (-4)$

c) $(-7)^2 - 9 \leq (-10) \cdot (-4)$

c) $x^2 + 1 \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2: Cho $a < b$ hãy so sánh

a) $a + 3$ và $b + 3$

b) $a - 2$ và $b - 2$

c) a và $b + 1$

d) $a - 2$ và $b + 1$

Bài 3: So sánh $a; b$ nếu:

a) $a - 4 \geq b - 4$

b) $5 + a \leq 5 + b$

c) $a + 9 < b + 9$

c) $a - 17 > b - 17$

Bài 4: Sắp xếp các số sau từ lớn đến bé và biểu diễn trên trục số:

- a) $-7; -8; -1; -5; 0, 3, 8;$
- b) $-\frac{3}{5}; -\frac{1}{2}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{5}; 1.$

Bài 5: Cho $x - 8 > 9$. Chứng minh $x + 3 > 20$.

Bài 6: Cho $x + 5 > 15$. Chứng minh $x - 2 > 8$.

Bài 7: So sánh x và 0 trong mỗi trường hợp sau:

- a) $x - 8 \leq -8;$
- b) $|-x^2| + x > x^2$

Bài 8: Cho $a > b$. Chứng minh $a + 2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20 > b + 108$.

Tự luyện:

Bài 1: Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

- a) $-3.(2) > 6$
- b) $5 - \frac{1}{5} < -\frac{1}{5} + 5$
- c) $|-4| + 3 \leq 7;$
- d) $-x^2 - 1 \leq 0$

Bài 2: So sánh x và y trong mỗi trường hợp sau:

- a) $x - \frac{5}{3} \leq y - \frac{5}{3};$
- b) $-5 - x > -y - 5$

Bài 3: Cho $a < b$ hãy so sánh

- a) $a + 26$ và $b + 26$
- b) $a - 4$ và $b - 4$
- c) a và $b + 4$
- d) $a - 6$ và $b + 3$

TRẮC NGHIỆM

Hãy chọn chỉ một chữ cái đứng trước câu trả lời đúng (trừ câu 2)

Câu 1: Số a không lớn hơn số b. Khi đó ta kí hiệu

- A. $a > b$
- B. $a < b$
- C. $a \geq b$
- D. $a \leq b$

Câu 2: Khi cộng cùng một số vào cả 2 vế của một bất đẳng thức ta được một bất đẳng thức mới với bất đẳng thức đã cho.

Câu 3: Biết bạn An nặng hơn bạn Huy, nếu gọi trọng lượng của bạn An là a(kg), trọng lượng bạn Huy là b. Khi đó ta có:

- A. $a < b$
- B. $a \geq b$
- C. $a > b$
- D. $a \leq b$

Câu 4: Các bất đẳng thức sau đúng hay sai?

Nội dung	Đ	S
A. $(-3) + 5 \geq 3$		
B. $4 + (-7) < 13 + (-7)$		
C. $-3 > 2 \cdot (-1)$		
D. $a^2 + 2 < 2$		

Câu 5: Một bạn giải bài toán như sau:

Cộng -2006 vào cả hai vế của bất đẳng thức $2005 < 2006$ ta suy ra

$2005 + (-2006) \square 2006 + (-2006)$ phương án điền vào ô trống là:

- A. '<'
- B. '>'
- C. '≤'
- D. '≥'

Câu 6: Cho bất đẳng thức $2007 - 2006 > -2006$. Khi đó $2007 - 2006$ gọi là

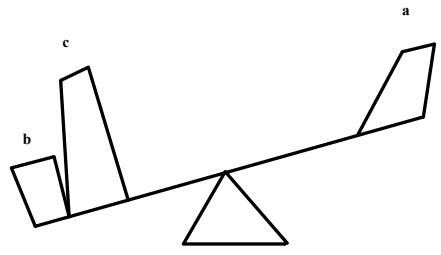
- A. Đẳng thức
- B. Biểu thức
- C. Vế trái
- D. Vế phải.

Câu 7: Phương án nào là bất đẳng thức

- A. $2a < b$
- B. $2a = b$
- C. $2a = b + 2a + b$
- D. $2a : b$

Câu 8: Cho hình vẽ, coi a,b,c là khối lượng của các vật nặng.khi đó ta biểu diễn:

- A. $a > b + c$
- B. $b + c > a$
- C. $b + c > a$ b +c=a
- D. Tất cả các trường hợp đều sai



KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) Đúng vì $5 + (-8) = (-3) < 3$

b) Đúng vì $(-3) \cdot (-7) = 21 > (-5) \cdot (-4) = 20$

c) Đúng vì $(-7)^2 - 9 = 40 \leq (-10) \cdot (-4) = 40$

d) Đúng vì $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ (cùng cộng với một số)

Bài 2: HD: Ta có $a < b$

a) $a + 3 < b + 3$ (cùng cộng với 3)

b) $a - 2 < b - 2$ (cùng cộng với (-2))

c) $a + 1 < b + 1$ (cùng cộng với 1).

Vậy $a < a + 1 < b + 1 \Rightarrow a < b + 1$ (tính chất bắc cầu)

d) Tương tự có: $a - 2 < a + 1 < b + 1$

Bài 3: HD: a) $a - 4 \geq b - 4 \Leftrightarrow a \geq b$ (cùng cộng với 4)

b) $5 + a \leq 5 + b \Leftrightarrow a \leq b$ (cùng cộng với (-5))

c) $a + 9 < b + 9 \Leftrightarrow a < b$ (cùng cộng với (-9))

d) $a - 17 > b - 17 \Leftrightarrow a > b$ (cùng cộng với 17)

Bài 4: HD:

a) Thứ tự sắp xếp: 8; 3; 0; -1; -5; -7; -8 (tự biểu diễn)

b) Thứ tự sắp xếp: $\sqrt{5}; \sqrt{2}; 1; 0; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}$

Bài 5: HD: $x - 8 > 9 \Leftrightarrow x - 8 + 11 > 11 + 9 \Leftrightarrow x + 3 > 20$

Bài 6: HD: $x + 5 > 15 \Leftrightarrow x + 5 + (-7) > 15 + (-7) \Leftrightarrow x - 2 > 8$

Bài 7: HD: a) $x - 8 \leq -8 \Leftrightarrow x - 8 + 8 \leq (-8) + 8 \Leftrightarrow x \leq 0$

b) $|-x^2| + x > x^2 \Leftrightarrow x^2 + x > x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - x^2 > x^2 - x^2 \Leftrightarrow x > 0$

Bài 8: HD: Tính tổng: $2 + 4 + 6 + \dots + 18 + 20 = \frac{(20+2)}{2} : [(20-2) : 2 + 1] = 11 \cdot 10 = 110$

$a > b \Leftrightarrow 108 + a > 108 + b \Leftrightarrow 110 + a > 108 + b$

2. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Với ba số a, b, c mà $c > 0$ ta có:
 - + Nếu $a > b$ thì ; nếu $a \geq b$ thì $ac \geq bc$;
 - + Nếu $a < b$ thì $ac < bc$; Nếu $a \leq b$ thì $ac \leq bc$.
- Khi nhân (hay chia) cả hai vế của bất đẳng thức với cùng **một số dương** ta được bất đẳng thức mới **cùng chiều** với bất đẳng thức đã cho.
- Với ba số a, b, c mà $c < 0$ ta có:
 - + Nếu $a > b$ thì $ac < bc$; nếu $a \geq b$ thì $ac \leq bc$;
 - + Nếu $a < b$ thì $ac < bc$; Nếu $a \leq b$ thì $ac \geq bc$.
- Khi nhân (hay chia) cả hai vế bất đẳng thức với cùng **một số âm** ta được bất đẳng thức mới **ngược chiều** với bất đẳng thức đã cho.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Hãy xét xem các khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

- a) $(-13).(-5) > (-13).2$;
- b) $\frac{x^2}{2} \geq 0$;
- c) $\left| -\frac{3}{5} \right|.3 < 3.\left| \frac{5}{3} \right|$;
- d) $7 + (-3).5 > 7 + (-5).(-3)$.

Bài 2: Cho $a > b$, hãy so sánh:

- a) $-3a + 4$ và $-3b + 4$
- b) $2 + 3a$ và $2 + 3b$
- c) $2a - 3$ và $2b - 3$
- d) $2a - 4$ và $2b + 5$

Bài 3: Số a là âm hay dương nếu:

- a) $-8a > 4a$;
- b) $6a \leq 12a$;
- c) $-6a \geq -12a$;
- d) $-5a > 15a$

Bài 4: So sánh a và b nếu:

- a) $2a + 2018 < 2b + 2018$
- b) $2018a - 2019 \geq 2018b - 2019$
- c) $-2018 - 5a > -2018 - 5b$
- d) $(m^2 + 1)a - 9 \leq (m^2 + 1)b - 9$

Bài 5: Cho a, b, c, d, e thuộc \mathbb{R} . Chứng minh rằng:

a) $a^2 - a + 1 > 0$

b) $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) + 1 > 0$

c) $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$.

Bài 6: Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$; với $a, b \geq 0$

c) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

d) $a^4 + 3 \geq 4a$

Bài 7: Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (1). Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

b) $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Tự luyện

Bài 1: Số a là số âm hay dương nếu:

a) $-123a < -124a$

b) $345a > 346a$

c) $(n-67)a < (n-68)a$

d) $(n^2+87)a < (n^2+88)a$

Bài 2: Cho m bất kỳ, chứng minh:

a) $m-3 > m-4$

b) $2m-5 < 2m+1$

c) $7-3m < 3(3-m)$

Bài 3: Cho $a > b > 0$ chứng minh 1) $a^2 > ab$

2) $ab > b^2$ 3) $a^2 > b^2$

Bài 4: Cho $x < y$ hãy so sánh:

a) $2x+1$ và $2y+1$

b) $2-3x$ và $2-3y$

c) $\frac{x}{3}+5$ và $\frac{y}{3}+5$

Bài 5: Cho $a > b$ chứng minh:

a) $2a-3 > 2b-3$

b) $2a-5 > 2b-8$

c) $7-3a < 3(3-b)$

Bài 6: Cho a, b bất kỳ, chứng minh:

1) $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

2) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$

3) $a^2 + b^2 - ab \geq 0$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Hãy chọn chỉ một chữ cái đứng trước câu trả lời đúng

Câu 1: Nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng 1 số dương ta được

- A. Một bất đẳng thức bằng với bất đẳng thức đã cho.
- B. Ngược chiều với bất đẳng thức đã cho
- C. Lớn hơn bất đẳng thức đã cho
- D. Cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Câu 2: Điền dấu ($<$, $>$, $=$) thích hợp vào ô trống:

a) $2005 \cdot (-10) \quad \square \quad 2006 \cdot (-10) \qquad \text{b) } 9^{2006} \cdot (-9^{2006}) \quad \square \quad 0$

Câu 3: Nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với cùng 1 số âm ta được

- A. Ngược chiều với bất đẳng thức đã cho
- B. Lớn hơn bất đẳng thức đã cho
- C. Cùng chiều với bất đẳng thức đã cho
- D. Một bất đẳng thức bằng với bất đẳng thức đã cho

Câu 4: Chia cả hai vế của bất đẳng thức $-2a < -2b$ cho -2 ta được

- A. $a < b$
- B. $a > b$
- C. $-a < -b$
- D. $-a > -b$

Câu 5: Nhân cả hai vế của bất đẳng thức $-a \leq -b$ với -2 ta được

- A. $-2a \geq -2b$
- B. $2a \geq 2b$
- C. $-2a \leq -2b$
- D. $2a < 2b$

Câu 6: Nhiệt độ ở thành phố Sơ-un là -3^0C ; ở thành phố Thượng Hải là -1^0C . nếu tăng nhiệt độ ở hai thành phố này gấp ba lần thì:

- A. Nhiệt độ ở Sơ-un lạnh hơn
- B. Nhiệt độ ở Thượng Hải lạnh hơn
- C. Nhiệt độ ở Sơ - un bằng ở Thượng Hải
- D. Nhiệt độ ở Thượng Hải lạnh hơn và bằng ở Thượng Hải.

Câu 7: Cho m, n dương và $n > m$, một học sinh chứng minh $n - 1998 < m - 1999$ như sau:

$$(1) \quad n < m \Leftrightarrow n - 1999 < m - 1999$$

(2) mà $n - 1999 > n - 1998$

(3) nên $m + 1999 > n - 1998$. Bạn đó đã làm đúng chưa? Nếu sai thì

- A. Sai từ bước 1
- B. Sai từ bước 2
- C. Sai từ bước 3
- D. tất cả các bước đều sai.

Câu 8: Cho $-2019a > -2019b$, so sánh a và b ta được

- A. $a < b$
- B. $a \geq b$
- C. $a \leq b$
- D. $a > b$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

- Bài 1:** a) Khẳng định đúng vì $65 > -26$ b) Khẳng định đúng vì $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- c) Khẳng định đúng. vì $\frac{9}{5} < 5$ d) Khẳng định sai vì $-8 < 22$

- Bài 2:** a) $a > b \Leftrightarrow -3a < -3b \Leftrightarrow -3a + 4 < -3b + 4$
- b) $a > b \Leftrightarrow 3a > 3b \Leftrightarrow 3a + 2 > 3b + 2$
- c) $a > b \Leftrightarrow 2a > 2b \Leftrightarrow 2a - 3 > 2b - 3$
- d) $2a - 4 < 2b - 4 < 2b + 5$

- Bài 3:** HD:a) $-8 < 4 \Rightarrow -8a > 4a$ khi và chỉ khi $a < 0$
- b) $a > 0$ c) $a > 0$ d) $a < 0$

- Bài 4:** a) $a < b$ b) $a \geq b$ c) $a < b$ d) $a \leq b$

- Bài 5:** a) $(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0, \forall a$
- b) $(a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 4) + 1 = (a^2 + 5a + 4).(a^2 + 5a + 5) + 1$

Đặt $a^2 + 5a + 4 = t$, ta được $t(t+1) + 1 = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall t$.

$$c) (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

Áp dụng BĐT Bunhia ta có: $(a+b)^2 = (1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) = 2(a^2 + b^2)$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

$$d) a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c).$$

Ta có: $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

Tương tự: $b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$

Nên: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c = 2(a+b+c)$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 6: HD:

$$a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0; \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

$$b) \Leftrightarrow \frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$c) \Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a-b) \geq 0$$

$$d) \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2 + 2a + 3) \geq 0$$

Bài 7: HD: $\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow a < b$

$$\Leftrightarrow (a-b)c < 0 \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ac + ab < bc + ab \Rightarrow a.(b+c) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$a) \text{ Sử dụng (1), ta được: } \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c};$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$$

Cộng các BĐT về theo vế, ta được đpcm.

$$b) \text{ Sử dụng tính chất phân số, ta có: } \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c}$$

Tương tự: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}; \quad \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c};$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{d+b}$$

Cộng các BĐT về theo về ta được đpcm.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Bất phương trình ẩn x có dạng $f(x) < g(x)$ hay $f(x) > g(x); f(x) \geq g(x); f(x) \leq g(x)$ trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức cùng biến x.
- Tập hợp tất cả các nghiệm của bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình. Giải bất phương trình là tìm tập hợp nghiệm của bất phương trình đó.
- Người ta gọi hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương và dùng ký hiệu " \Leftrightarrow " để chỉ sự tương đương đó

III. BÀI TẬP

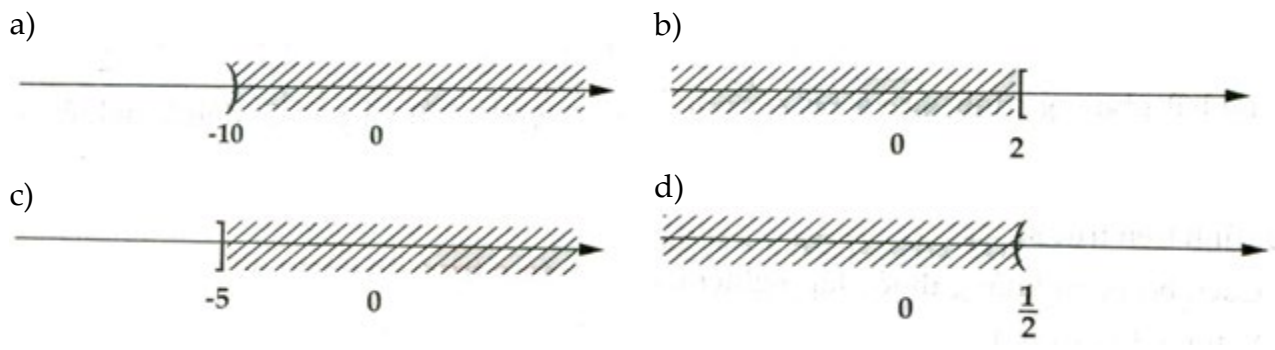
Bài 1: Kiểm tra xem giá trị $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau:

- a) $2x + 3 < 9$ b) $2x + 7 < 1 - 3x$ c) $5 - x > 3x - 7$ d) $x^2 > 5 - 4x$

Bài 2: Viết và biểu diễn tập nghiệm trên trục số của mỗi bất phương trình sau

- a) $x < 5$ b) $x \leq -4$ c) $x > -5$ d) $x \geq 6$

Bài 3: Hình vẽ dưới đây biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?



Bài 4: Các cặp bất phương trình sau đây có tương đương không? Vì sao?

- a) $x \leq 3$ và $2x \leq 6$; b) $x^2 + 3 > 0$ và $|3x + 1| < -1$
- c) $2 + x > 4$ và $-x < -2$; d) $(x^2 + 1)x \geq 0$ và $2x^4 \geq 0$.

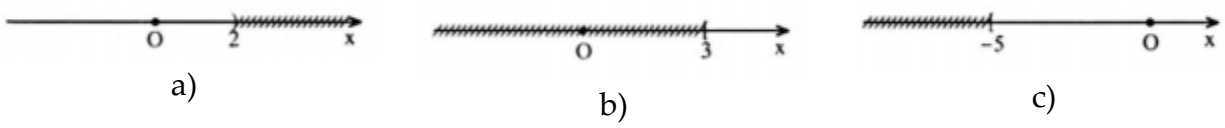
Bài 5: Cho hai bất phương trình $x + 5 \geq |m^2 + 2m| + 12$ và $x \geq 7$. Tìm m để hai bất phương trình tương đương.

Tự luyện:

Bài 1: Biểu diễn tập nghiệm của các bất phương trình sau trên trục số

- a) $x > 5$ b) $x \leq 3$ c) $x < -4$ d) $x \leq 0$

Bài 2: Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?



Bài 3: Các bất phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

- a) $2x - 3 > 5$ và $x > 4$
- b) $x^2 + 1 > 0$ và $-x^2 - 1 < 0$
- c) $3x + 4 > -3$ và $2x + 1 < 5$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $x = 4$ Là một nghiệm của bất phương trình ?

- A. $2x+5 < 13$
- B. $- 3x > 5x + 16$
- C. $4x + 7 > 19$
- D. $5x - 4 < 11$

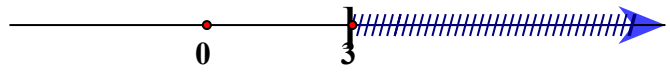
Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình: $x > 6$ là ?

- A. $S = \{x | x < 6\}$
- B. $S = \{x | x = 7\}$
- C. $S = \{x | x \geq 6\}$
- D. $S = \{x | x > 6\}$

Câu 3: Bất phương trình: $x > 5$ Tương đương với bất phương trình ?

- A. $x < 5$
- B. $x < 5$
- C. $5 \leq x$
- D. $x \geq 5$

Câu 4: Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào?



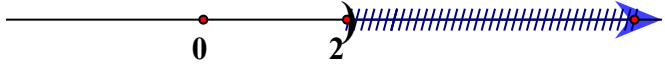
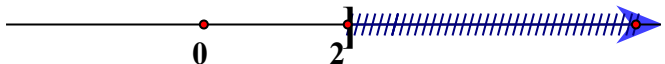
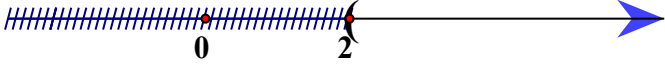
- A. $x \leq 3$
- B. $x < 3$
- C. $x \geq 3$
- D. $x > 3$

Câu 5: $x < 7 \Leftrightarrow 7 < x$ A. Đúng B. Sai

Câu 6: $x \geq 5 \Leftrightarrow 5 \leq x$ A. Đúng B. Sai

Câu 7: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được hình biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đó ?

A	B
a) $x \leq 2$	<p>1)</p>

b) $x \geq 2$	2) 
c) $x > 2$	3) 
a) ---; b) -----; c) -----	4) 

Câu 8: Điền vào chỗ để được kết quả đúng .

“ Bất phương trình $5x + 3 < 9$ ” có:

Vế trái là

Vế phải là

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) Thay $x = 4$ vào bất phương trình ta có $2.4 + 3 < 9$ (vô lý). Vậy $x = 4$ không phải là nghiệm của bất phương trình.

Tương tự

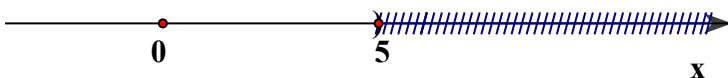
b) $x = 4$ không phải là nghiệm của bất phương trình

c) $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình

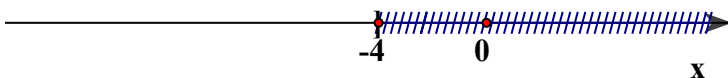
d) $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình

Bài 2:

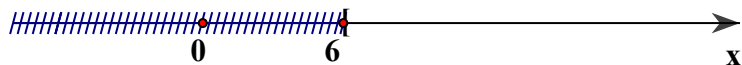
a) $x < 5$



b) $x \leq -4$



c) $x > -5$



d) $x \geq 6$



Bài 3: HD: a) $x < -10$ b) $x \geq 2$. c) $x \leq -5$ v d) $x > \frac{1}{2}$

Bài 4: HD: a) Tập nghiệm của BPT $x \leq 3$ là $S_1 = \{x | x \leq 3\}$

Tập nghiệm của BPT $2x \leq 6$ là $S_2 = \{x | x \leq 3\}$

Vì $S_1 = S_2$ nên hai BPT trên tương đương

b) Tập nghiệm của BPT $x^2 + 3 > 0$ là $S_1 = \mathbb{R}$

Tập nghiệm của BPT $|3x+1| < -1$ là $S_2 = \emptyset$

Vì $S_1 \neq S_2$ nên hai BPT không tương đương.

c) Tương đương $S_1 = S_2 = \{x | x > 2\}$

d) Không tương đương vì $S_1 = \{x | x \geq 0\} \neq S_2 = \mathbb{R}$

Bài 5:

HD:

Ta biến đổi BPT $x+5 \geq |m^2+2m|+12$ thành $x \geq |m^2+2m|+7$. Hai BPT tương đương

$\Leftrightarrow |m^2+2m|+7 = 7$

Giải ra ta được $m = 0$ hoặc $m = -2$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b < 0$ (hay $ax + b > 0$; $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho và $a \neq 0$
- Khi **chuyển một hạng tử** của bất phương trình từ vế này sang vế kia thì ta **phải đổi dấu hạng tử** đó.

Ví dụ: $ax + b > c \Leftrightarrow ax > (-b) + c$

- Khi **nhân hai vế** của bất phương trình với cùng **một số khác 0** ta phải:

- **Giữ nguyên chiều** của bất phương trình nếu **số đó dương**

- **Đổi chiều** của bất phương trình nếu **số đó âm**

Ví dụ: $a > b \Leftrightarrow a.c > b.c$ với $c > 0$ và $a > b \Leftrightarrow a.c < b.c$ với $c < 0$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Hãy xét xem các bất phương trình sau có là bất phương trình bậc nhất một ẩn hay không?

a) $0x + 8 \geq 0$; b) $x - 6 < 0$; c) $\frac{1}{3}x \leq 0$; d) $\frac{x^2}{5} + 4 > 0$.

e) $-3|x| + 3 > 0$; f) $\frac{x}{4} - \frac{5}{2} = 0$; g) $\frac{1}{x} + 2 \leq 0$; h) $\frac{-7x - 2}{3} \geq 0$.

Bài 2: Chứng minh các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn với mọi giá trị của tham số m :

a) $(m^2 + 3)x + 1 \leq 0$; b) $-(m^2 + m + 4)x > -2m + 3$

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $2x - 8 > 0$; b) $9 - 3x \leq 0$; c) $5 - \frac{1}{3}x < 1$; d) $\frac{3x + 5}{2} - x \geq 1 + \frac{x + 2}{3}$

Bài 4: Giải các bất phương trình sau và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

a) $\frac{x - 2}{3} - x - 2 \leq \frac{x - 17}{2}$ b) $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 4}{4} \leq \frac{3x + 1}{6} - \frac{x - 4}{12}$

Bài 5: Giải các bất phương trình

a) $x^2 - 3x + 1 > 2(x - 1) - x(3 - x)$

b) $(x - 1)^2 + x^2 \leq (x + 1)^2 + (x + 2)^2$

c) $(x^2 + 1)(x - 6) \leq (x - 2)^3$

Bài 6: Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

$$a) \frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$$

$$b) \frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$$

$$c) \frac{4x-2}{3} - x + 3 \leq \frac{1-5x}{4}$$

$$d) \frac{x+4}{5} - x - 5 \geq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$$

$$e) \frac{5x^2-3}{5} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x(2x+3)}{2} - 5$$

$$f) \frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} > \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4}$$

$$g) 2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$$

$$h) x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$$

Bất phương trình dạng đặc biệt $\frac{x+a}{b} + \frac{x+c}{d} < \frac{x+e}{f} + \frac{x+g}{h}$

Phương pháp giải:

- Nếu $a+b=c+d=e+f=g+h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm 1.

- Nếu $a-b=c-d=e-f=g-h=k$. Ta cộng mỗi phân thức thêm -1.

- Sau đó quy đồng từng phân thức, chuyển về nhóm nhân tử chung đưa về dạng

$$(x-k) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h} \right) < 0.$$

Chú ý 1: Cần xét xem $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f} - \frac{1}{h} \right)$ là số âm hay dương để đưa ra đánh giá về dấu của

$(x-k)$.

Chú ý 2: Có thể mở rộng số phân thức nhiều hơn và tùy bài toán ta sẽ cộng hoặc trừ đi hằng số thích hợp.

Bài 7: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{6} + \frac{x+5}{3} > \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$

b) $\frac{x-2}{1007} + \frac{x-1}{1008} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$.

Bài 8: Giải các bất phương trình ẩn x sau:

a) $\frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$

b) $\frac{x-2}{2002} + \frac{x-4}{2000} < \frac{x-3}{2001} + \frac{x-5}{1999}$

c) $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c, (a, b, c > 0)$

Bài 9: Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

a) $-1 < \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2} < 1$,

b) $x-1 < \frac{2x-1}{3} - 1 < 2x+4$

Bài 10: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b) Tìm x để $A > 0$ **Bài 11:** Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?**Bài 12:** Một người đi bộ một quãng đường dài 18 km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi với vận tốc 5 km/h, về sau đi với vận tốc 4 km/h. Xác định độ dài đoạn đường mà người đó đã đi với vận tốc 5 km/h.**Tự luyện.****Bài 13:** Giải các bất phương trình sau:

a) $-2 - 7x > (3+2x) - (5-6x)$

b) $(x+2)^2 < 2x(x+2) + 4$

c) $\frac{2-x}{3} < \frac{3-2x}{5}$

d) $\frac{x-1}{4} - 1 \geq \frac{x+1}{3} + 8$

e) $\frac{2x+15}{9} \geq \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3}$

f) $\frac{x+1}{99} + \frac{x+4}{96} + \frac{x+5}{95} \geq -3$

g) $2x^2 + 5x + 7 < 0$

- KQ: a) $S = \{x \mid x < 0\}$ b) $x > 0$ hoặc $x < -2$
 c) $S = \{x \mid x < -1\}$ d) $S = \{x \mid x \leq -115\}$
 e) $S = \{x \mid x \leq 6\}$ f) $S = \{x \mid x \geq -100\}$
 g) Vây bất phương trình vô nghiệm.

Bài 14: Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình sau

$$\frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \geq \frac{3x+2}{2} \quad \text{và} \quad \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \geq \frac{3x-5}{6} \qquad \text{KQ: } x \leq 0$$

Bài 15: Cho biểu thức $B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x+3}\right)$

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn B
 b) Tìm x để $B < -1$

KQ: $B = \frac{-(3+x)}{x}$, b) $x > 0$

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giải bất phương trình : $x - 3 < 5$ ta được tập nghiệm là ?

- A. $S = \{x \mid x > 5\}$ B. $S = \{x \mid x < 8\}$ C. $S = \{x \mid x \leq 5\}$ D. $S = \{x \mid x > 8\}$

Câu 2: $3x > 7 \Leftrightarrow$

- A. $x > \frac{3}{7}$ B. $x < \frac{3}{7}$ C. $x > \frac{7}{3}$ D. $x < \frac{7}{3}$

Câu 3: $-2x < 4 \Leftrightarrow$

- A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$ C. $x \leq -2$ D. $x \geq -2$

Câu 4: Hình vẽ sau biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào ?



- A. $2x - 6 < 0$ B. $2x - 6 > 0$ C. $2x - 6 \leq 0$ D. $2x - 6 \geq 0$

Câu 5: $3x < -6 \Leftrightarrow -4x > 8$ A. Đúng B. Sai

Câu 6: $x + 75 < 7 \Leftrightarrow x - 1 < 2$ A. Đúng B. Sai

Câu 7: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
a) $S = \{x x \geq 2\}$ Là tập nghiệm của BPT	1) $2x + 4 < 0$
b) $S = \{x x < 1\}$ Là tập nghiệm của BPT	2) $-3x + 3 \geq 0$
c) $S = S = \{x x < -2\}$ Là tập nghiệm của BPT	3) $3x - 3 < 0$
	4) $6 - 3x \leq 0$

Câu 8: Điền vào chỗ để được kết quả đúng ?

$$5x + 3 > 2x + 6 \Leftrightarrow 5x - \dots > 6 - \dots \Leftrightarrow 3x > \dots \Leftrightarrow 3x : \dots > \dots \Leftrightarrow x > \dots$$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:a) Không, vì hệ số của ẩn x là 0

b) Có c) Có.

d) Không, vì x^2 là ẩn bậc hai chứ không phải bậc một.

e) Không, vì ẩn x nằm trong dấu giá trị tuyệt đối.

f) Không, vì dấu "=" thể hiện đó là phương trình.

h) Không, vì ẩn x nằm ở mẫu số.

h) Có.

Bài 2: ta chỉ ra hệ số $a \neq 0$

a) $m^2 + 3 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ b) $-\left(m^2 + m + 4\right) = -\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right] < 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Bài 3: a) $2x - 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > 8 \Leftrightarrow x > 4$.

b) $9 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -9 \Leftrightarrow x \geq 3$.

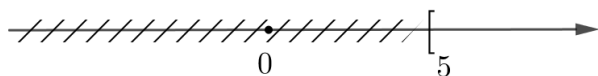
c) $5 - \frac{1}{3}x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x < -4 \Leftrightarrow x > 12$.

d) $\frac{3x+5}{2} - x \geq 1 + \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{6} \geq \frac{-5}{6} \Leftrightarrow x \geq -5$.

Bài 4: a) $\frac{x-2}{3} - x - 2 \leq \frac{x-17}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-2) - 6x - 6 \cdot 2}{6} \leq \frac{3(x-17)}{6} \Leftrightarrow 2x - 4 - 6x - 12 \leq 3x - 51$

$$\Leftrightarrow -4x - 16 \leq 3x - 51 \Leftrightarrow -4x - 3x \leq -51 + 16 \Leftrightarrow -7x \leq -35 \Leftrightarrow x \geq 5.$$

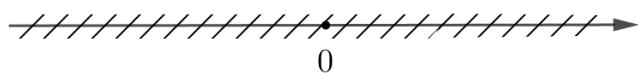
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{x \mid x \geq 5\}$ và được biểu diễn trên trục số như sau:



b) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{4} \leq \frac{3x+1}{6} - \frac{x-4}{12} \Leftrightarrow \frac{4(2x+1) - 3(x-4)}{12} \leq \frac{2(3x+1) - (x-4)}{12}$

$$\Leftrightarrow 8x + 4 - 3x + 12 \leq 6x + 2 - x + 4 \Leftrightarrow 5x + 16 \leq 5x + 6 \Leftrightarrow 5x - 5x \leq 6 - 16 \Leftrightarrow 0x \leq -10 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm và được biểu diễn trên trục số như sau:



Bài 5: a) $x^2 - 3x + 1 > 2(x-1) - x(3-x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 2x - 2 - 3x + x^2$

$$\Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}. \text{ Tập nghiệm của BPT là } S = \left\{ x \mid x < \frac{3}{2} \right\}$$

b) $(x-1)^2 + x^2 \leq (x+1)^2 + (x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 \leq 2x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow -8x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

Tập nghiệm của BPT là $S = \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{2} \right\}$

c) $(x^2 + 1)(x - 6) \leq (x - 2)^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + x - 6 \leq x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

$$\Leftrightarrow -11x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{11}$$

Tập nghiệm của BPT là $S = \left\{ x \mid x \geq \frac{2}{11} \right\}$

Bài 6:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{15 \cdot (x-1)}{30} - \frac{2 \cdot (7x+3)}{30} \leq \frac{10 \cdot (2x+1)}{30} + \frac{6 \cdot (3-2x)}{30}$$

$$\Leftrightarrow 15x - 15 - 14x - 6 \leq 20x + 10 + 18 - 12x$$

$$\Leftrightarrow x - 21 \leq 8x + 28 \Leftrightarrow 7x \geq -49 \Leftrightarrow x \geq -7. \text{ Vậy } S = \{x | x \geq -7\}.$$

$$\text{b) } \frac{2x+1}{-3} - \frac{2x^2+3}{-4} > \frac{x(5-3x)}{-6} - \frac{4x+1}{-5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x-1}{3} + \frac{2x^2+3}{4} > \frac{-x(5-3x)}{6} + \frac{4x+1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20 \cdot (-2x-1) + 15 \cdot (2x^2+3)}{60} > \frac{-10x \cdot (5-3x) + 12 \cdot (4x+1)}{60}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-40x-20+30x^2+45}{60} > \frac{-50x+30x^2+48x+12}{60}$$

$$\Leftrightarrow 30x^2 - 40x + 25 > 30x^2 - 2x + 12 \Leftrightarrow -38x > -13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{38}. \text{ Vậy } S = \left\{x \mid x < \frac{13}{38}\right\}$$

$$\text{c) } \frac{4x-2}{3} - x + 3 \leq \frac{1-5x}{4} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (4x-2) + 12 \cdot (-x+3)}{12} \leq \frac{3 \cdot (1-5x)}{12}$$

$$\Leftrightarrow 16x - 8 - 12x + 36 \leq 3 - 15x \Leftrightarrow 4x + 28 \leq 3 - 15x \Leftrightarrow 19x \leq -25 \Leftrightarrow x \leq \frac{-25}{19}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{x \mid x \leq \frac{-25}{19}\right\}$$

$$\text{d) } \frac{x+4}{5} - x - 5 \geq \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2} \Leftrightarrow \frac{6 \cdot (x+4) - 30 \cdot (x+5)}{30} \geq \frac{10 \cdot (x+3) - 15 \cdot (x-2)}{30}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 24 - 30x - 150 \geq 10x + 30 - 15x + 30$$

$$\Leftrightarrow -24x - 126 \geq -5x + 60 \Leftrightarrow -19x \geq 186 \Leftrightarrow x \leq \frac{-186}{19}. \text{ Vậy } S = \left\{x \mid x \leq \frac{-186}{19}\right\}$$

$$\text{e) } \frac{5x^2-3}{5} + \frac{3x-1}{4} < \frac{x(2x+3)}{2} - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot (5x^2-3) + 5 \cdot (3x-1)}{20} < \frac{10x \cdot (2x+3) - 5 \cdot 20}{20}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20x^2 - 12 + 15x - 5}{20} < \frac{20x^2 + 30x - 100}{20}$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 + 15x - 17 < 20x^2 + 30x - 100 \Leftrightarrow -15x < -83 \Leftrightarrow 15x > 83 \Leftrightarrow x > \frac{83}{15}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{x \mid x > \frac{83}{15}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{5x-2}{-3} - \frac{2x^2-x}{-2} &> \frac{x(1-3x)}{-3} - \frac{5x}{-4} \Leftrightarrow \frac{-5x+2}{3} + \frac{2x^2-x}{2} > \frac{-x+3x^2}{3} + \frac{5x}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{4(-5x+2) + 6(2x^2-x)}{12} &> \frac{4(-x+3x^2) + 3.5x}{12} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -20x + 8 + 12x^2 - 6x > -4x + 12x^2 + 15x$$

$$\Leftrightarrow -26x + 8 > 11x \Leftrightarrow -37x > -8 \Leftrightarrow 37x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{37}. \text{ Vậy } S = \left\{ x \mid x < \frac{8}{37} \right\}$$

$$\text{g) } 2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{10.2x + 5(2x+1)}{10} > \frac{3x.10 - 2}{10} \Leftrightarrow 20x + 10x + 5 > 30x - 2$$

$$\Leftrightarrow 0x > -7 \quad (\text{vô lý}) \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy } S = \emptyset.$$

$$\text{h) } x - \frac{5x}{6} - 3 > \frac{x}{3} - \frac{x}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x - 5x - 18}{6} > \frac{2x - x}{6} \Leftrightarrow x - 18 > x \Leftrightarrow 0x < -18 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy } S = \emptyset.$$

Bài 7:

$$\text{a) Cộng thêm 1 mỗi phân thức, ta có: } \frac{x+8}{6} + \frac{x+8}{3} > \frac{x+8}{5} + \frac{x+8}{2}$$

Từ đó tìm được $x < -8$.

$$\text{b) BPT tương đương: } \frac{2x-4}{2014} + \frac{2x-2}{2016} < \frac{2x-1}{2017} + \frac{2x-3}{2015}$$

$$\text{Cộng thêm } -1 \text{ mỗi phân thức, ta được: } (2x-2018) \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2015} \right) < 0.$$

Từ đó tìm được $x < 1009$.

$$\text{Bài 8: a) } \frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2004}{2005} - 1 + \frac{x+2005}{2006} - 1 < \frac{x+2006}{2007} - 1 + \frac{x+2007}{2008} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2005} + \frac{x-1}{2006} - \frac{x-1}{2007} - \frac{x-1}{2008} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 < 0 \text{ (do } \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1$.

b)

$$\frac{x-2}{2002} + \frac{x-4}{2000} < \frac{x-3}{2001} + \frac{x-5}{1999}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2002} - 1 + \frac{x-4}{2000} - 1 < \frac{x-3}{2001} - 1 + \frac{x-5}{1999} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2004}{2002} + \frac{x-2004}{2000} < \frac{x-2004}{2001} + \frac{x-2004}{1999}$$

$$\Leftrightarrow (x-2004) \left(\frac{1}{2002} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} - \frac{1}{1999} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2004 > 0 \quad (\text{do } \frac{1}{2002} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2001} - \frac{1}{1999} < 0) \Leftrightarrow x > 2004$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 2004$.

c)

$$c) \frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c, \quad (a, b, c > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-bc}{b+c} - a + \frac{x-ac}{a+c} - b > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b} + \frac{x-bc-ab-ac}{b+c} + \frac{x-ac-bc-ab}{a+c} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-ac-bc) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x - ab - ac - bc > 0, \quad (\text{do } a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x > ab + ac + bc.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > ab + ac + bc$.

Bài 9: a) $-1 < \frac{x+1}{6} - \frac{x-2}{2} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x+1}{6} - \frac{3(x-2)}{6} < 1 \Leftrightarrow -6 < x+1-3x+6 < 6$

$$\Leftrightarrow -6 < -2x + 7 < 6 \Leftrightarrow -6 - 7 < -2x < 6 - 7$$

$$\Leftrightarrow -13 < -2x < -1 \Leftrightarrow 13 > 2x > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}. \text{ Vậy } S = \left\{ x \mid \frac{1}{2} < x < \frac{13}{2} \right\}$$

$$b) x - 1 < \frac{2x - 1}{3} - 1 < 2x + 4$$

$$\text{TH: } x - 1 < \frac{2x - 1}{3} - 1 \Leftrightarrow \frac{3(x - 1)}{3} < \frac{2x - 1 - 3}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 < 2x - 4 \Leftrightarrow x < -1$$

$$\text{TH 2: } \frac{2x - 1}{3} - 1 < 2x + 4 \Leftrightarrow \frac{2x - 1 - 3}{3} < \frac{3(2x + 4)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4 < 6x + 12 \Leftrightarrow 4x > -16 \Leftrightarrow x > -4$$

Vậy $-4 < x < -1$. Tập nghiệm $S = \{x | -4 < x < -1\}$

Bài 10:

$$a) \text{ Điều kiện } \begin{cases} 1 - x \neq 0 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{1-x^2}$$

$$A = \left(\frac{x+1}{(1-x)(1+x)} + \frac{2(1-x)}{(x+1)(1-x)} - \frac{5-x}{(1-x)(x+1)} \right) : \frac{2x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$A = \left(\frac{x+1+2-2x-5+x}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1}$$

$$A = \left(\frac{-2}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2x-1} = \frac{-2}{2x-1}$$

$$b) \text{ Để } A > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow 2x-1 < 0 \text{ vì } -2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \text{ (nhận)}$$

Vậy $x < \frac{1}{2}$ thì $A > 0$

Bài 11: Gọi số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là x . ĐK : $x \in \mathbb{N}^*, x < 15$.

Theo bài ra ta có bất phương trình:

$$(15 - x) \cdot 2000 + x \cdot 5000 \leq 70000$$

$$\Leftrightarrow (15 - x) \cdot 2 + x \cdot 5 \leq 70 \Leftrightarrow x \leq \frac{40}{3}$$

Mà $x \in \mathbb{N}^*, x < 15 \Rightarrow x$ là các số nguyên từ 1 đến 13.

Vậy số tờ giấy bạc loại 5000 đồng là các số nguyên từ 1 đến 13.

Bài 12: Gọi quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h là x (km) . ĐK : $0 < x < 18$

Theo bài ra ta có bất phương trình : $\frac{x}{5} + \frac{18-x}{4} \leq 4 \Leftrightarrow 4x + 90 - 5x \leq 80 \Leftrightarrow x \geq 10$

Mà $0 < x < 18 \Rightarrow 10 \leq x < 18$.

Vậy quãng đường mà người đó đã đi với vận tốc 5km/h là x (km) thỏa mãn $10 \leq x < 18$.

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

06. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giá trị tuyệt đối của một số

Giá trị tuyệt đối của số a , ký hiệu là $|a|$, được định nghĩa là khoảng cách từ số a đến số 0 trên trục số.

Như vậy: $|a| = a$ khi $a \geq 0$ và $|a| = -a$ khi $a < 0$

Ta cũng có thể viết: $|a| = \begin{cases} a & \text{khi } a \geq 0 \\ -a & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

2. Tính chất

Ta luôn có: $|a| \geq 0$; $|-a| = |a|$; $|a|^2 = a^2$

3. Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

a) Giải phương trình dạng $|a| = |b|$

Cách giải: Ta có $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$

b) Giải phương trình dạng $|a| = b$

Cách giải: Ta có thể làm theo hai cách sau:

Cách 1: Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Với $a \geq 0$ phương trình có dạng $a = b$;

Trường hợp 2. Với $a < 0$ phương trình có dạng $-a = b$.

Cách 2: Ta có $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b \\ a = -b \end{cases}$

II. BÀI TẬP

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = |-3| + 2 + |5x|$ khi $x \leq 0$;

b) $B = |-3x|^2 - 8x^2 + |x-2|$ khi $x \geq 2$;

c) $C = |x-7| + 2x - 3$

Bài 2: Giải phương trình:

Phương pháp: $|f(x)| = a (a \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$

a) $|x-5| = 2$

b) $|8x-5| = 2$

c) $|x-2| = -3$

d) $|4x+3| = 0$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

Phương pháp: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

a) $|4-5x| = |5-6x|$;

b) $|3x+2| - |7x+1| = 0$;

c) $|x^2 - 2x - 3| + |x + 1| = 0$;

d) $\frac{1}{4}|x - 5| = |3x + 1|$

Bài 4: Giải phương trình:

Phương pháp: $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

a) $|2x - 3| = x$

b) $|3x - 2| = 1 - x$

c) $|x - 3| = 4 - x$

d) $|x - 7| - 3 = x$

e) $|x^2 - 3x + 3| = -x^2 + 3x - 1$

f) $|x^2 - 9| = x^2 - 9$

Bài 5: Giải phương trình:

Dạng toán nâng cao

a) $||x - 3| + 1| = 2$

b) $||x + 1| - 1| = 5$

c) $|x - 1| + |2 - x| = 3$

d) $|x + 3| + |x - 5| = 3x - 1$

e) $|1 - x| - |x - 2| - |x - 3| = \frac{1}{2}$

f) $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 4$

Tự luyện:

Bài 6: Giải phương trình:

a) $|x - 6| = 4$

b) $|3x - 2| = 1$

c) $|2 - 3x| = -1$

d) $|1 - 4x| = 0$

Bài 7: Giải phương trình:

a) $|2 - 3x| = |3 - 2x|$;

b) $|3 + 5x| - |x + 6| = 0$;

c) $|x^2 + x - 2| + |x + 2| = 0$;

d) $\frac{1}{2}|x - 3| = |2x + 5|$

Bài 8: Giải các phương trình sau:

a) $|x - 6| = -5x + 9$;

b) $|x + 1| = x^2 + x$;

c) $|x^2 - 2x| + 4 = 2x$;

d) $\left| \frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \right| = x - 2$.

Bài 9: Giải các phương trình sau:

a) $|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$

b) $|x + 5| + |x + 3| = 3x$

c) $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3$

d) $|x^2 - 2x + 2| + |x^2 - 2x - 3| = 5$

Bài 10: Giải các phương trình sau:

a) $|x - 1| - 2|x| = -2$

b) $|x - 2| + |x + 1| + x^2 - 5 = 0$

c) $\frac{7}{|x-1|-3} = |x+2|$ a) $S = \{-3; 1\}$; b) $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{5} + 1\}$; c) $S = \{-\sqrt{7} - 2; \sqrt{15} + 1\}$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Với $x \geq 2$ thì $M = |x - 2| + 5 - x =$

- A. 7 B. 3 C. $2x - 7$ D. $2x - 7$ $2x+3$

Câu 2: Giải phương trình : $|2.x| = x + 3$ với $x \geq 0$ ta được nghiệm là ?

- A. $x = 3$ B. $x = 1$ C. $x = \frac{3}{2}$ D. $x = \frac{2}{3}$

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $N = |-2.x| + 5x - 4$ khi $x > 0$ ta được kết quả là ?

- A. $3x - 4$ B. $-7x - 4$ C. $7x - 4$ D. $-3x - 4$

Câu 4: Giải phương trình : $|x - 5| = 3$ ta được tập nghiệm là :

- A. $S = \{8\}$ B. $S = \{2\}$ C. $S = \{-2; 8\}$ D. $S = \{2; 8\}$

Câu 5: Ta có $|x - 9| = 9 - x$ Với $x < 9$ A. Đúng B. Sai

Câu 6: Ta có $|5 - x| + 5 = x$ Với $x > 5$ A. Đúng B. Sai

Câu 7: Ghép mỗi ý ở cột A với một ý ở cột B để được kết quả đúng ?

A	B
a) $ x - 5 = x - 5$	1) Khi $x < -5$
b) $ 5 - x = 5 - x$	2) Khi $x \geq 5$
c) $ x + 5 = -x - 5$	3) Khi $x \leq 5$
a); b) c)	4) Khi $x = 5$

Câu 8: Điền vào chỗ để được kết quả đúng ?

a) $|x - 7| = \dots\dots$ khi $x \geq 7$.

b) $|x - 7| = \dots\dots$ khi $x < 7$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1:HD:

a) Vì $x \leq 0$ nên $|5x| = -5x$. Từ đó tìm được $A = 5 - 5x$.

b) Vì $x \geq 2$ nên $|x-2| = x-2$. Mặt khác, ta luôn có $|-3x|^2 = 9x^2$ nên tìm được $B = x^2 + x - 2$

c) Với $x \geq 7$, ta có $C = 3x - 10$.

Với $x < 7$, ta có $C = x + 4$.

Bài 2: a) $|x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 = 2 \\ x-5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 7\}$

b) $|8x-5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-5 = 2 \\ 8x-5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3}{8}; \frac{7}{8} \right\}$

c) Vì giá trị tuyệt đối luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên suy ra phương trình vô nghiệm

d) $|4x+3| = 0 \Leftrightarrow 4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{3}{4} \right\}$

Bài 3: HD: a) Trường hợp 1. Xét $4 - 5x = 5 - 6x$. Tìm được $x = 1$.

Trường hợp 2. Xét $4 - 5x = 6x - 5$. Tìm được $x = \frac{9}{11}$.

Vậy $x \in \left\{ 1; \frac{9}{11} \right\}$.

b) Đưa PT về dạng $|3x+2| = |7x+1|$. Giải được $x \in \left\{ \frac{1}{4}; -\frac{3}{10} \right\}$.

c) Nhận xét: Vì $|x^2 - 2x - 3| \geq 0$ và $|x+1| \geq 0$ nên PT tương đương với $\begin{cases} |x^2 - 2x - 3| = 0 \\ |x+1| = 0 \end{cases}$. Giải

hai BPT ta được $x = -1$.

d) Tương tự ý a), tìm được $x \in \left\{ \frac{-9}{11}; \frac{1}{13} \right\}$

Bài 4: a) $|2x-3| = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-3 = x \\ 2x-3 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 3\}$

$$\text{b) } |3x - 2| = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 3x - 2 = 1 - x \\ 3x - 2 = -1 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$

$$\text{c) } |x - 3| = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 3 = 4 - x \\ x - 3 = -4 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = \frac{7}{2} \\ -3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

$$\text{d) } |x - 7| - 3 = x \Leftrightarrow |x - 7| = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 7 = x + 3 \\ x - 7 = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ -7 = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$

$$\text{e) } |x^2 - 3x + 3| = -x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 3 = -x^2 + 3x - 1 \\ x^2 - 3x + 3 = x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 4 = 0 \\ 3 = 1 \quad (L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ (x - 2)(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 1 \geq 0 (*) \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (t.m(*))$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 2\}$

$$\text{f) } |x^2 - 9| = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \geq 3$ hoặc $x \leq -3$

Bài 5: a) $|x-3|+1=2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|+1=2 \\ |x-3|+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3|=1 \\ |x-3|=-3 \end{cases} \quad (L) \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2;4\}$

b) $|x+1|-1=5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|-1=5 \\ |x+1|-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|=6 \\ |x+1|=-4 \end{cases} \quad (L) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=6 \\ x+1=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-7 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-7;5\}$

c) $|x-1|+|2-x|=3 \quad (1)$

Giá trị của x để biểu thức trong dấu $| \quad |$ bằng 0 là 1;2

Ta có bảng sau:

x	1		2	
$ x-1 $	-x+1	0	x-1	x-1
$ 2-x $	2-x		2-x	0
			0	-2+x

Ta có: $x < 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x+1+2-x=3 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

$1 \leq x < 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1+2-x=3 \Leftrightarrow 1=3$ (vô lí) suy ra phương trình vô nghiệm

$x \geq 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1-2+x=3 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0;3\}$

d) $|x+3|+|x-5|=3x-1$

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $| \quad |$ bằng 0 là -3;5

Ta có bảng sau:

x	-3		5	
$ x+3 $	-x-3	0	x+3	x+3
$ x-5 $	-x+5		-x+5	0
			0	x-5

Ta có:

$$x < -3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x - 3 - x + 5 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$-3 \leq x < 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + 3 - x + 5 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$x \geq 5 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x + 3 + x - 5 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1\}$

$$e) |1-x| - |x-2| - |x-3| = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $| |$ bằng 0 là 1; 2; 3

Ta có bảng sau:

x	1		2		3	
$ 1-x $	$1-x$	0	$-1+x$		$-1+x$	
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$ x-3 $	$-x+3$		$-x+3$		$-x+3$	0

$$\text{Ta có: } x < 1 \Leftrightarrow 1 - x - (-x + 2) - (-x + 3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -1 + x - (-x + 2) - (-x + 3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -1 + x - (x - 2) - (-x + 3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -1 + x - x + 2 - x + 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right\}$

$$f) |x| - 2|x-1| + 3|x-2| = 4 \quad (1)$$

Các giá trị của x để biểu thức trong dấu $| |$ bằng 0 là: 0; 1; 2

Ta có bảng sau:

x	0		1	2	
x	-x	0	x	x	x
x-1	-x+1	-x+1	0	x-1	x-1
x-2	-x+2	-x+2	-x+2	0	x-2

Với $x < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -x - 2(-x + 1) + 3(-x + 2) = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (không thỏa mãn)

Với $0 \leq x < 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 2(-x + 1) + 3(-x + 2) = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Với $1 \leq x < 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 2(x - 1) + 3(-x + 2) = 4 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Với $x \geq 2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 2(x - 1) + 3(x - 2) = 4 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1; 4\}$

III. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TỨ GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Tứ giác $ABCD$ là hình gồm bốn đoạn AB , BC , CD và DA ; trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không nằm trên một đường thẳng.
- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.
- Tổng các góc của một tứ giác luôn bằng 360°

II. BÀI TẬP

Bài 1: a) Có tứ giác nào có bốn góc nhọn không?

b) Một tứ giác có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn, bao nhiêu góc tù, bao nhiêu góc vuông?

Bài 2: a) Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 65^\circ; \widehat{B} = 117^\circ; \widehat{D} = 70^\circ$. Tính số đo góc \widehat{C}

b) Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 65^\circ; \widehat{B} = 117^\circ; \widehat{C} = 71^\circ$. Tính số đo góc ngoài tại đỉnh D

Bài 3: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 50^\circ, \widehat{D} = 60^\circ, \widehat{A} : \widehat{B} = 3 : 2$. Tính các góc A và B .

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ biết $\widehat{B} + \widehat{C} = 200^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$; $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ$

a) Tính số đo các góc của tứ giác.

b) Gọi I là giao điểm của các tia phân giác của \widehat{A} và \widehat{B} của tứ giác. Chứng minh:

$$\widehat{AIB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$$

Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm các tia phân giác của các góc C và D .

a) Tính \widehat{COD} biết $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 90^\circ$.

b) Tính \widehat{COD} theo \widehat{A} và \widehat{B} .

c) Các tia phân giác của góc A và B cắt nhau ở I và cắt các tia phân giác các góc C và D thứ tự ở E và F . Chứng minh rằng tứ giác $OEIF$ có các góc đối bù nhau.

Bài 6: Cho tứ giác $ABCD$, $\widehat{A} - \widehat{B} = 40^\circ$. Các tia phân giác của góc C và góc D cắt nhau tại O .

Cho biết $\widehat{COD} = 110^\circ$. Chứng minh rằng $AB \perp BC$.

Bài 7: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, $CB = CD$. Chứng minh AC là tia phân giác của \widehat{BAD} .

Bài 8: Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$

Bài 9: Cho tứ giác ABCD, M là một điểm trong tứ giác đó. Xác định vị trí của M để $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có góc $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$ tia phân giác góc B cắt đường thẳng AD ở E; tia phân giác của góc D cắt đường thẳng BC ở F. Chứng minh rằng: $BE \parallel DF$.

Tổng quát: Tứ giác ABCD có $\hat{A} = \hat{C}$. Chứng minh rằng các đường phân giác của góc B và góc D song song với nhau hoặc trùng nhau.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP

Bài 1:a) Không có tứ giác nào có 4 góc nhọn.

Tổng các góc của 1 tứ giác bằng 360° . Do đó, một tứ giác có nhiều nhất ba góc nhọn, có nhiều nhất ba góc tù, nhiều nhất 4 góc vuông.

Bài 2: a) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{C} = 108^\circ$

b) Tương tự tính được $\hat{D} = 107^\circ$. Vậy góc ngoài đỉnh D có số đo là 73°

Bài 3: $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{5} = \frac{360^\circ - (50^\circ + 60^\circ)}{5} = 50^\circ$. Từ đó tính được $\hat{A} = 150^\circ$. $\hat{B} = 100^\circ$.

Bài 4: a) Từ giả thiết ta có: $2\hat{B} + 2\hat{C} + 2\hat{D} = 200^\circ + 180^\circ + 120^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 250^\circ$

Vì $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A} = 110^\circ$.

$\hat{B} = 250^\circ - (\hat{C} + \hat{D}) = 250^\circ - 120^\circ = 130^\circ$

$\hat{C} = 200^\circ - \hat{B} = 200^\circ - 130^\circ = 70^\circ$.

$\hat{D} = 120^\circ - \hat{C} = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.

b) Trong tam giác ABI:

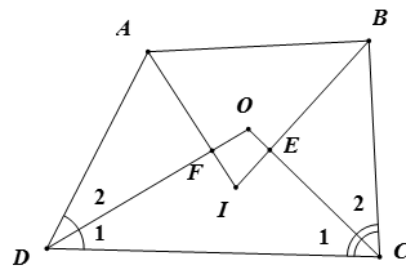
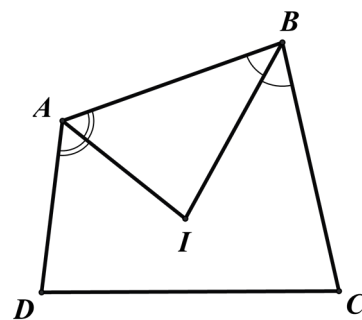
$$\widehat{AIB} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{360^\circ - (\hat{A} + \hat{B})}{2} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{2}$$

Bài 5: a) Tứ giác ABCD có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow 120^\circ + 90^\circ + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} + \hat{D} = 150^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = (\hat{C} + \hat{D}) : 2 = 150^\circ : 2 = 75^\circ$$

$$\begin{aligned} \Delta COD \text{ có } \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = 75^\circ \text{ nên } \widehat{COD} &= 180^\circ - (\hat{C}_1 + \hat{D}_1) \\ &= 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ. \end{aligned}$$



b) Giải tương tự như câu a. Đáp số: $\widehat{COD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$.

c) Chứng minh tương tự như câu b, ta được $\widehat{EIF} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$.

Do đó: $\widehat{COD} + \widehat{EIF} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Suy ra: $\widehat{OEI} + \widehat{OFI} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Bài 6: Xét $\triangle COD$ có $\widehat{COD} = 180^\circ - (\widehat{C}_2 + \widehat{D}_2) = 180^\circ - \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$

(vì $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$; $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$).

Xét tứ giác ABCD có $\widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})$, do đó

$$\widehat{COD} = 180^\circ - \frac{360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})}{2} = 180^\circ - 180^\circ + \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$$

Vậy $\widehat{COD} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$. Theo đề bài $\widehat{COD} = 110^\circ$ nên $\widehat{A} + \widehat{B} = 220^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{A} - \widehat{B} = 40^\circ$ nên $\widehat{B} = (220^\circ - 40^\circ) : 2 = 90^\circ$. Do đó $AB \perp BC$.

Bài 7: Trên tia đối tia BA lấy điểm I sao cho $BI = AD$.

Ta có $\widehat{ADC} = \widehat{IBC}$ (cùng bù với góc \widehat{ABC}).

$AD = IB$, $DC = BC$. Từ đó ta có $\triangle ADC = \triangle IBC$.

Suy ra: $\widehat{DAC} = \widehat{BIC}$ và $AC = IC$.

Tam giác ACI cân tại C nên $\widehat{BAC} = \widehat{BIC} = \widehat{DAC}$.

Vậy AC là phân giác trong góc \widehat{BAD} .

Bài 8: Gọi O là giao điểm AD và BC.

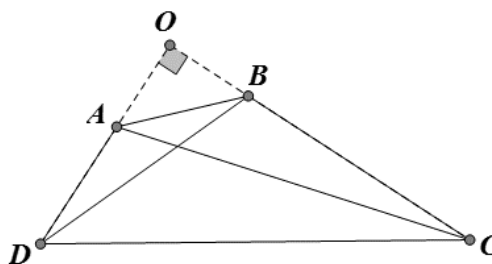
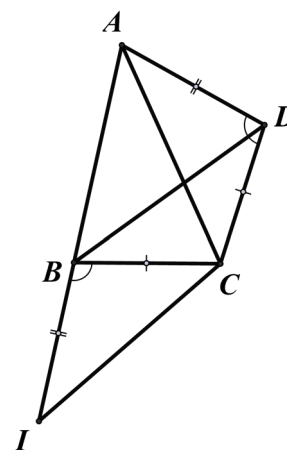
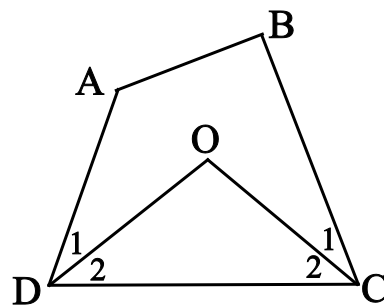
Ta có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ nên $\widehat{O} = 90^\circ$

Áp dụng định lí Py - ta - go,

Ta có $AC^2 = OA^2 + OC^2$.

$BD^2 = OB^2 + OD^2$

Nên $AC^2 + BD^2 = (OA^2 + OB^2) + (OC^2 + OD^2) = AB^2 + CD^2$



Bài 9: Gọi I là giao điểm của AC và BD. Ta có các bất đẳng thức:

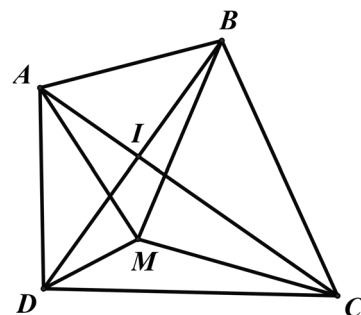
$$MA + MC \geq AC, MB + MD \geq BD.$$

Từ đó suy ra $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

$MA + MB + MC + MD = AC + BD$ khi M trùng với I.

Vậy khi M là giao điểm hai đường chéo thì

$MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.



Bài 10:

Xét $\triangle DCF$ vuông tại C, có:

$$\widehat{DFC} + \widehat{CDF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DFC} = 90^\circ - \widehat{CDF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{CDA} \quad (1)$$

Xét tứ giác ABCD, có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) - \widehat{D} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ) - \widehat{CDA} = 180^\circ - \widehat{CDA}$$

$$\Rightarrow 2\widehat{CBE} = 180^\circ - \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{CBE} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{CDA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{CFD}$. Mà \widehat{CBE} và \widehat{CFD} nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow BE \parallel DF$

Tổng quát:

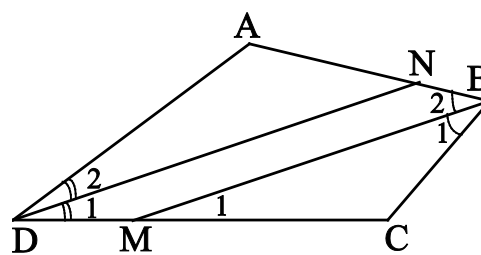
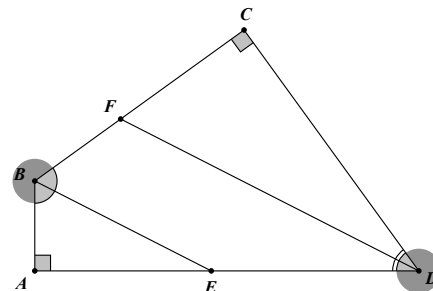
Xét tứ giác ABCD có: $\widehat{B} + \widehat{D} = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 360^\circ - 2\widehat{C}$.

Vì $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$; $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ nên $\widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ - \widehat{C}$

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (1)$$

Xét $\triangle BCM$ có $\widehat{B}_1 + \widehat{M}_1 + \widehat{C} = 180^\circ. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$. Do đó $DN \parallel BM$.



2. HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hình thang là tứ giác có một cặp cạnh đối song song với nhau.
- Hình thang có một góc vuông được gọi là hình thang vuông

Nhận xét: Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau.

Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên hai cạnh bên song song và bằng nhau.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) biết $\widehat{A} = 115^\circ$ Tính số đo góc D?

Bài 2: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) có $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$ Tính số đo góc B?

Bài 3: Tứ giác ABCD có $BC = CD$ và DB là tia phân giác \widehat{D} . Chứng minh rằng ABCD là hình thang và chỉ rõ cạnh đáy và cạnh bên của hình thang.

Bài 4: Cho hình thang ABCD , đáy $AB = 40cm$, $CD = 80cm$, $BC = 50cm$, $AD = 30cm$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang vuông.

Bài 5: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Gọi M là trung điểm của AD. Cho biết $MB \perp MC$

- a) Chứng minh rằng $BC = AB + CD$;
- b) Vẽ $MH \perp BC$. Chứng minh rằng tứ giác MBHD là hình thang.

Bài 6: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D. Cho biết $AD = 20$, $AC = 52$ và $BC = 29$. Tính độ dài AB.

Bài 7: Hình thang ABCD ($AB // CD$) có các tia phân giác của các góc A và D gặp nhau tại điểm E thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng:

- a) $\widehat{AED} = 90^\circ$.
- b) $AD = AB + CD$.

Bài 8: Một hình thang vuông có tổng hai đáy bằng a, hiệu hai đáy bằng b. Tính hiệu các bình phương của hai đường chéo.

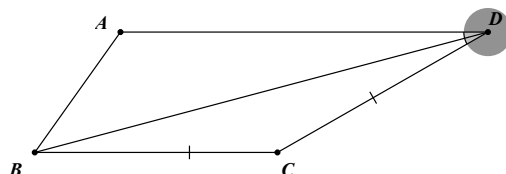
Bài 9: Hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có $AB = BC = 6cm$, $CD = 9cm$. Tính số đo các góc B và C . (Gợi ý trong bài hình chữ nhật để khai thác) – Không chữa. (HSG7 đã học)

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Vì $AB // CD$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía) $\Rightarrow \widehat{D} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

Bài 2: $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 10^\circ$ tính được $\widehat{B} = \frac{180^\circ + 10^\circ}{2} = 95^\circ$

Bài 3: Ta có $\triangle BCD$ cân tại C suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$;
 lại có $\widehat{ADB} = \widehat{CDB}$ (do BD là tia phân giác góc D)
 nên $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị
 nên $BC // AD$.



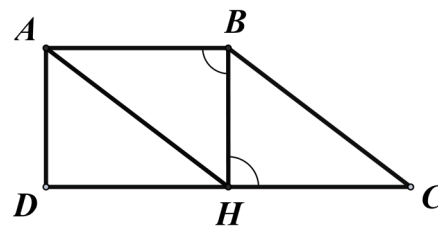
Tứ giác $ABCD$ có $BC // AD$ nên tứ giác là hình thang. Đây là $BC; AD$, cạnh bên $AB; CD$

Bài 4: Gọi H là trung điểm của CD . Ta có $DH = CH = 40cm$

Xét hai tam giác ABH và CHB có:

$$AB = CH = 40cm, \widehat{ABH} = \widehat{CHB} \text{ (so le trong), } BH = HB$$

Suy ra $\triangle ABH = \triangle CHB$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = CB = 50cm$.



Tam giác ADH có: $AD^2 + DH^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2 = AH^2$

Suy ra tam giác ADH vuông tại D . Vậy hình thang $ABCD$ là hình thang vuông.

Bài 5: Gọi E là giao điểm của tia BM với tia CD .

$$\triangle ABM = \triangle DEM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AB = DE \text{ và } MB = ME.$$

$\triangle CBE$ có CM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân $\Rightarrow CB = CE$

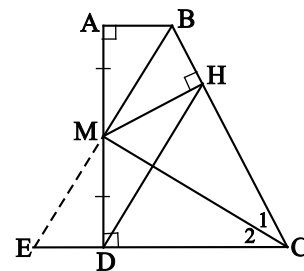
$$\Rightarrow CB = CD + DE \Rightarrow CB = CD + AB \text{ (vì } AB = DE \text{)}.$$

b) $\triangle CBE$ cân tại C , $CM \perp BE$ (1)

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \Rightarrow MH = MD \text{ (tính chất điểm nằm trên tia phân giác)}.$$

$$\triangle HCM = \triangle DCM \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow CH = CD \Rightarrow \triangle CHD \text{ cân} \Rightarrow CM \perp DH. \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $BM // DH$ do đó tứ giác $MBHD$ là hình thang.



Bài 6: Vẽ $BH \perp CD$ ta được $AB = DH; BH = AD = 20$

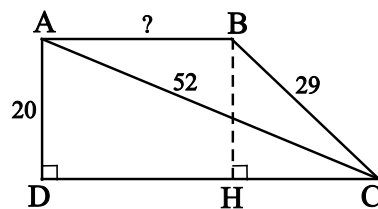
• Xét $\triangle BHC$ vuông tại H có

$$HC^2 = BC^2 - BH^2 = 29^2 - 20^2 = 441 \Rightarrow HC = 21$$

• Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 52^2 - 20^2 = 2304 \Rightarrow CD = 48$$

Do đó $DH = CD - HC = 48 - 21 = 27 \Rightarrow AB = 27$



Bài 7: a) $\widehat{AED} = 180^\circ - (\widehat{A_1} + \widehat{D_1})$ (1)

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = \frac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

b) Gọi K là giao điểm của AE và DC.

Tam giác ADK có đường phân giác DE cũng là đường cao nên là tam giác cân, suy ra:

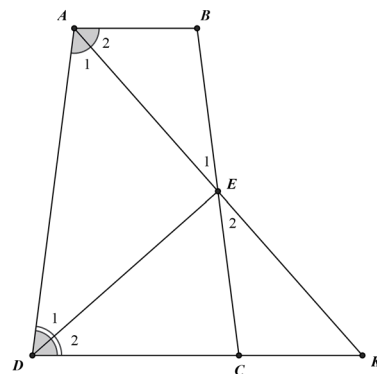
$$AD = DK \text{ và } AE = EK$$
 (3)

$\triangle AEB$ và $\triangle KEC$ có:

$$\widehat{E_1} = \widehat{E_2} \text{ (đối đỉnh); } AE = EK \text{ (chứng minh trên); } \widehat{A_2} = \widehat{K} \text{ (so le trong, } AB \parallel DK \text{).}$$

Do đó $\triangle AEB = \triangle KEC$ (g.c.g), suy ra $AB = CK$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $AD = DK = DC + CK = DC + AB$.

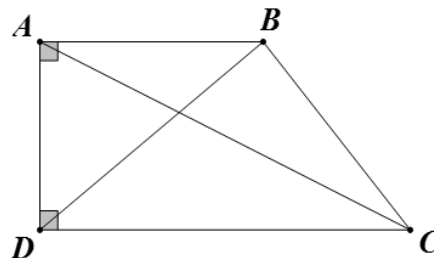


Bài 8: Xét hình thang ABCD có

$$\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ, CD + AB = a, CD - AB = b$$

$$\text{Ta có } AC^2 - BD^2 = (CD^2 + AD^2) - (AB^2 + AD^2)$$

$$= CD^2 - AB^2 = (CD + AB)(CD - AB) = ab$$



c) Qua điểm M thuộc cạnh AC, vẽ đường thẳng song song với CD, cắt BD tại N. Chứng minh rằng MNAB, MNDC là các hình thang cân.

Bài 7: Cho hình thang ABCD cân có $AB \parallel CD$ và $AB < CD$. Kẻ các đường cao AE, BF.

a. Chứng minh rằng: $DE = CF$.

b. Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo hình thang ABCD. Chứng minh: $IA = IB$.

c. Tia DA và tia CB cắt nhau tại O. Chứng minh OI vừa là trung trực của AB vừa là trung trực của DC.

d. Tính các góc của hình thang ABCD nếu biết $\widehat{ABC} - \widehat{ADC} = 80^\circ$

Bài 8: Tứ giác ABCD có : $\widehat{A} = \widehat{B}$, $BC = AD$

a) Chứng minh ABCD là hình thang cân

b) Cho biết: $AC \perp BD$ và đường cao $AH = 4\text{cm}$. Tính $AB + CD$.

Bài 9: Một hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên và góc kề với đáy lớn bằng 60° . Biết chiều cao của hình thang cân này là $a\sqrt{3}$. Tính chu vi của hình thang cân.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: ABCD là hình thang cân, đáy BC và AD

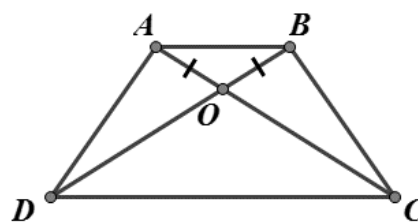
Bài 2: Vì $OA = OB$ nên tam giác OAB cân tại O

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA}$$

$$\text{Ta có } \widehat{OCD} = \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{ODC}$$

$$\Rightarrow \text{tam giác OCD cân tại O} \Rightarrow OC = OD$$

$$\text{Suy ra } AC = OA + OC = OB + OD = BD$$



Hình thang ABCD có hai đường chéo AC và BD bằng nhau nên ABCD là hình thang cân.

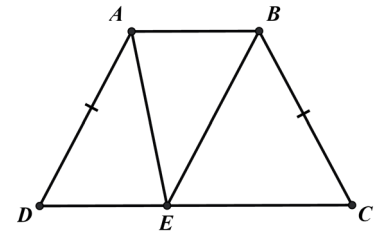
Bài 3:

Từ B kẻ $BE \parallel AD$ $E \in BC$. Vì $AB < CD$ nên điểm E nằm giữa C và D.

Chứng minh $\triangle ABE = \triangle EDA$ (g.c.g) $\Rightarrow AD = BE$

Có $AD = BC \Rightarrow BE = BC \Rightarrow \triangle BEC$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{C}$

Mà $BE \parallel AD \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{BEC}$ (đồng vị) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}$ mà tứ giác ABCD là hình thang



Vậy tứ giác ABCD là hình thang cân.

Bài 4: a) $\triangle BCH$ và $\triangle ADK$ ($\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$) có cạnh huyền $BC = AD$ (cạnh bên hình thang cân), góc nhọn $\widehat{C} = \widehat{D}$ (góc đáy hình thang cân).

Do đó $\triangle BCH = \triangle ADK$ (cạnh huyền, góc nhọn), suy ra $CH = DK$.

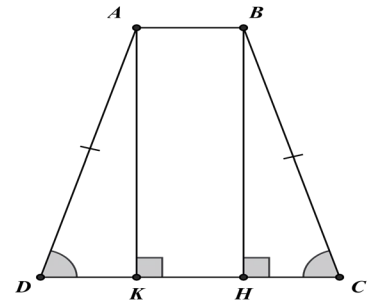
b) Ta có: $KH = AB = 3$ cm nên $CH + CK = AD - KH = 13 - 3 = 10$ cm.

Do $CH = DK$ nên $CH = 10 : 2 = 5$ (cm).

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle BHC$ vuông tại H ta có:

$$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = 12^2$$

Vậy $BH = 12$ cm.

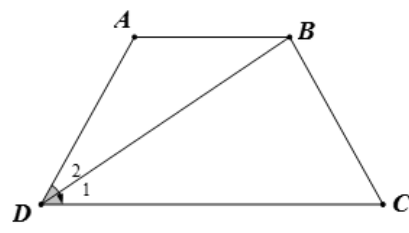


Bài 5: $\widehat{D} = \widehat{C} = 60^\circ$ nên $\widehat{D}_1 = 30^\circ$

Suy ra $\widehat{CBD} = 90^\circ$

Ta tính được $AD = 4$ cm, $BC = 4$ cm,

$CD = 8$ cm. Chu vi hình thang ABCD = 20 cm



Bài 6: a) Vì ABCD là hình thang cân nên $\widehat{C} = \widehat{D}$ suy ra $\triangle OCD$ là tam giác cân.

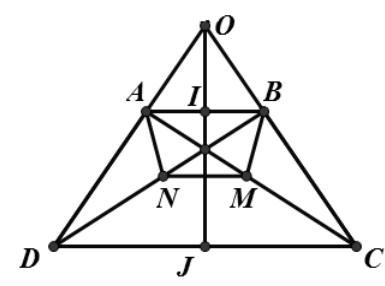
Ta có $\widehat{OAB} = \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{OBA}$ (hai góc đồng vị)

\Rightarrow Tam giác OAB cân tại O.

b) OI là trung tuyến của tam giác cân OAB

nên OI cũng là đường cao tam giác OAB

$\Rightarrow OI \perp AB$ mà $AB \parallel CD$ nên $OI \perp CD$



Tam giác OCD cân tại O có $OI \perp CD$ nên OI cắt CD tại trung điểm J của CD.

Vậy ba điểm O, I, J thẳng hàng.

c) Xét $\triangle ACD$ và $\triangle BDC$ có:

$$AC = BD \text{ (2 đường chéo của hình thang cân)}$$

$$AD = BC \text{ (2 cạnh bên của hình thang cân)}$$

$$CD = DC \text{ Do đó } \triangle ACD = \triangle BDC \text{ (c.c.c)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{ACD} = \widehat{BDC} \text{ hay } \widehat{MCD} = \widehat{NDC}$$

Hình thang MNDC có $\widehat{MCD} = \widehat{NDC}$ nên MNDC là hình thang cân.

$$\Rightarrow MC = ND \Rightarrow AC - MC = BD - ND \Rightarrow AM = BN$$

Hình thang MNAB có hai đường chéo AM và BN bằng nhau nên MNAB là hình thang cân.

Bài 7:

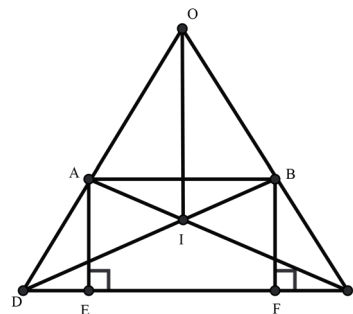
a) $\triangle AED = \triangle BFC$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow DE = CF$ (2 cạnh tương ứng)

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} AB \text{ chung} \\ \widehat{DAB} = \widehat{ABC} \\ BD = AC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BAC} \text{ (2 góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle BAI \text{ cân tại I} \Rightarrow IA = IB \text{ . Có}$$

$$\left. \begin{array}{l} BD = AC \\ IA = IB \end{array} \right\} \Rightarrow ID = IC$$

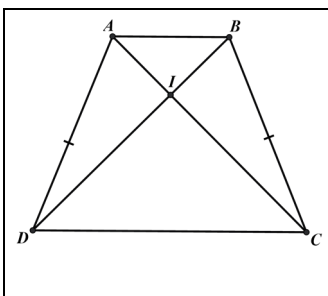


c) $\triangle OAB$ cân tại O từ đó ta có $\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ IA = IB \end{array} \right\} \Rightarrow OI$ là đường trung trực của AB

$\triangle ODC$ cân tại O từ đó ta có $\left. \begin{array}{l} OC = OD \\ IA = IB \end{array} \right\} \Rightarrow OI$ là đường trung trực của CD

d) Tính được $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{ABC} = \widehat{DAB} = 130^\circ \\ \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 50^\circ \end{array} \right.$

Bài 8:



a) Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chỉ ra ΔIAB ; ΔICD cân tại I từ đó chỉ ra $AB // CD$ và kết luận ABCD là hình thang cân.
 b) $AH = HC$;
 $AB = HK (\Delta ABK = \Delta KHA)$; $HD = KC (\Delta AHD = \Delta BKC)$

$\Rightarrow AB + CD = AB + HK + DH + KC = 2HK + 2KC = 2(HK + KC) = 2HC = 2AH = 8\text{ cm}$

Bài 9:

Ta đặt $AD = AB = BC = x$

Vẽ $AM // BC (M \in CD)$, ta được

$AM = BC = x$ và $MC = AB = x$.

ΔADM cân, có $\hat{D} = 60^\circ$ nên là tam giác đều,

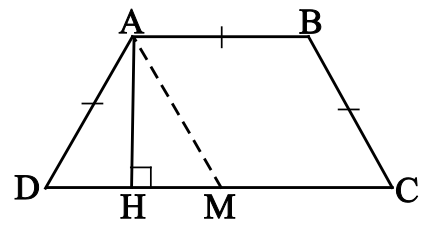
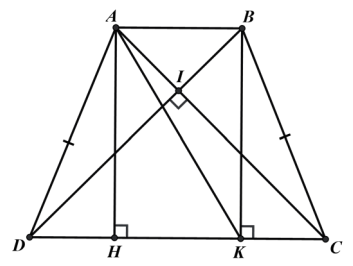
suy ra $DM = AD = x$.

Vẽ $AH \perp CD$ thì AH là đường cao của hình thang cân,

cũng là đường cao của tam giác đều: $AH = \frac{AD\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AH = a\sqrt{3}$ nên $\frac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = 2a$.

Do đó chu vi của hình thang cân là: $2a.5 = 10a$.



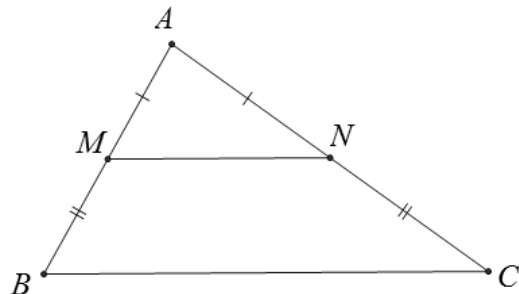
3. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Định lí 1: Đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Định lí 2: Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.



III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = AB$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = AC$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến AD, K là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AE.

- Chứng minh rằng HK song song với DE.
- Tính HK, biết chu vi tam giác ABC bằng 10.

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, AH là đường cao. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

- Chứng minh MNKH là hình thang cân.
- Trên tia AH và AK lần lượt lấy điểm E và D sao cho H là trung điểm của AE và K là trung điểm của AD. Chứng minh tứ giác BCDE là hình thang cân.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM, I là một điểm thuộc đoạn thẳng AM, BI cắt AC ở D.

- Nếu $AD = \frac{1}{2}DC$. Khi đó hãy chứng minh I là trung điểm của AM.
- Nếu I là trung điểm của AM. Khi đó hãy chứng minh $AD = \frac{1}{2}DC$, $ID = \frac{1}{4}BD$.
- Nếu $AD = \frac{1}{2}DC$. Khi đó trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $AB = 3AE$. Chứng minh BD, CE, AM đồng quy.

Bài 4: Dùng tính chất đường trung bình của tam giác chứng minh trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có $AB = CD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, DB. Đường thẳng EF lần lượt cắt AB, CD tại H, K. Chứng minh rằng: $\widehat{KHB} = \widehat{HKC}$

Bài 6: Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 4$ cm, $CD = 10$ cm, $BD = 5$ cm. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BD đến cạnh CD .

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AH , E là giao điểm của BI và AC . Tính các độ dài AE và EC , biết $AH = 12$ cm, $BC = 18$ cm.

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M là trung điểm của HC , K là trung điểm của AH . Chứng minh rằng BK vuông góc với AM .

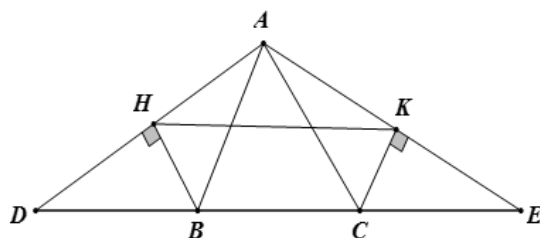
Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Gọi I là trung điểm HK . Chứng minh rằng: $AI \perp BK$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $\triangle ABD$ cân tại B , đường cao BH nên BH đồng thời là đường trung tuyến nên $AH = HD$

Tương tự $AK = KE$ nên HK là đường trung bình của $\triangle ADE$ nên $HK \parallel DE$; $HK = \frac{1}{2} DE$



b) $HK = \frac{DE}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (cm) (vì $DE = DB + BC + CE = AB + BC + CA = 10$ cm)

Bài 2:

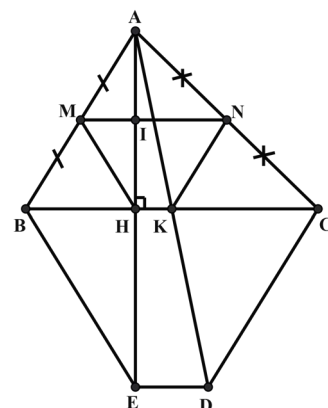
a) MN là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$, hay $MI \parallel BH$

$MI \parallel BH$ và $MA = MB \Rightarrow IA = IH$

$\triangle MAH$ cân tại A nên $\widehat{HMI} = \widehat{IMA}$ (1)

NK là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow NK \parallel AB \Rightarrow \widehat{MNK} = \widehat{IMA}$ (hai góc ở vị trí so le trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HMI} = \widehat{MNK}$ (so le trong) hay $\widehat{HMN} = \widehat{MKN}$



Tứ giác $MNHK$ có $MN \parallel HK$ nên tứ giác là hình thang, lại có $\widehat{HMN} = \widehat{MKN}$ là hình thang cân.

b) HK là đường trung bình của ΔAED

$\Rightarrow HK // ED$ hay $BC // ED$ nên tứ giác $BCDE$ là hình thang.

$\Rightarrow NK$ là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow NK // CD$ mà $NK // AB$ nên $AB // CD$

$\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{BCD}$ (so le trong) (3)

Để thấy ΔABE cân tại B vì BH vừa là đường cao vừa là trung tuyến

$\Rightarrow BH$ là phân giác của $\widehat{ABE} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{HBE}$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{BCD}$ hay $\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{BCD}$

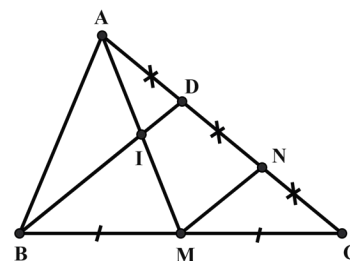
Hình thang $BCDE$ có $\widehat{CBE} = \widehat{BCD} \Rightarrow$ tứ giác $BCDE$ là hình thang cân.

Bài 3: a) Khi $AD = \frac{1}{2}DC$.

Gọi N là trung điểm của DC, khi đó MN là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow MN // BD \Rightarrow MN // ID$

ΔAMN có $MN // ID$ và $AD = DN \Rightarrow AI = IM$

b) Khi $AI = IM$. Kẻ $MN // BD$. Xét ΔAMN ta có $ID // MN$ và $AI = IM$ nên $AD = DN$.



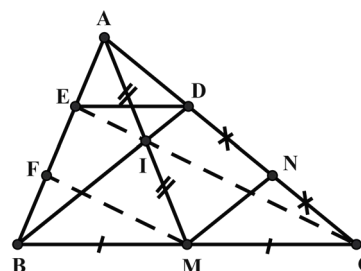
Xét ΔBCD có $MN // BD; MB = MC$ nên $ND = NC$. Vậy $AD = \frac{1}{2}DC$, và dễ dàng chỉ ra

$$ID = \frac{1}{4}BD.$$

c) Khi $AD = \frac{1}{2}DC$. $AB = 3AE$.

Ta có I là giao điểm của BD và AM

Gọi F là trung điểm của BE. Ta có MF là đường trung bình của $\Delta BEC \Rightarrow FM // CE$

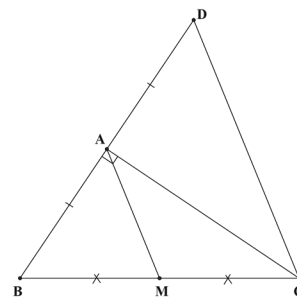


$AD = \frac{1}{2}DC$ thì $IA = IM$ (theo câu a) nên EI là đường trung bình của $\Delta AFM \Rightarrow EI // FM$

Có $FM \parallel CE$ và $EI \parallel FM$ nên E, I, C thẳng hàng hay EC đi qua điểm I

Bài 4: Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Khi đó $\triangle BCD$ cân tại C nên $BC = CD$

AM là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BC$



Bài 5: E là trung điểm của AC, F là trung điểm của BD

Gọi M là trung điểm của BC

Nên EM là đường trung bình của $\triangle ABC$

$\Rightarrow EM = \frac{1}{2}AB$ và $EM \parallel AB \Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{AHK}$

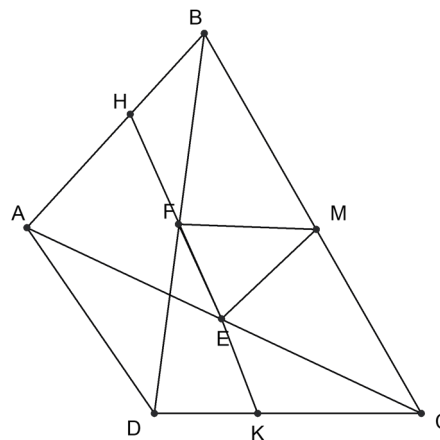
Và FM là đường trung bình của $\triangle BCD$

$\Rightarrow FM = \frac{1}{2}CD$ và $FM \parallel CD \Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HKD}$

Mà $AB = CD$ nên $AB = CD \Rightarrow \triangle FME$ cân

$\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{AHK} = \widehat{EFM} = \widehat{HKD}$

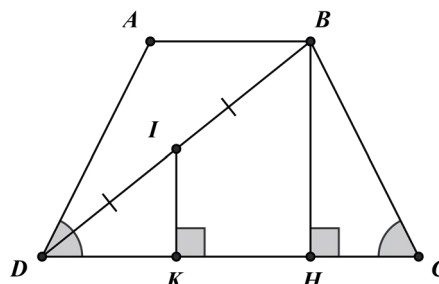
$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{HKD} \Rightarrow \widehat{KHB} = \widehat{HKC}$ (kề bù)



Bài 6:

Kẻ $BH \perp CD, IK \perp CD$.

Ta có: $CH = \frac{CD - AB}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3$ (cm).



Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle BHC$, ta có: $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 = 4^2$

$\Rightarrow BH = 4$ cm.

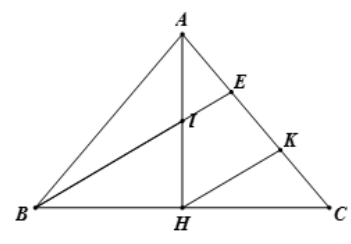
Tam giác BDH có $BI = ID$ và $IK \parallel BH$ nên IK là đường trung bình.

$\Rightarrow IK = \frac{BH}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (cm).

Bài 7:

Kẻ $HK \parallel BE$ ta chứng minh được $AE = EK = KC$

Kết quả: $AE = 5cm, EC = 10cm$



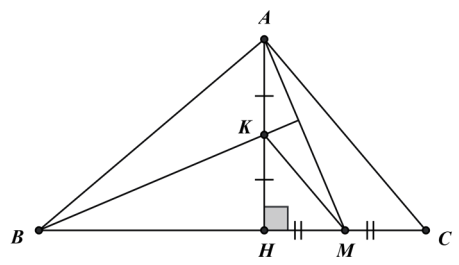
Bài 8:

Tam giác AHC có $AK = KH$ và $HM = MC \Rightarrow MK$ là đường trung bình của ΔAHC .

$\Rightarrow MK \parallel AC$. Ta lại có $AC \perp AB$ nên $MK \perp AB$

Tam giác ABM có: $AH \perp BM$ và $MK \perp AB$

$\Rightarrow K$ là trực tâm, suy ra $BK \perp AM$.



Bài 9:

Gọi J là trung điểm của KC , ta có IJ là đường trung bình trong tam giác KHC.

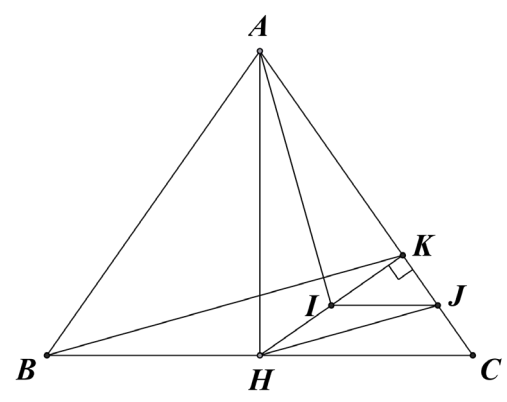
Do đó $IJ \parallel HC \Rightarrow IJ \perp AH$

Trong tam giác AHJ có $IJ \perp AH, HI \perp AJ$. Từ đó, I là trực tâm tam giác AHJ.

$\Rightarrow AI \perp HJ$ (1).

Trong tam giác BKC, HJ là đường trung bình, suy ra $HJ \parallel BK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp BK$



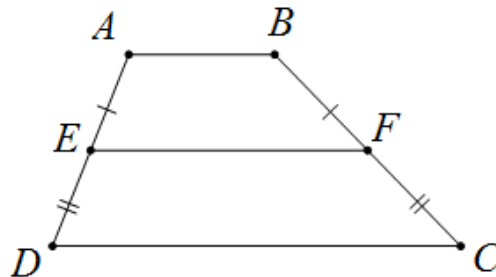
5. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên của hình thang.

Định lí 3: Đường thẳng đi trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

Định lí 4: Đường trung bình của hình thang thì song song với hai cạnh đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

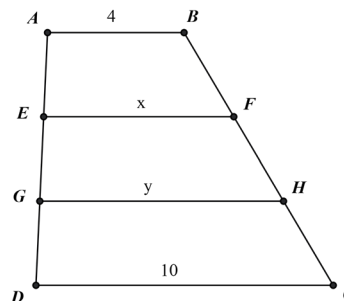


III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho ΔABC và đường thẳng d qua A không cắt đoạn thẳng BC . Vẽ $BD \perp d, CE \perp d$. ($D, E \in d$) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $ID = IE$

Bài 2: Cho hình thang vuông $ABCD$ tại A và D . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Chứng minh:

- a) ΔAFD cân tại F ;
- b) $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$.



Bài 3: Tính các độ dài x và y trên hình. Biết $AB // EF // GH // CD, AE = EG = GD, AB = 4, CD = 10$ (cm).

Bài 4: Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ ($AB < CD$) và M là trung điểm của AD . Qua M vẽ đường thẳng song song với hai đáy của hình thang cắt hai đường chéo BD và AC tại E và F , cắt BC tại N .

- a, Chứng minh rằng N, E, F lần lượt là trung điểm của BC, BD, AC .
- b, Gọi I là trung điểm của AB , đường thẳng vuông góc với IE tại E và đường thẳng vuông góc với IF tại F cắt nhau ở K . Chứng minh : $KC = KD$.

Bài 5: Cho hình thang $ABCD$, AB là đáy nhỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD và AC .

- a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng;
- b) Chứng minh $PQ // CD$ và $PQ = \frac{CD - AB}{2}$;
- c) Hình thang $ABCD$ phải có điều kiện gì để $MP = PQ = QN$.

và $y = \frac{x+10}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2x - 4 = \frac{x+10}{2}$

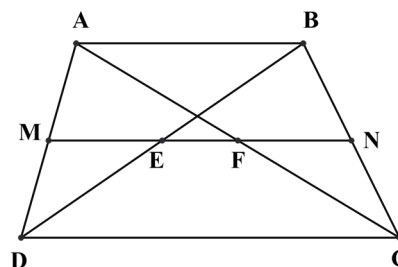
Ta tính được $x = 6$ và $y = 8$

Bài 4:

a) Xét hình thang $ABCD$ có $MA = MD$;
 $N \in BC, MN // AB // CD(gt) \Rightarrow N$ là trung điểm của BC

Xét $\triangle ADC$ có $MA = MD$; $MF // DC \Rightarrow FA = FC$

Xét $\triangle ADB$ có $MA = MD$; $MF // DC \Rightarrow ED = EB$



b) IE là đường trung bình của $\triangle ABD \Rightarrow IE // AD$

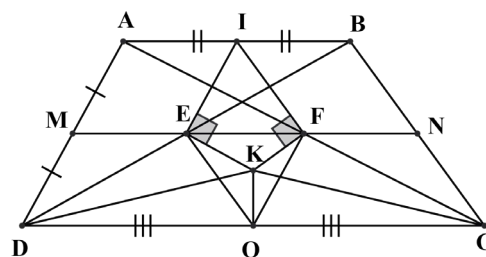
OF là đường trung bình của $\triangle ACD \Rightarrow OF // AD$

Vậy $IE // FO$;

Có $IE // FO$; $IE \perp EK \Rightarrow EK \perp OF$

Chứng minh tương tự ta có $IF // EO // BC$;

$IF \perp KF \Rightarrow EO \perp KF$



$\triangle EFO$ có $EK \perp OF$; $EO \perp KF$ nên K là trực tâm $\Rightarrow OK \perp EF$ mà
 $EF // CD \Rightarrow OK \perp DC$; $OD = OC$ vậy KO là đường trung trực của DC hay $KC = KD$

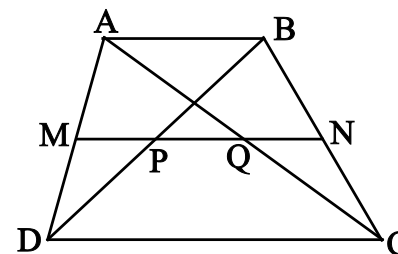
Bài 5: a) Xét $\triangle ABD$ có MP là đường trung bình

$\Rightarrow MP // AB \Rightarrow MP // CD$.

Xét $\triangle ADC$ có MQ là đường trung bình $\Rightarrow MQ // CD$.

Xét hình thang $ABCD$ có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN // CD$.



Qua điểm M có các đường thẳng MP, MQ, MN cùng song song với CD nên các đường thẳng này trùng nhau, suy ra bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Ta có $MN // CD$ nên $PQ // CD$; $PQ = MQ - MP = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$.

c) Ta có $MP = NQ = \frac{AB}{2}$.

$$MP = PQ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}$$

$$\Leftrightarrow AB = CD - AB \Leftrightarrow 2AB = CD \text{ (đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ).}$$

Bài 6: a) Gọi N là trung điểm BC.

$$\text{Ta có } MN // CD \Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CMN}$$

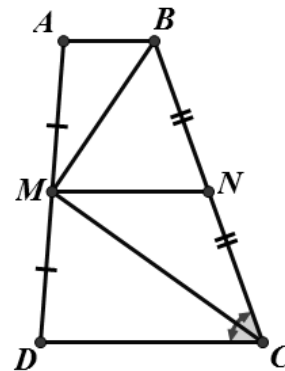
$$\text{Mà } \widehat{MCD} = \widehat{MCN} \text{ (vì CM là phân giác } \widehat{D} \text{)}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CMN} = \widehat{MCN} = \frac{1}{2} \widehat{DCB}$$

Tam giác MCN cân tại N $\Rightarrow MN = NC = NB$, do đó ΔMNB cân tại N $\Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{NBM}$. Mặt khác $\widehat{NMB} = \widehat{MBA}$, suy ra

$$\widehat{NMB} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$$

$$\widehat{BMC} = \widehat{CMN} + \widehat{NMB} = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} + \widehat{ABC}) = 90^\circ$$



b) Vì MN là đường trung bình của hình thang ABCD nên $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$

$$\text{Ta lại có } MN = \frac{1}{2}BC. \text{ Do đó } BC = AB + CD$$

Bài 7: Gọi N là hình chiếu của M trên d.

Xét tứ giác $BB'C'C$ có $BB' // CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow BB'C'C$ là hình thang.

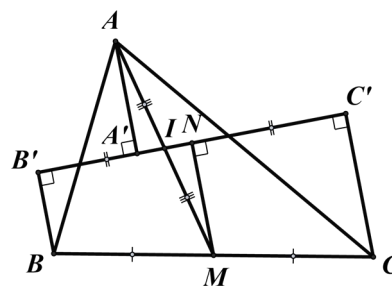
M là trung điểm BC và $MN // BB' // CC'$ (cùng vuông góc d)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của hình thang $\Rightarrow BB'C'C$

$$\Rightarrow BB' + CC' = 2MN \quad (1)$$

Chứng minh được $\Delta AA'I = \Delta MNI$ (g.c.g) $\Rightarrow AA' = MN \quad (2)$

Từ (1); (2) suy ra $BB' + CC' = 2AA'$

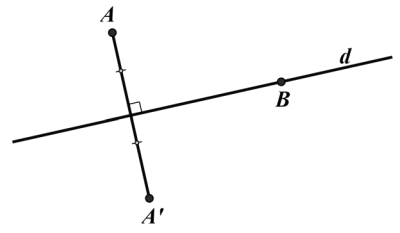


6. ĐỐI XỨNG TRỰC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Hai điểm được gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

A đối xứng với A' qua $d \Leftrightarrow d$ là đường trung trực của AA' .



• Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H .

• Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó.

Chú ý:

- + Qui ước một điểm nằm trên trục đối xứng thì điểm đối xứng với nó qua trục đối xứng chính là nó.
- + Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một đường thẳng thì bằng nhau

III. BÀI TẬP

Bài 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Đường trung trực của một đoạn thẳng là trục đối xứng của đoạn thẳng đó.
- b) Đường phân giác của một góc là trục đối xứng của góc đó.
- c) Đường trung tuyến của một tam giác là trục đối xứng của tam giác đó.
- d) Tam giác đều có ba trục đối xứng.
- e) Đường tròn có vô số trục đối xứng.
- f) Đường thẳng d có vô số trục đối xứng.

Bài 2: Cho tam giác ABC có các đường phân giác BD, CE cắt nhau ở O . Qua A vẽ các đường vuông góc với BD và với CE , chúng cắt BC theo thứ tự ở N và M . Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến BC . Chứng minh rằng:

- a) M đối xứng với A qua CE , N đối xứng với A qua BD ;
- b) M đối xứng với N qua OH .

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông ở A , lấy D là điểm bất kì thuộc cạnh BC . Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB , F là điểm đối xứng với D qua AC .

- a) Chứng minh rằng A là trung điểm của EF .
- b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là điểm đối xứng của điểm H qua AB và AC . Chứng minh rằng:

- a) A là trung điểm của đoạn DE
- b) Tứ giác $BDEC$ là hình thang vuông.
- c) Cho $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$. Tính AH và chu vi hình thang $BDEC$.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 70^\circ$, B và C là các góc nhọn. M là một điểm thuộc cạnh BC . Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB , E là điểm đối xứng với M qua AC . Gọi I, K là giao điểm của DE với AB, AC .

- a) Tính các góc của tam giác ADE .
- b) Chứng minh rằng MA là tia phân giác của góc IMK .
- c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì DE có độ dài ngắn nhất?

Bài 6: Cho hai điểm A và B cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d . Tìm trên d một điểm C sao cho tổng độ dài $CA + CB$ là ngắn nhất.

Tự luyện.

Bài 7: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. trực tâm H . Gọi M là điểm đối xứng với H qua BC .

- a) Chứng minh $\triangle BHC = \triangle BMC$.
- b) Tính góc BMC .

Bài 8: Cho tam giác nhọn ABC . Lấy M bất kì trên cạnh BC . Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng với M qua AB và AC . Gọi I, K là giao điểm của EF với AB và AC .

- a) Chứng minh MA là tia phân giác của góc IMK .
- b) Khi M cố định, tìm vị trí của điểm $P \in AB$ và $Q \in AC$ để chu vi tam giác MPQ nhỏ nhất.

Bài 9: Hai nhà máy được xây dựng tại hai địa điểm A và B nằm về một phía của một khúc sông thẳng. Tìm trên bờ sông một địa điểm C để xây một trạm bơm sao cho tổng chiều dài đường ống dẫn nước từ C đến A và đến B là nhỏ nhất.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

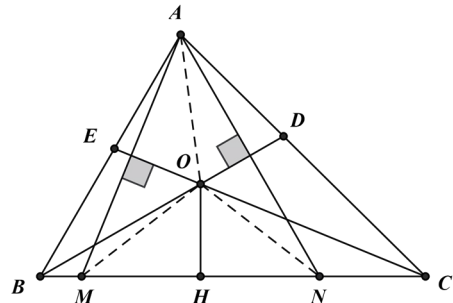
Bài 1: a) Đúng. b) Đúng. c) Sai. d) Đúng. e) Đúng. g) Đúng.

Bài 2:

a) Tam giác ACM có đường phân giác CE cũng là đường cao nên là tam giác cân, suy ra CE là đường trung trực của AM. Vậy M đối xứng với A qua CE.

Tương tự N đối xứng với A qua BD.

b) Tam giác AMN có O là giao điểm các đường trung trực của AM và AN nên OH là đường trung trực của MN. Suy ra M đối xứng với N qua OH.



Bài 3: a) E là điểm đối xứng với D qua AB
 $\Rightarrow AE = AD$ (1); $\widehat{BAE} = \widehat{BAD}$ (2)

F là điểm đối xứng với D qua AC
 $\Rightarrow AF = AD$ (3); $\widehat{CAF} = \widehat{CAD}$ (4)

Từ (1) và (3) suy ra $AE = AF$ (5).

Từ (2) và (4) suy ra

$$\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{BAD} + \widehat{CAD}) = 2\widehat{BAC} = 180^\circ \text{ do đó } \widehat{EAF} = 180^\circ \text{ nên A, E, F thẳng hàng (6)}$$

Từ (5) và (6) suy ra A là trung điểm của EF,

b) Ta có $EF = 2AD$ nên: EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là chân đường cao kẻ từ A đến BC.

Bài 4:

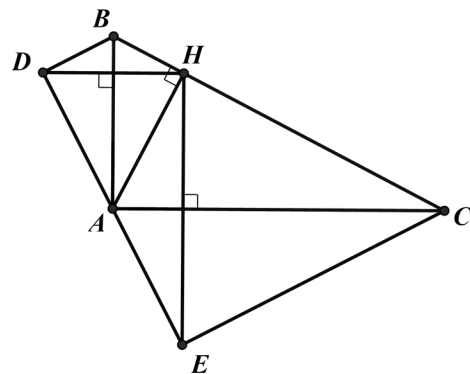
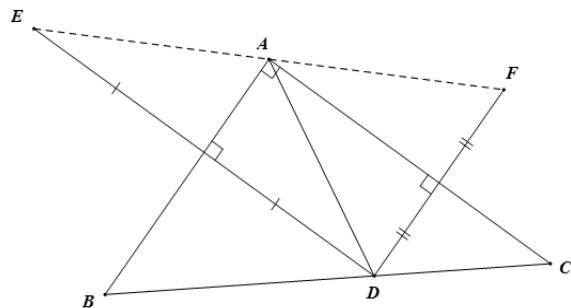
a) Chứng minh tương tự bài 2 ý a.

b) Chỉ ra $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$; $\widehat{AEC} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

Từ đó suy ra $DB \parallel EC \Rightarrow DBCE$ là hình thang có

$\widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$, do vậy BDEC là hình thang vuông tại D và E.

c) $BH = 2\text{cm}$, $CH = 8\text{cm}$.



Trong tam giác ABH vuông tại H, theo định lý Pitago: $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - 4$

Trong tam giác ACH vuông tại H, theo định lý Pitago $AH^2 = AC^2 - CH^2 = AC^2 - 64$

Suy ra: $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - 68$

Lại có $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$, suy ra $2AH^2 = 100 - 68 = 32 \Rightarrow AH^2 = 16$

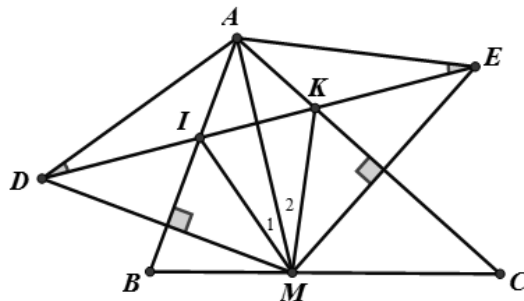
Vậy $AH = 4$

Đặt C là chu vi hình thang BDEC.

Ta có $BD = BH, DE = 2DA = 2HA, EC = HC$. Do đó:

$$C = BD + DE + EC + CB = BH + 2AH + CH + CB = 2 + 8 + 8 + 10 = 28(\text{cm}).$$

Bài 5:



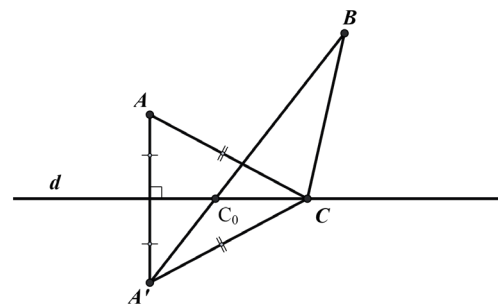
a) Tam giác ADE cân tại A, $\widehat{DAE} = 140^\circ$. $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 = 20^\circ$.

b) $\widehat{M}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 = \widehat{M}_2$.

c) Các tam giác ADE cân tại A, có góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy DE nhỏ nhất \Leftrightarrow cạnh bên AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC (Do \widehat{B}, \widehat{C} nhọn nên chân đường vuông góc đó nằm trên cạnh BC).

Bài 6: Gọi A' là điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d. Với mỗi điểm C trên đường thẳng d, ta có $CA = CA'$. Do đó: $CA + CB = CA' + CB \geq A'B$.

$CA + CB$ nhỏ nhất khi $CA' + CB = A'B$, hay C thuộc đoạn A'B. Vậy điểm C thỏa đề bài là giao điểm của đoạn BA' với đường thẳng d.

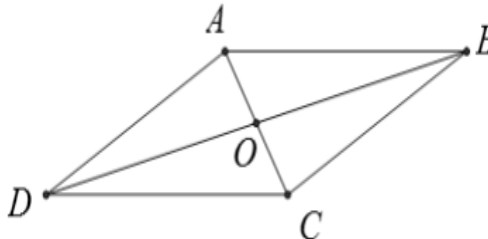


7. HÌNH BÌNH HÀNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$



Tính chất: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC , trực tâm H . Gọi M là trung điểm của BC , N là trung điểm của AC . Đường vuông góc với BC tại M và đường vuông góc với AC tại N cắt nhau ở O .

a) Trên tia đối của tia OC , lấy điểm K sao cho $OK = OC$. Chứng minh rằng $AHBK$ là hình bình hành.

b) Chứng minh $OM = \frac{1}{2}AH$.

Bài 2: Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$, $AB < CD$). Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $CB = CE$. Chứng minh $AECD$ là hình bình hành.

Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A và từ C đến BD .

a) Chứng minh rằng $AHCK$ là hình bình hành.

b) Gọi M là giao điểm của AK và BC , gọi N là giao điểm của CH và AD . Chứng minh rằng $AN = CM$.

c) Gọi O là trung điểm của HK . Chứng minh rằng O, M, N thẳng hàng.

Bài 4: Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, phân giác góc D đi qua trung điểm của cạnh AB . Gọi E là trung điểm của CD . Chứng minh:

a) $AB = 2AD$ b) $\triangle ADE$ đều, $\triangle AEC$ cân c) $AC \perp AD$

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm E, F lần lượt lấy trên BC, AD sao cho $BE = \frac{1}{3}BC$, $DF = \frac{1}{3}DA$ và EF lần lượt cắt AB, CD tại G, H . Chứng minh rằng:

a) $GE = EF = FH$ b) Tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

Bài 6: Cho tam giác ABC , các đường cao BH và CK cắt nhau tại E . Đường thẳng qua B vuông góc với AB và đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt nhau tại D . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Tứ giác $BDCE$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng M là trung điểm của DE . Tam giác ABC thỏa mãn điều kiện gì thì DE đi qua A ?

c) Chứng minh rằng $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$.

Bài 7: Cho tam giác ABC , các đường cao AK và BD cắt nhau tại G . Vẽ các đường trung trực HE, HF của các cạnh AC, BC . Đường thẳng qua A song song với BG cắt đường thẳng qua B song song với AK tại I . Chứng minh rằng:

a) $BG = AI$ b) $BG = 2HE$ c) $AG = 2HF$

Bài 8*: Cho tam giác ABC cân ở A . Lấy điểm D trên cạnh AB , điểm E trên AC sao cho $AD = CE$. Gọi O là trung điểm của DE , gọi K là giao điểm của AO và BC . Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

Tự luyện.

Bài 9: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD .

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

b) Tính chu vi của tứ giác $EFGH$ biết $AD = a, BC = b$.

Bài 10: Cho tam giác ABC , các đường trung tuyến BD và CE . Vẽ các điểm H và K sao cho E là trung điểm của CH , D là trung điểm của BK . Chứng minh rằng A là trung điểm của HK .

Bài 11: Cho hình bình hành ABCD. Lấy điểm E trên cạnh CD sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$. Gọi K là giao điểm của AE và BD. Chứng minh rằng $DK = \frac{1}{4}DB$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) Tam giác KBC có $KO = OC, BM = MC$ nên OM là đường trung bình của ΔKBC . Suy ra $OM // KB, OM = \frac{1}{2}KB$. Ta lại có $OM // AH$ (cùng vuông góc với BC).

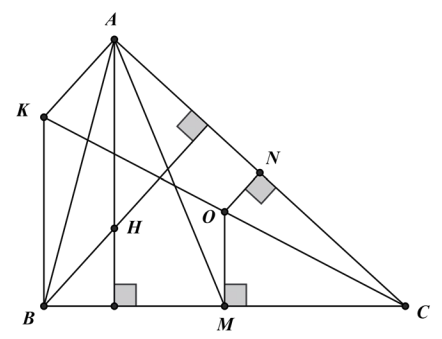
Suy ra $KB // AH$.

Chứng minh tương tự ta có: $KA // BH$.

Tứ giác AHBK có $KB // AH, KA // BH$ nên là hình bình hành.

b) AHBK là hình bình hành nên $KB = AH$.

Ta lại có $OM = \frac{1}{2}KB$ nên $OM = \frac{1}{2}AH$.



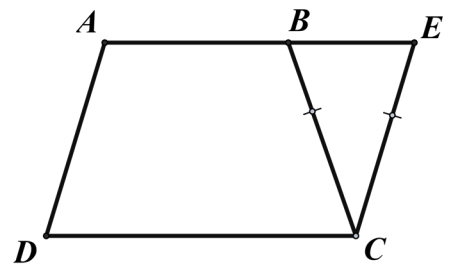
Bài 2: Dễ thấy tam giác BCE cân tại C suy ra $\widehat{CBE} = \widehat{CEB}$

Ta lại có $\widehat{CBA} = \widehat{DAB}$

Mà $\widehat{CBA} = \widehat{DAB}$ Nên $\widehat{CEB} + \widehat{DAB} = 180^\circ$

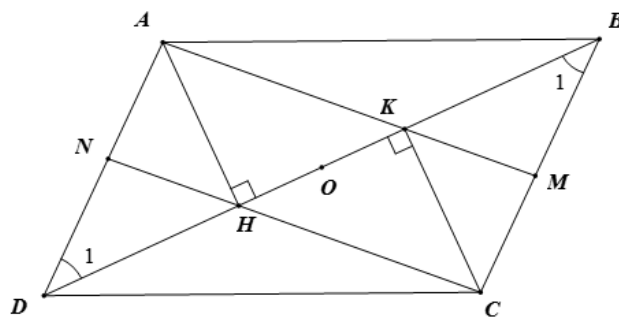
Suy ra $AC // ED$ (2 góc trong cùng phía bù nhau)

Suy ra AECD là hình bình hành



Bài 3: a) Cách 1

Xét $\triangle AHD$ và $\triangle CKB$ ($\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$): $AD = BC$
 (cạnh đối hình bình hành); $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ (so le trong, $AD \parallel BC$). Vậy $\triangle AHD = \triangle CKB$ (trường hợp cạnh huyền và góc nhọn), suy ra $AH = CK$. Ta lại có $AH \parallel CK$ (cùng vuông góc với BD). Tứ giác $AHCK$ có $AH = CK, AH \parallel CK$ nên là hình bình hành.



Cách 2. Chứng minh rằng tứ giác $AHCK$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Tứ giác $AHCK$ là hình bình hành (câu a) nên $AH \parallel CK$, tức là $AM \parallel CN$. Ta lại có $AN \parallel CM$. Tứ giác $ANCM$ là hình bình hành (theo định nghĩa) nên $AN = CM$.

c) Hình bình hành $AHCK$ có O là trung điểm của HK nên O là trung điểm của AC (tính chất đường chéo hình bình hành)

Hình bình hành $ANCM$ có O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của MN . Vậy M, N, O thẳng hàng.

Bài 4:

a) Gọi M là trung điểm của cạnh AB , ta có $\widehat{AMD} = \widehat{CDM}$ (1) (so le trong).

Mặt khác, DM là phân giác góc D nên $\widehat{ADM} = \widehat{CDM}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADM}$, do đó tam giác ADM cân tại A .

Vậy $AD = AM = \frac{1}{2}AB$

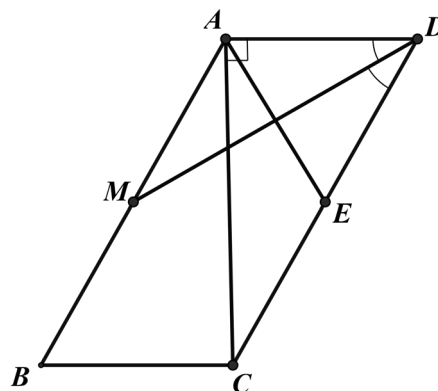
b) Trong hình bình hành $ABCD$, $\widehat{A} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 60^\circ$ và

$AD = DE = \frac{1}{2}CD$. Tam giác ADE cân và có một góc bằng 60° , nên tam giác ADE đều.

Theo trên, tam giác ADE đều nên $AE = ED = EC$, suy ra tam giác AEC cân tại E .

c) Vì $\triangle ADE$ đều và $\triangle ACE$ cân tại E nên $\widehat{EAC} = \frac{1}{2}\widehat{AED} = 30^\circ$ (góc ngoài của $\triangle AEC$)

Mặt khác $\widehat{EAD} = 60^\circ$, suy ra $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Vậy $AC \perp AD$



Bài 5:

a) Trong $\triangle AGF$, B trên cạnh AG, E trên cạnh FG.

Ta có $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AF$ và $BE \parallel AF$ suy ra BE

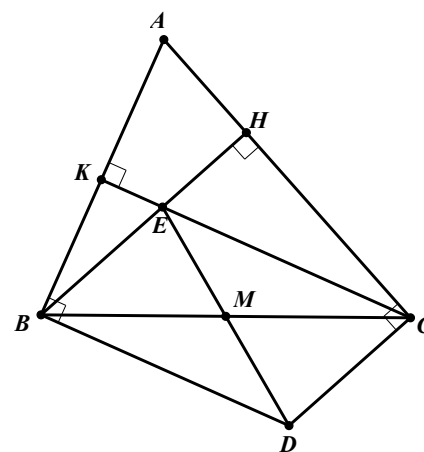
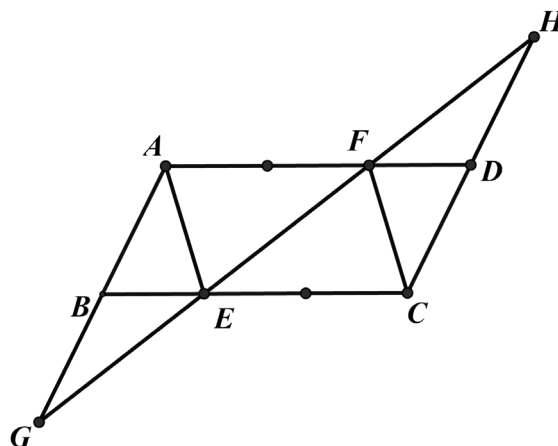
là đường trung bình trong $\triangle AGF$. Do đó E là trung điểm của GF (1).

Chứng minh tương tự, DF là đường trung bình trong $\triangle CHE$, nên F là trung điểm của HE (2).

Từ (1) và (2) suy ra $GE = EF = FH$.

b) Ta có $AF = \frac{2}{3}AD$ và $EC = \frac{2}{3}BC$, suy ra

$AF = CE$. Mặt khác $AF \parallel CE$, do vậy tứ giác $AECF$ là hình bình hành.



Bài 6: a) Ta có:

$$\begin{cases} BE \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \parallel DC \quad (1)$$

$$\begin{cases} CE \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE \parallel BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra BDCE là hình bình hành.

b) Vì BDCE là hình bình hành và M là trung điểm của BC nên M là trung điểm của DE.

DE đi qua A khi và chỉ khi A, E, M thẳng hàng. Vì E là giao điểm hai đường cao BH và CK nên AE là đường cao trong tam giác ABC. Vậy AE qua M khi và chỉ khi đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A trùng nhau, hay tam giác ABC cân tại A.

c) Trong tứ giác ABDC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, mà $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$ nên $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$.

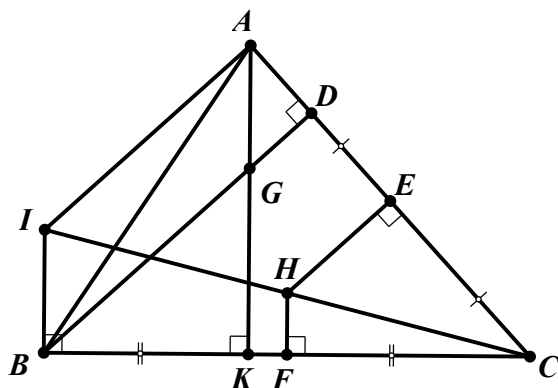
Bài 7: a) Ta có $AG \parallel BI$ và $BG \parallel AI$ nên tứ giác AIBG là hình bình hành, suy ra $BG \parallel AI$; $BG = AI$.

b) $IB \parallel AG \Rightarrow IB \perp BC$, mà $HF \perp BC$, do đó $IB \parallel HF$.

Lại có F là trung điểm của BC nên HF đi qua trung điểm của IC.

Chứng minh tương tự, HE cũng đi qua trung điểm của IC.

Từ đó ta được H là trung điểm của IC.



Trong $\triangle AIC$, HE là đường trung bình, do đó

$$HE = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{2}BG. \text{ Vậy } BG = 2HE.$$

c) Theo chứng minh trên, HF là đường trung bình trong $\triangle CBI$.

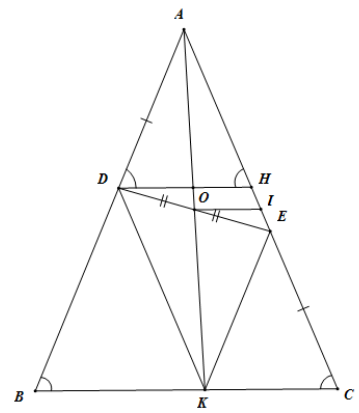
Suy ra $HF = \frac{1}{2}BI = \frac{1}{2}AG$ (Vì $AIBG$ là hình bình hành). Vậy $AG = 2HF$.

Bài 8*:

Kẻ $DH \parallel BC$, $OI \parallel BC$ ta có: $\widehat{ADH} = \widehat{B}$, $\widehat{ACH} = \widehat{C}$ mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên $\widehat{ADH} = \widehat{ACH}$

$\triangle ADH$ cân $\Rightarrow AH = AD = EC$. Chứng minh tiếp $HI = IE$ để suy ra $AI = IC$, $AO = OK$

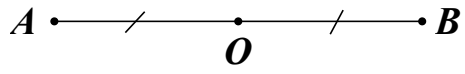
Từ đó suy ra $ADKE$ là hình bình hành.



8. ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• **Hai điểm đối xứng nhau qua một điểm:** Hai điểm được gọi là đối xứng nhau qua một điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm ấy.



A đối xứng với B qua $O \Leftrightarrow O$ là trung điểm của AB .

Khi đó ta còn nói:

A đối xứng với B qua O hoặc A và B đối xứng nhau qua O .

- **Quy ước:** Điểm đối xứng với điểm O qua điểm O là chính nó.
- **Hai hình đối xứng nhau qua một điểm:** Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu một điểm bất kì thuộc hình này đối xứng với một điểm bất kì thuộc hình kia qua điểm O và ngược lại.
- **Nhận xét:** Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một điểm thì bằng nhau.
- **Hình có tâm đối xứng:** Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm O cũng thuộc hình H .
- **Định lí:** Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A . Lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC . Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB , F là điểm đối xứng với D qua AC .

- Chứng minh rằng E đối xứng với F qua A .
- Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì EF có độ dài ngắn nhất?

Bài 2: Cho góc xOy khác góc bẹt, điểm A thuộc Ox , điểm B thuộc Oy . Gọi C là trung điểm của AB , điểm D đối xứng với O qua A , điểm E đối xứng với O qua B , điểm F đối xứng với O qua C .

- Chứng minh rằng D đối xứng với E qua F .
- Các điểm A và B có vị trí như thế nào thì D đối xứng với E qua đường thẳng OF ?

Bài 3: Cho tam giác ABC . Gọi M, D, E theo thứ tự là trung điểm của BC, AB, AC . Gọi I là điểm đối xứng với M qua D , K là điểm đối xứng với M qua E . Chứng minh rằng I đối xứng với K qua A .

Bài 4: Cho tam giác ABC . Gọi D là điểm đối xứng với B qua A , E là điểm đối xứng với C qua A . Lấy các điểm I và K theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng DE và BC sao cho $DI = BK$. Chứng minh rằng I đối xứng với K qua A .

Bài 5: Cho tam giác ΔABC , trực tâm H . Gọi M là trung điểm của BC . D là điểm đối xứng với H qua M .

a, Chứng minh rằng: $BD \perp BA, CD \perp CA$.

b, Gọi I là trung điểm của AD . Chứng minh rằng: $IM \perp BC$.

Bài 6: Cho tam giác ABC , điểm O nằm trong tam giác. Gọi A' là điểm đối xứng với O qua trung điểm D của BC , B' là điểm đối xứng với O qua trung điểm E của AC , C' là điểm đối xứng với O qua trung điểm F của AB . Chứng minh rằng $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

Bài 7: Trên hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm E trên cạnh AB , lấy điểm F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$.

a) Chứng minh rằng E đối xứng với F qua O .

b) Gọi I là giao điểm của AF và DE , gọi K là giao điểm của BF và CE . Chứng minh rằng I đối xứng với K qua O .

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) E đối xứng với D qua AB nên $AD = AE$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

F đối xứng với D qua AC nên $AD = AF$ và $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$

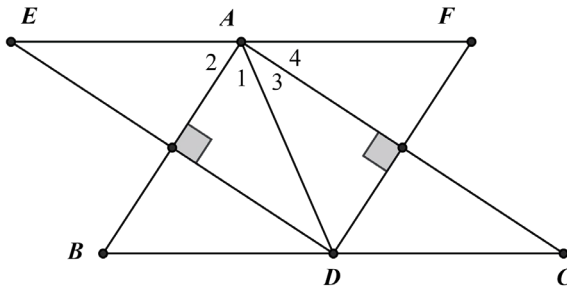
$\Rightarrow AE = AF = AD;$

$$\widehat{DAE} + \widehat{DAF} = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_3}) = 2.90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow E, A, F$ thẳng hàng.

Vậy E đối xứng với F qua A.

b) Ta có: $EF = 2AD$ nên EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow D$ là chân đường cao kẻ từ A đến BC.



Bài 2:

a, Ta có: $AO = AD, CO = CF$ nên AC là đường trung bình của ΔODF do đó $FD = 2AC, FD // AC$.

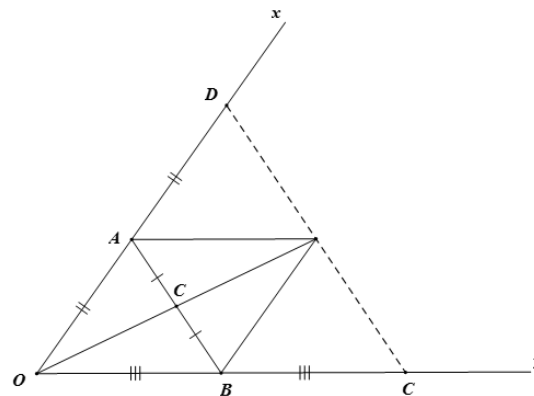
Chứng minh tương tự, CB là đường trung bình của ΔOEF suy ra $FE = 2CB, FE // CB$.

Ta có: $FD // CA, FE // CB$ mà C nằm giữa A và B nên D, F, E thẳng hàng, F nằm giữa D và E (1).

Ta có: $FD = 2AC, FE = 2CB$ mà $AC = CB \Rightarrow FD = FE(2)$

Từ (1) và (2) suy ra F là trung điểm của DE do đó D đối xứng với E qua F.

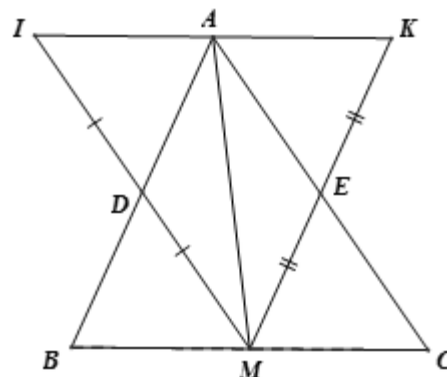
b, D đối xứng với E qua OF $\Leftrightarrow OF$ là đường trung trực của DE $\Leftrightarrow OD = OE$ vì đã cso $FD = FE \Leftrightarrow OA = OB$. Như vậy nếu $OA = OB$ thì D đối xứng với E qua OF.



Bài 3:

HD: Chỉ ra $\widehat{IAD} = \widehat{DBM}; \widehat{KAE} = \widehat{ECM}$. Từ đó $\widehat{IAD} + \widehat{DAE} + \widehat{EAK} = \widehat{DBM} + \widehat{DAE} + \widehat{ECM} = 180^\circ$ nên I, A, K thẳng hàng.

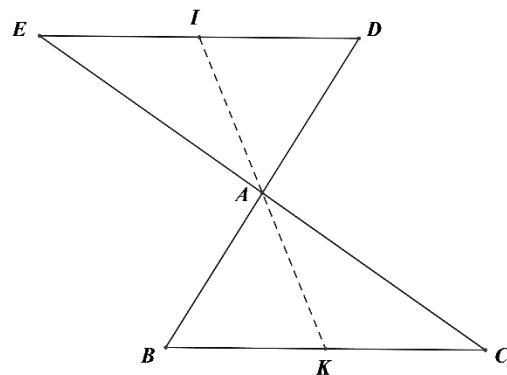
Dễ dàng chỉ ra $IA = AK = BM = MC = \frac{1}{2}BC$. Từ đó suy ra I đối xứng với K qua A



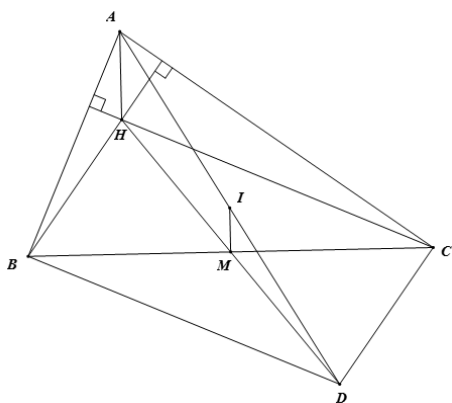
Bài 4:

Tứ giác $BEDC$ có $AB = AD$ và $AC = AE$ nên là hình bình hành, suy ra $DE // BC$.

Tứ giác $BIDK$ có $DI // BK$ và $DI = BK$ nên là hình bình hành, suy ra đường chéo IK đi qua trung điểm A của BD . Vậy I, A, K thẳng hàng.



Bài 5:



a) Chứng minh được $BHCD$ là hình bình hành suy ra $BD // CH$; mà $CH \perp AB$ nên $BD \perp AB$

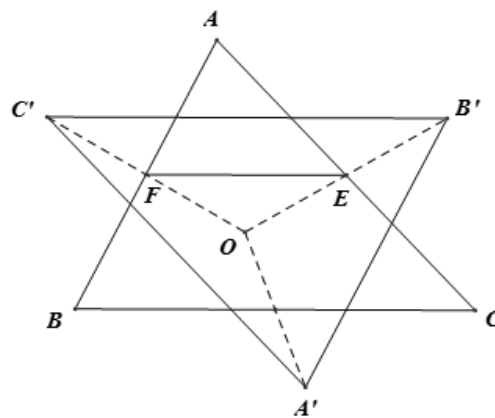
Tương tự $DC // BH$; mà $BH \perp AC$ nên $DC \perp AC$

b) IM là đường trung bình của ΔAHD nên $IM // AH$, mà $AH \perp BC$ nên $IM \perp BC$

Bài 6:

HD: Sử dụng tính chất đường trung bình trong tam giác chỉ ra $B'C' = BC = 2EF$. Tương tự $A'B' = AB$; $A'C' = AC$

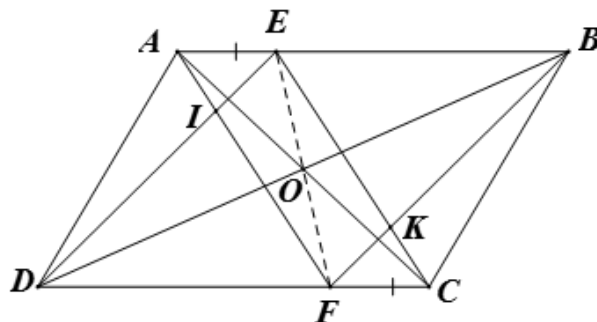
Vậy tam giác $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c).



Bài 7:

HD: a. Chứng minh rằng $AECF$ là hình bình hành. từ đó EF đi qua trung điểm O của AC và O là trung điểm của EF . Hay E đối xứng với F qua O .

b. Chứng minh rằng $EIFK$ là hình bình hành từ đó suy ra IK đi qua trung điểm của O của EF và $IO = IK$ từ đó suy ra I đối xứng với K qua O .



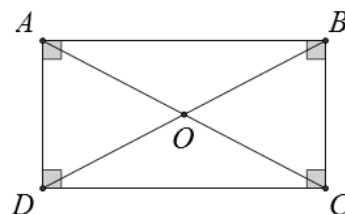
9. HÌNH CHỮ NHẬT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• *Định nghĩa:* Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ.$$



• *Nhận xét:* Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, một hình thang cân.

• *Tính chất:*

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành.

- Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình thang cân.

- Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

• *Dấu hiệu nhận biết:*

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

• *Áp dụng vào tam giác vuông:*

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông ở A , đường cao AH , trung tuyến AM . Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC .

a, Tứ giác $ADHE$ là hình gì?

b, Chứng minh $DE \leq AM$. Trong trường hợp nào thì $DE = AM$?

c, Chứng minh $DE \perp AM$.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A . Từ một điểm trên đáy BC , vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt các đường thẳng AC, AB lần lượt tại M và N . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của BC và MN . Chứng minh rằng tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.

Bài 3: Tứ giác $ABCD$ có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Cho biết $EG = FH$. Chứng minh rằng $AC \perp BD$.

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo, điểm E thuộc cạnh CD. Đường vuông góc với AE tại A cắt BC ở F. Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng OM là đường trung trực của AC.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Điểm M thuộc cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$ ($D \in AB$), $ME \perp AC$ ($E \in AC$),

a, Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng I nằm trên đường trung trực của AH.

b, Điểm M ở vị trí nào trên BC thì DE có độ dài nhỏ nhất.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trung tuyến AM. E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC.

a) Chứng minh rằng AEMF là hình chữ nhật.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh EHMf là hình thang cân.

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD. Biết $AD = \frac{1}{2}AC$ và $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. Chứng minh rằng hình bình hành ABCD là hình chữ nhật.

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), các đường cao BD và CE. Kẻ đường vuông góc DH từ D đến BC. Đường thẳng đi qua H và song song với CE cắt DE ở K.

a) Gọi O là giao điểm của BD và HK. Chứng minh rằng $OB = OH$.

b) Chứng minh rằng BKDH là hình chữ nhật.

Bài 9: Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia CB và DA lấy lần lượt hai điểm E và F sao cho $CE = DF = CD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho $CH = CB$. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CEFD là hình chữ nhật.

b) $AE \perp FH$.

Tự luyện

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 14$ cm, $BC = 50$ cm. Đường trung trực của AC cắt tia phân giác của góc B ở K.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = 90^\circ$.

b) Tính độ dài KB

Bài 11: Hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) có I là trung điểm của AD và CI là tia phân giác của góc C. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{AHD} = 90^\circ$.

b) $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

c) $AB + CD = BC$.

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông cân tại C, M là điểm bất kỳ trên cạnh AB. Vẽ $ME \perp AC$ tại E, $MF \perp BC$ tại F. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác CFME là hình chữ nhật. b) $\triangle DEF$ vuông cân.

Bài 13: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Kẻ đường cao AH (H thuộc BC). Gọi E là điểm đối xứng của C qua H, vẽ EK vuông góc với AB tại K. Gọi I là trung điểm AK, N là trung điểm của BE. Chứng minh rằng: $KE \parallel IH$ và HK vuông góc KN

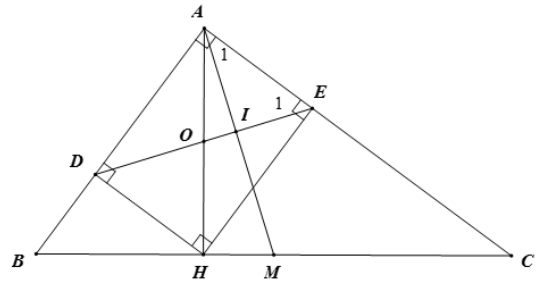
KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a, Tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật, do đó $DE = AH$.

b) Ta lại có: $AH \leq AM$ do đó $DE \leq AM$.

Mà $DE = AM \Leftrightarrow H \equiv M$. Khi đó $\triangle ABC$ là tam giác vuông cân ở A.



c, Gọi O là giao điểm của AH và DE. I là giao điểm của AM và DE.

Ta có: $\widehat{AED} = \widehat{EAH}$ (do $\triangle OAE$ cân ở O)

$\widehat{MAC} = \widehat{C}$ (do $\triangle MAC$ cân ở M) nên $\widehat{AEH} + \widehat{MAC} = \widehat{EAH} + \widehat{C} = 90^\circ$

Do đó $\widehat{AIE} = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AM$.

Bài 2: $\triangle ABC$ cân tại A, AH là đường trung tuyến nên cũng là đường cao, đường phân giác.

Do đó $\widehat{H}_1 = 90^\circ$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

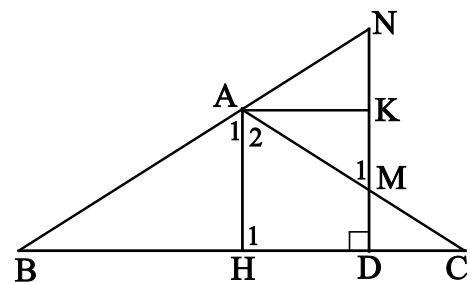
Ta có $AH \parallel DN$ (vì cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A}_1$ (cặp góc đồng vị); $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_2$ (cặp góc so le trong).

Do đó $\widehat{N} = \widehat{M}_1$ (vì $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$).

Vậy $\triangle AMN$ cân tại A mà AK là đường trung tuyến nên AK cũng là đường cao, $\widehat{K} = 90^\circ$.

Tứ giác $AKDH$ có $\widehat{K} = \widehat{H} = \widehat{D} = 90^\circ$ nên tứ giác $AKDH$ là hình chữ nhật.



Bài 3:

HD: Chứng minh EFGH là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau). Suy ra $EH \perp HG$ do đó $BD \perp AC$.

Bài 4: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD nên $OA = OC$ (1).

AM và CM là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông AEF và CEF nên: $AM = CM$ (cùng bằng $\frac{1}{2}EF$) (2).

Từ (1) và (2) suy ra OM là đường trung trực của AC.

Bài 5:

a) Chỉ ra $ADME$ là hình chữ nhật từ đó I là trung điểm của AM. Tam giác AHM vuông tại H, trung tuyến HI nên $IA = IH$ (vì cùng bằng $\frac{1}{2}AM$). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có $DE = AM$ nên DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$

Bài 6:

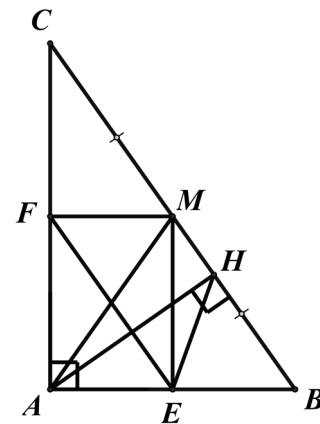
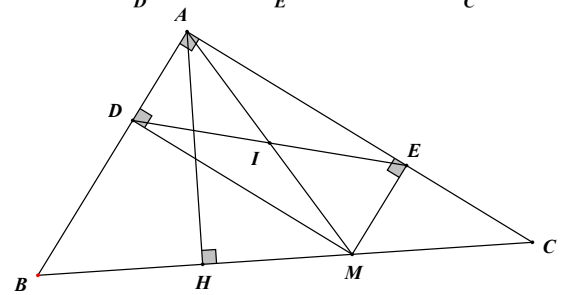
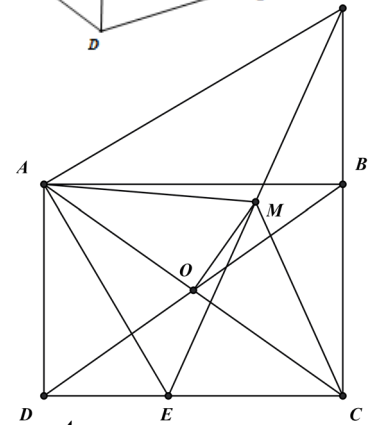
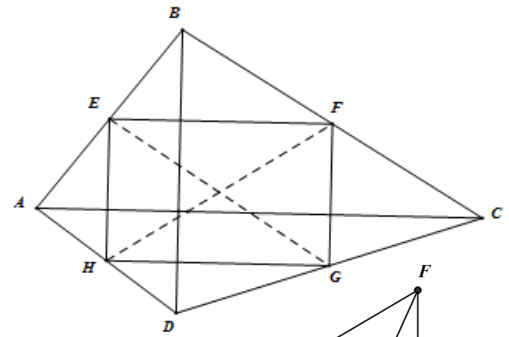
a) Theo tính chất tam giác vuông, ta có $AM = MC = MB$.

Tam giác CMA cân tại M và F là trung điểm AC suy ra

$MF \perp AC$ Chứng minh tương tự: $ME \perp AB$

Vậy AEMF là hình chữ nhật.

b) Ta có EF là đường trung bình trong tam giác ABC, suy ra $EF \parallel BC$. Theo giả thiết, $AB < AC$ suy ra $HB < HA$, do đó H thuộc đoạn MB. Vậy EHMf là hình thang.



Tam giác HAB vuông tại H, ta có $HE = EA = EB = MF$, từ đó suy ra $EHMF$ là hình thang cân.

Bài 7: Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $OA = OC$.

Vì $AD = \frac{1}{2}AC$ nên $AD = AO$.

Vẽ $AH \perp OD, OK \perp AB$.

Xét ΔAOD cân tại A, AH là đường cao

\Rightarrow AH cũng là đường trung tuyến, cũng là đường phân giác.

Do đó $HO = HD$ và $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Vì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{DAC}$ nên $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$.

$\Delta AOK = \Delta AOH$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow OK = OH = \frac{1}{2}OD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}OB \Rightarrow \widehat{B}_1 = 30^\circ$.

Xét ΔABH vuông tại H có $\widehat{B}_1 = 30^\circ$ nên $\widehat{HAB} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{DAB} = 90^\circ$.

Hình bình hành ABCD có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Bài 8: a) Ta có: \widehat{B}_1 phụ \widehat{ACB} , \widehat{C}_1 phụ \widehat{ABC} , mà $\widehat{ACB} = \widehat{ABC}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (1).

$HK // CE$ nên $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$ (đồng vị) (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$, do đó ΔBOH cân tại O, suy ra $OB = OH$ (3).

b) Ta có \widehat{B}_1 phụ \widehat{D}_1 , \widehat{H}_1 phụ \widehat{H}_2 , mà $\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D}_1 = \widehat{H}_2$, do đó ΔODH cân tại O, suy ra $OD = OH$ (4).

$\Delta ABD = \Delta ACE$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $AD = AE$.

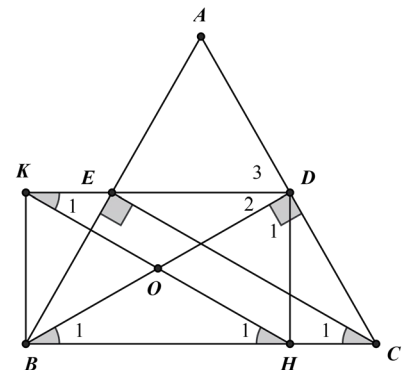
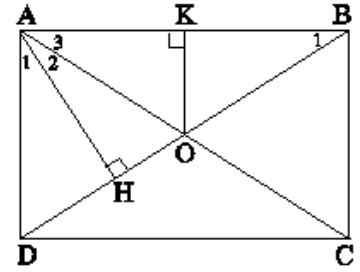
Các tam giác cân ADE và ABC có chung góc ở đỉnh A nên các góc ở đáy bằng nhau $\widehat{D}_3 = \widehat{ACB} \Rightarrow DE // BC$.

Do đó $\widehat{D}_2 = \widehat{B}_1, \widehat{K}_1 = \widehat{H}_1$ (so le trong).

Ta lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$ (chứng minh trên) nên $\widehat{D}_2 = \widehat{K}_1$, suy ra $OD = OK$ (5).

Từ (3), (4), (5) suy ra: $OB = OH = OD = OK$.

Tứ giác BKDH có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình chữ nhật.



Bài 9: a) Theo giả thiết, $DF = CE$ và $DF \parallel CE$, suy ra tứ giác $CDEF$ là hình bình hành.

Mặt khác, $\widehat{CDF} = 90^\circ$. Vậy $CDEF$ là hình chữ nhật.

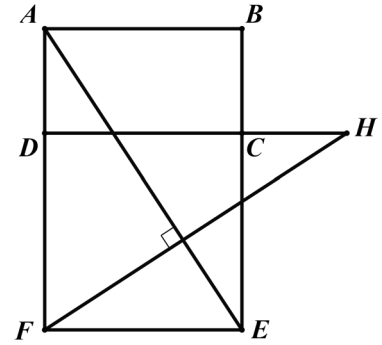
b) Ta có $AF = AD + DF = CH + CD = DH$

Hai tam giác AFE và HDF có:

$$AF = HD, \widehat{AFE} = \widehat{HDF} = 90^\circ, FE = DF$$

$$\text{Do đó } \triangle AFE = \triangle HDF \Rightarrow \widehat{FAE} = \widehat{DHF}$$

Mặt khác $\widehat{DHF} + \widehat{DFH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FAE} + \widehat{DFH} = 90^\circ$. Vậy $AE \perp FH$

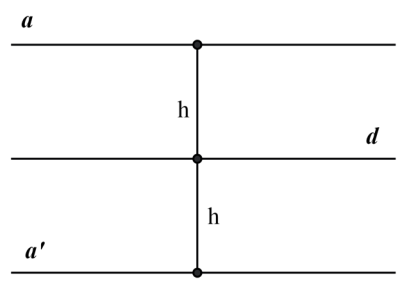


Đôi lời: Bài này kiến thức ít vận dụng nên em gắn 3 bài toán hình tổng ôn.

10. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Tập hợp các điểm cách một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đường thẳng đó một khoảng bằng h .
- Đường thẳng song song cách đều:
 - Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.
 - Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.



III. BÀI TẬP

Bài 1: Xét các hình chữ nhật ABCD có AD cố định. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, I là trung điểm của OA. Điểm I chuyển động trên đường nào?

Bài 2: Cho đoạn thẳng AB cố định bằng 6 cm, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác vuông cân AMC, BMD (cạnh huyền AM, BM). Trung điểm I của CD chuyển động trên đường nào?

Tổng ôn:

Bài 3: Cho ΔABC ($\hat{A} = 90^\circ$) có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ MD vuông góc với AB tại D và ME vuông góc với AC tại E. Vẽ đường cao AH của ΔABC .

- Chứng minh $ADME$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $CMDE$ là hình bình hành.
- Chứng minh $MHDE$ là hình thang cân.
- Qua A kẻ đường thẳng song song với DH cắt DE tại K. Chứng minh $HK \perp AC$

Bài 4: Cho ΔABC nhọn, các đường trung tuyến BN và CM cắt nhau tại G. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BG và CG.

- Chứng minh tứ giác $MNCB$ là hình thang.
- Chứng minh tứ giác $MNKI$ là hình bình hành.

- c) ΔABC cần thêm điều kiện gì để tứ giác $MNKI$ là hình chữ nhật.
- d) Tính diện tích ΔABC biết diện tích của ΔABN bằng 5cm^2 .

Bài 5: Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AB và E là điểm đối xứng của H qua M.

- a) Chứng minh $AHBE$ là hình chữ nhật.
- b) Chứng minh $ACHE$ là hình bình hành.
- c) Gọi N là trung điểm của AC. Chứng minh ba đường thẳng AH, CE, MN đồng qui.
- d) CE cắt AB tại K. Chứng minh $AB = 3AK$.

Bài 6*: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH. Trên tia HC lấy điểm D so cho $HD = HA$, đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E.

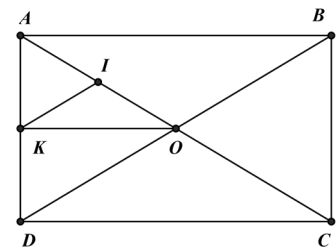
- a) Chứng minh rằng $AE = AB$.
- b) Gọi M là trung điểm của BE. Tính \widehat{AHM}

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

Kẻ $OK \perp AD$. Tam giác ACD có $OA = OC$ và $OK \parallel CD$ nên K là trung điểm của AD, do đó AK cố định.

Tam giác AOK có KI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $IA = IK$. Điểm I cách đều hai điểm A và K cố định nên chuyển động trên đường trung trực của AK.



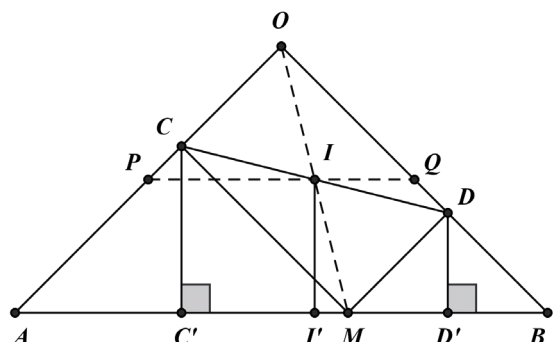
Bài 2: Kẻ CC', DD', II' vuông góc với AB.

Các tam giác ACM, BDM vuông cân có CC', DD' là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

$$CC' + DD' = \frac{MA}{2} + \frac{MB}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{cm})$$

II' là đường trung bình của hình thang $CDD'C'$

$$\text{nên: } II' = \frac{CC' + DD'}{2} = \frac{3}{2} = 1,5(\text{cm})$$



I cách AB cố định một khoảng không đổi là 1,5 cm nên I chuyển động trên đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng 1,5 cm.

Giới hạn: Khi M trùng với A thì I trùng P, khi M trùng B thì I trùng Q (P, Q là trung điểm của OA, OB với O là đỉnh của tam giác vuông cân ABO cạnh huyền AB). Điểm I chuyển động trên đoạn thẳng PQ.

Bài 3: a) Tứ giác ADME có:

$\widehat{A} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$ nên ADME là hình chữ nhật.

b) $MD \perp AB, AC \perp AB$, suy ra $MD \parallel AC$.

Vì M là trung điểm của BC nên MD là đường trung bình của $\triangle ABC$.

Tương tự, ME cũng là đường trung bình của $\triangle ABC$. Từ đó ta có A, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra $MD \parallel CE$ và $DE \parallel MC$. Vậy CMDE là hình chữ nhật.

c) Theo trên thì $DE \parallel HM$ (1).

Xét tam giác ABH vuông tại H, có HD là trung tuyến nên $HD = \frac{1}{2} AB$.

Mặt khác, trong tam giác ABC, ME là đường trung bình nên $ME = \frac{1}{2} AB$.

Suy ra $HD = ME$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra MHDE là hình thang cân.

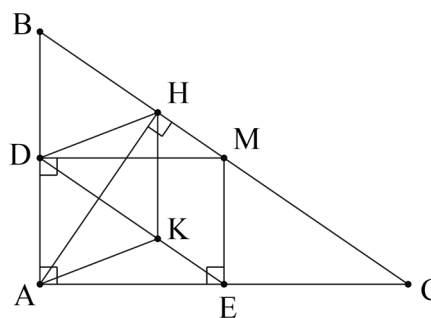
d) Xét hai tam giác ADK và DBH, có:

$DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{DBH}$ (Hai góc đồng vị).

$AD = DB$ (vì D là trung điểm của AB)

$DH \parallel AK \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{BDH}$ (Hai góc đồng vị).

Suy ra $\triangle ADK = \triangle DBH \Rightarrow AK = DH$.



Lại có $AK \parallel DH$, do đó $ADHK$ là hình bình hành, suy ra $HK \parallel DA$.

Vì $DA \perp AC$ nên $HK \perp AC$

Bài 4: a) M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC , suy ra $MN \parallel BC$. Vậy $MNCB$ là hình thang.

b) Trong $\triangle BCG$, IK là đường trung bình, suy ra

$$IK = \frac{1}{2}BC \text{ và } IK \parallel BC \text{ (1)}.$$

Theo trên: $MN = \frac{1}{2}BC$ và $MN \parallel BC$ (1).

Từ (1) và (2) suy ra $MN = IK$ và $MN \parallel IK$. Vậy $MNKI$ là hình bình hành.

c) $MNKI$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $MI \perp IK$.

Vì $IK \parallel BC$ nên $MI \perp IK \Leftrightarrow MI \perp BC$

Trong $\triangle ABG$, MI là đường trung bình nên $MI \parallel AG$. Do đó $MI \perp BC \Leftrightarrow AG \perp BC$

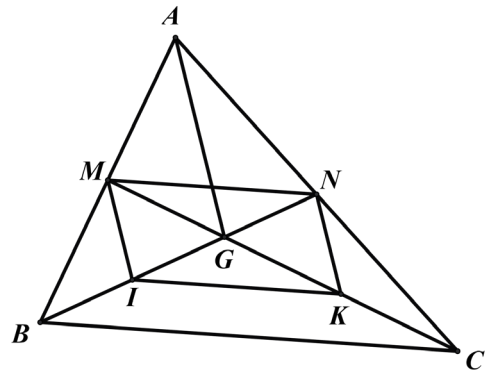
Vì AG là đường trung tuyến trong $\triangle ABC$ nên $AG \perp BC$ khi $\triangle ABC$ cân tại A .

Như vậy $MNKI$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\triangle ABC$ cân tại A .

d) Gọi h là khoảng cách từ đỉnh B lên AC . Khi đó ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h \cdot AC \text{ và } S_{ABN} = \frac{1}{2}h \cdot AN = \frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

Như vậy $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ABN}$. Theo giả thiết $S_{ABN} = 5cm^2$ nên $S_{ABC} = 10cm^2$.



Bài 5:

a) Theo giả thiết thì M là trung điểm của AB và HE . Tứ giác $AHBE$ có hai đường chéo AB và HE cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn nên $AHBE$ là hình bình hành.

Mặt khác $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên $AHBE$ là hình chữ nhật.

b) Vì tam giác ABC cân tại A nên H là trung điểm của BC . Suy ra

$$BH = CH.$$

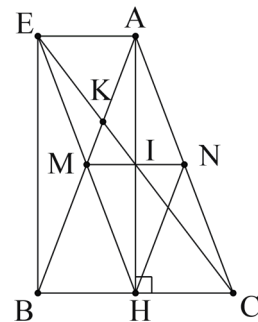
Ta có $AE \parallel CH$ và $AE = BH = CH$ nên $ACHE$ là hình bình hành.

c) HN là đường trung bình trong tam giác ABC , ta có $HN \parallel AM$ và $HN = AM$ nên $AMHN$ là hình bình hành.

$AEHC$ và $AMHN$ là hai hình bình hành nên AH, CE, MN đồng quy tại trung điểm I của mỗi đoạn.

d) Trong tam giác AEH có AM và EI là hai đường trung tuyến, do đó K là trọng tâm tam giác AEH . Suy ra $AK = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{3}AB$.

Vậy $AB = 3AK$.



Bài 6: a) Dựng $AI \perp DE$, I thuộc DE. Ta có $AHDI$ là hình chữ nhật.

Suy ra $AI = HD = AH$.

Hai tam giác vuông AIE và AHB có:

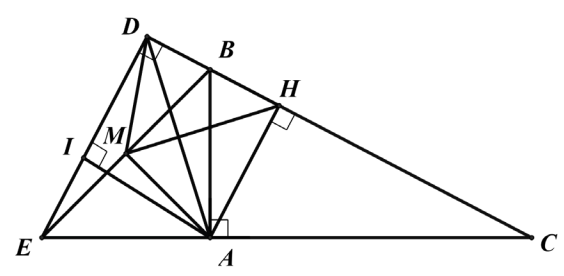
$\widehat{EAI} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với góc \widehat{IAB}), $AI = AH$

Do đó $\triangle AIE = \triangle AHB$, suy ra $AE = AB$.

b) Ta có tam giác DBE vuông tại D, tam giác ABE vuông tại A. Vì M là trung điểm của BE nên

$AM = DM = \frac{1}{2}BE$. Từ đó dễ dàng thấy được $\triangle AMH = \triangle DMH$ (c-c-c).

suy ra $\widehat{MHA} = \widehat{MHD} = 45^\circ$.



11. HÌNH THOI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- **Định nghĩa:** Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Hình thoi cũng là một hình bình hành.

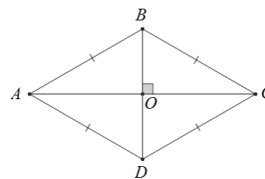
- **Tính chất:**

- Hình thoi có tất cả tính chất của hình bình hành.

- Trong hình thoi:

+ Hai đường chéo vuông góc với nhau.

+ Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi.



- **Dấu hiệu nhận biết:**

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.

- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.

- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$, đường trung tuyến BM. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng $ABHM$ là hình thoi.

Bài 2: Cho tứ giác ABCD có $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi

Bài 3: Cho hình thang cân $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

Bài 4: Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt EF tại D, cắt BC tại G. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC. Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ $AE \perp BC$ tại E, $DF \perp AB$ tại F. Biết $AE = DF$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Bài 6: Cho hình thang $ABCD$ gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của hai đáy và hai đường chéo của hình thang.

a) Chứng minh rằng tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành;

b) Hình thang $ABCD$ phải có thêm điều kiện gì để tứ giác $MPNQ$ là hình thoi?

Bài 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AM = DN$. Đường trung trực của BM lần lượt cắt các đường thẳng MN và BC tại E và F .

a) Chứng minh E và F đối xứng với nhau qua AB ;

b) Chứng minh tứ giác $MEBF$ là hình thoi;

c) Hình bình hành $ABCD$ có thêm điều kiện gì để tứ giác $BCNE$ là hình thang cân.

Tự luyện:

Bài 8 Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 6\text{cm}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC .

a) Tính độ dài MN ? Chứng minh $MBNC$ là hình thang cân.

b) Gọi K là điểm đối xứng của B qua N . Chứng minh tứ giác $ABCK$ là hình bình hành.

c) Gọi H là điểm đối xứng của P qua M . Chứng minh $AHBP$ là hình chữ nhật.

d) Chứng minh $AMPN$ là hình thoi.

Bài 9: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC .

a) Chứng minh tứ giác $ACED$ là hình thang vuông.

b) Gọi F là điểm đối xứng của E qua D . Chứng minh $ACEF$ là hình bình hành.

c) Chứng minh $AEBF$ là hình thoi.

d) Gọi H là hình chiếu của điểm E trên AC . Chứng minh ba đường thẳng AE, CF, DH đồng qui.

Bài 10: Tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi M, N là trung điểm của BC, AD . Gọi I, K là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng MN là tia phân giác của góc IMK .

Bài 11: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao AD, BE . Tia phân giác của góc DAC cắt BE, BC theo thứ tự ở I, K . Tia phân giác của góc EBC cắt AD, AC theo thứ tự ở M, N .

a) Chứng minh rằng $AK \perp BN$

b) Tứ giác $MINK$ là hình gì ?

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Gọi O là giao điểm của BM và AH.

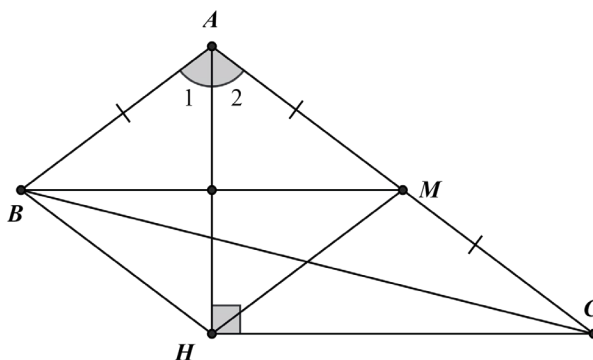
Tam giác ABM cân tại A (vì $AM = \frac{1}{2}AC = AB$)

có tia AH là tia phân giác của góc A, nên AH cũng là đường cao hay $AH \perp BM$ và $OB = OM$ (1).

Tam giác AHC có $AM = MC$ và $MO \parallel CH$ (cùng vuông góc đối với AH) nên $OA = OH$ (2).

Tứ giác ABHM có $OB = OM, OA = OH$ nên ABHM là hình bình hành.

Lại có $AH \perp BM$ nên ABHM là hình thoi.



Bài 2: Trong tam giác ABD, MQ là đường trung bình nên $MQ = \frac{1}{2}AD$ và $MQ \parallel AD$ (1).

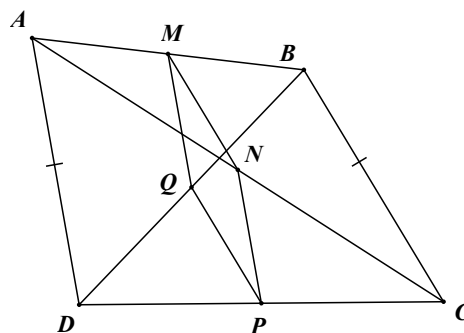
Trong tam giác ACD, NP là đường trung bình nên $NP = \frac{1}{2}AD$ và $NP \parallel AD$ (1).

Từ (1) và (2) suy ra $MQ = NP$ và $MQ \parallel NP$. Do đó MNPQ là hình bình hành.

Lại có: trong tam giác ABC, MN là đường trung bình, ta có $MN = \frac{1}{2}BC$. Theo giả thiết, $AD = BC$

nên $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = MQ$

Tứ giác MNPQ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên MNPQ là hình thoi.



Bài 3:

Trong tam giác ABC, MN là đường trung bình nên ta có $MN = \frac{1}{2}AC$ và $MN \parallel AC$ (1).

Tương tự trong tam giác ACD, $PQ = \frac{1}{2}AC$ và $PQ \parallel AC$ (2)

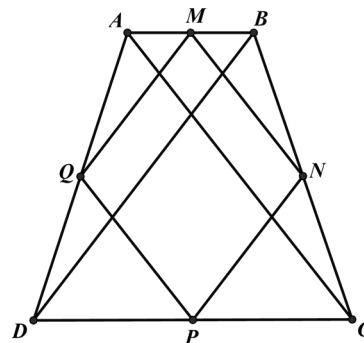
Từ (1) và (2) suy ra $MN = PQ$ và $MN // PQ$, do vậy $MNPQ$ là hình bình hành (3).

Lại xét tam giác ABD, MQ là đường trung bình, suy ra

$$MQ = \frac{1}{2}BD$$

Vì ABCD là hình thang cân nên $AC = BD$, từ đó suy ra $MN = MQ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là thoi.



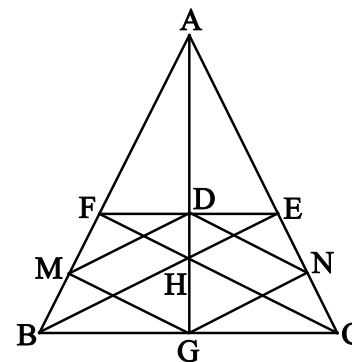
Bài 4:

$$\triangle ABE = \triangle ACF \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AE = AF \text{ và } BE = CF .$$

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.

Xét $\triangle EBC$ có $GN // BE$ (cùng vuông góc với AC) và $GB = GC$ nên $NE = NC$.



Chứng minh tương tự ta được $MF = MB$.

Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM // GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

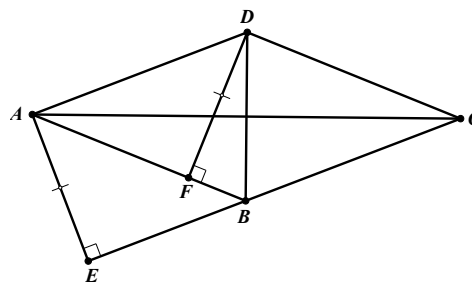
Bài 5: Xét $\triangle EAB$ và $\triangle FDA$ có:

$$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ, EA = FD \text{ (theo giả thiết),}$$

$$\widehat{EBA} = \widehat{FAD} \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \triangle EAB = \triangle FDA \text{ (g.c.g) suy ra } AB = DA.$$

$ABCD$ là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau nên $ABCD$ là hình thoi.



Bài 6: a) Áp dụng tính chất đường trung bình của tam giác cho ΔABC và ΔDBC ta sẽ có:

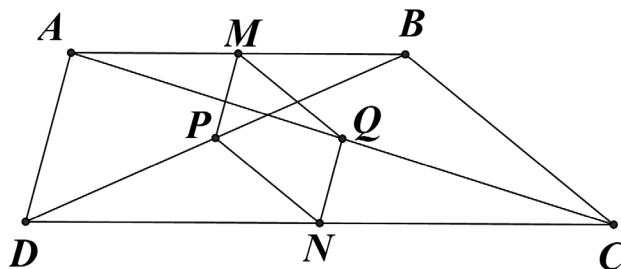
$MQ // PN // BC$ và

$MQ = PN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MPNQ$ là hình bình hành.

b) Tương tự ta có:

$QN // MP // AD$ và $QN = MP = \frac{1}{2}AD$.

Nên để $MNPQ$ là hình thoi thì $MN \perp PQ$ khi đó $MN \perp CD$ và trung trực hay trục đối xứng của AB và $CD \Rightarrow$ hình thang $ABCD$ là hình thang cân.



Bài 7: a) Do $AM = DN \Rightarrow MADN$ là hình bình hành

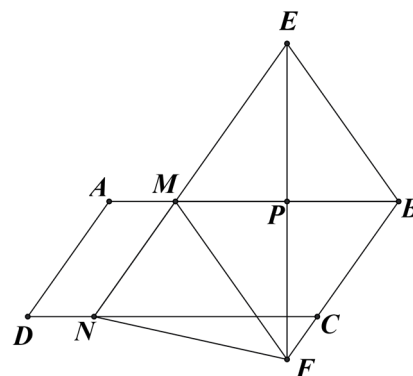
$\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{AMN}$; $\widehat{AMN} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh) $\widehat{EMB} = \widehat{MBC} = \widehat{D}$

Ta có $\Delta MPE = \Delta BPE$ nên $EP = FP$. Vậy $MEBF$ là hình thoi và 2 điểm E, F đối xứng nhau qua AB .

b) Tứ giác $MEBF$ có $MB \cap EF = P$; Lại có P là trung điểm BM , P là trung điểm EF ; $MB \perp EF \Rightarrow MEBF$ là hình thoi.

c) Để $BNCE$ là hình thang cân thì $\widehat{CNE} = \widehat{BEN}$.

Mà $\widehat{CNE} = \widehat{D} = \widehat{MBC} = \widehat{EMB} = \widehat{EBM}$ nên ΔMEB có 3 góc bằng nhau, suy ra điều kiện để $BNCE$ là hình thang cân thì $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

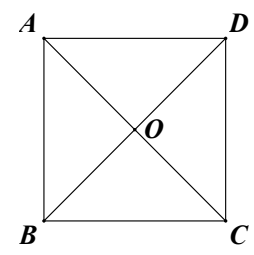


12. HÌNH VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$



Từ định nghĩa hình vuông suy ra

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc bằng nhau.

Tính chất: Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi

Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AB, BC, CD, DA , lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh $EFGH$ là hình vuông.

Bài 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Gọi M là giao điểm của AF và DE , N là giao điểm của BF và CE .

- Tứ giác $ADFE$ là hình gì? Vì sao?
- Tứ giác $EMFN$ là hình gì? Vì sao?

Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AD < AB < 2AD$). Vẽ các tam giác vuông cân ABI , CDK ($\widehat{I} = \widehat{K} = 90^\circ$), I và K nằm trong hình chữ nhật. Gọi E là giao điểm của AI và DK , F là giao điểm của BI và CK . Chứng minh rằng:

- EF song song với CD .
- $EKFI$ là hình vuông.

Bài 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Ở phía ngoài hình bình hành vẽ các hình vuông $ADEF$ và $ABGH$. Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình vuông $ADEF$. Chứng minh rằng:

- $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$
- $OH = OC$
- $OH \perp OC$

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

- Chứng minh $AN = DM$ và $AN \perp DM$
- Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.
- Gọi E là giao điểm của DM và AN. Chứng minh $CE = CD$.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 90^\circ$ và $AD = BC$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, BD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi E, F lần lượt trên cạnh AB, AD sao cho $AE = DF$. Chứng minh rằng $DE = CF$ và $DE \perp CF$

Bài 8: Cho tam giác ABC cân tại A ($\hat{A} < 90^\circ$), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Tia phân giác của góc ABD cắt EC và AC theo thứ tự tại M và P. Tia phân giác của góc ACE cắt DB và AB theo thứ tự tại Q và N. Chứng minh rằng:

- $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$.
- $BH = CH$.
- Tam giác BOC vuông cân.
- MNPQ là hình vuông.

Bài 9: Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M tùy ý trên cạnh BC. Từ M, vẽ một đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho: $\widehat{AMB} = \widehat{AMK}$. Chứng minh $\widehat{KAM} = 45^\circ$.

Bài tập tự luyện:

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông ABDE và ACFG. Chứng minh rằng:

- Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy;
- Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

Bài 11: Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là trung điểm của EF. Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM. Chứng minh rằng tứ giác DEMF là hình vuông.

Bài 12: Cho tam giác ABC, $\hat{A} = 45^\circ$. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Chỉ ra $AH = BE = CF = DG$. Từ đó suy ra:

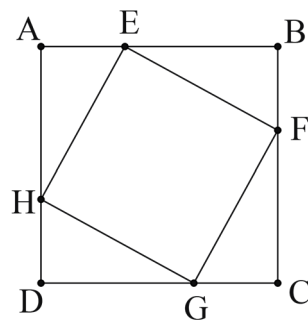
$$\triangle AEH = \triangle BFE = \triangle CGF = \triangle DHG \text{ (c-g-c)}.$$

Do đó $HE = EF = FG = GH$ (1).

Mặt khác, vì $\triangle AEH = \triangle BFE \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{AHE}$

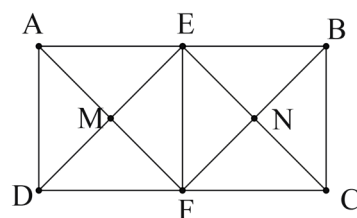
Suy ra $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FEH} = 90^\circ$ (2).

(1), (2) suy ra $EFGH$ là hình vuông.



Bài 2: a) E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD nên ta có $EF \parallel AD \parallel BC$, do đó dễ thấy $ADFE$ là hình chữ nhật.

Mặt khác $AD = AE = \frac{1}{2}AB$. Vậy $ADFE$ là hình vuông.



b) Chứng minh tương tự câu a, ta có $BCFE$ cũng là hình vuông. Do đó hai tam giác MEF và NEF là hai tam giác vuông cân tại M, N. từ đó suy ra $EMFN$ là hình vuông.

Bài 3: a) Tam giác KCD cân tại K nên $KD = KC$ (1).

$$\triangle EAD = \triangle FBC \text{ (g.c.g) nên } DE = CF \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$KD - DE = KC - CF \Leftrightarrow KE = KF.$$

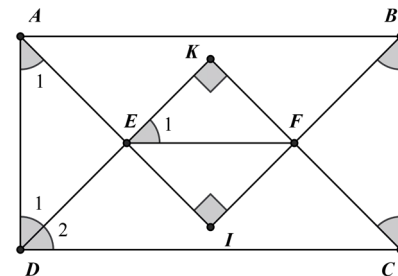
Tam giác vuông KEF có $KE = KF$ nên $\widehat{E}_1 = 45^\circ$.

Ta lại có: $\widehat{D}_2 = 45^\circ \Rightarrow EF \parallel CD$ (2 góc đồng vị bằng nhau).

b) Tam giác EAD có $\widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = 45^\circ$ nên $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Tứ giác $EKFI$ có $\widehat{E} = \widehat{K} = \widehat{I} = 90^\circ$ nên $EKFI$ là hình chữ nhật.

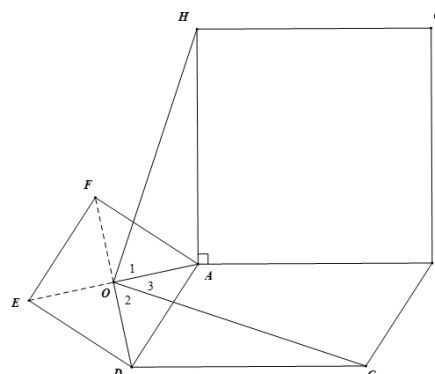
Lại có $KE = KF \Rightarrow EKFI$ là hình vuông.



Bài 4: a) Ta có: $OA \perp OD$ (tính chất đường chéo hình vuông); $AH \perp DC$ (vì $AH \perp AB, AB \parallel CD$). Vậy $\widehat{OAH} = \widehat{ODC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

b) Xét $\triangle OAH$ và $\triangle ODC$:

$OA = OD$ (tính chất đường chéo hình vuông)



$$\widehat{OAH} = \widehat{ODC} \text{ (câu a)}$$

$$AH = DC \text{ (cùng bằng } AB \text{)}$$

Vậy $\triangle OAH = \triangle ODC$ (c.g.c) suy ra $OH = OC$.

c) $\triangle OAH = \triangle ODC \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ mà $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ$ (tính chất đường chéo hình vuông), nên $\widehat{O_1} + \widehat{O_3} = 90^\circ$. Vậy $OH \perp OC$.

Bài 5: a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A , có $AB = AD$ và $BN = AM$, do đó $\triangle ABN = \triangle DAM$

suy ra $AN = DM$ và $\widehat{BAN} = \widehat{ADM}$.

Mà $\widehat{BAN} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, do đó $\widehat{ADM} + \widehat{DAN} = 90^\circ$, hay $\widehat{AED} = 90^\circ$.

Vậy ta có $AN = DM$ và $AN \perp DM$.

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác $EFGH$.

$MB \parallel DP$ và $MB = DP \Rightarrow MBPD$ là hình bình hành.

Suy ra $BP \parallel DM \Rightarrow AN \perp BP$.

Tương tự ta cũng có $CQ \perp DM$.

Như vậy tứ giác $EFGH$ có $\widehat{E} = \widehat{F} = \widehat{H} = 90^\circ$.

* Ta chứng minh $EF = EH$:

Để thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF , E là trung điểm của AF .

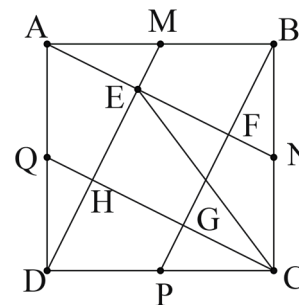
Tương tự H là trung điểm của DE .

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E , có:

$$AB = DA ; \widehat{BAF} = \widehat{ADE} \text{ (vì } \triangle ABN = \triangle DAM \text{)}. \text{ Suy ra } \triangle ABF = \triangle DAE \Rightarrow AF = DE.$$

Từ đó ta có $EF = EH$. Vậy $EFGH$ là hình vuông.

c) H là trung điểm của DE và $CH \perp DE$, do đó ta suy ra $\triangle CDE$ cân tại C , hay là $CE = CD$.



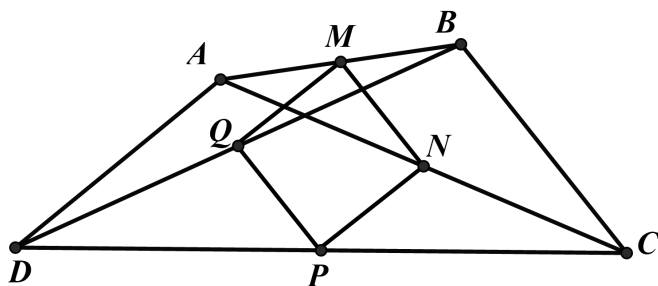
Bài 6: Trong tam giác ABC , MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2}BC$

$$\text{Lập luận tương tự, ta có } PQ = \frac{1}{2}BC, MQ = \frac{1}{2}AD, NP = \frac{1}{2}AD$$

Theo giả thiết, $AD = BC$ suy ra $MN = QP = MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình thoi (1).

Mặt khác ta có:

$\widehat{DPQ} = \widehat{DCB}, \widehat{NPC} = \widehat{ADC}$ (góc đồng vị).
 theo giả thiết $\widehat{DCB} + \widehat{ADC} = 90^\circ$, suy ra
 $\widehat{DPQ} + \widehat{NPC} = 90^\circ$. Do vậy ta được góc
 $\widehat{QPN} = 90^\circ$ (2).



Từ (1) và (2) cho ta MNPQ là hình vuông.

Bài 7: Gọi I là giao điểm của DE và CF.

Xét hai tam giác ADE và DCF có:

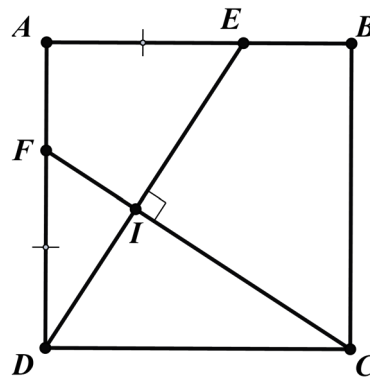
$AD = DC$ (vì ABCD là hình vuông).

$\widehat{EAD} = \widehat{FDC} = 90^\circ$.

$AE = DF$ (theo giả thiết)

Vậy $\triangle ADE = \triangle DCF$, khi đó ta có:

$DE = CF$ và $\widehat{ADE} = \widehat{DCF}$.



Mặt khác $\widehat{DCF} + \widehat{DFC} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{ADE} + \widehat{DFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DIF} = 90^\circ$. Vậy $DE \perp CF$.

Bài 8:

a) $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với \hat{A}).

b) Ta có: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{ABC} - \widehat{ABD} = \widehat{ACB} - \widehat{ACE} \Leftrightarrow \widehat{B_3} = \widehat{C_3}$.

$\Rightarrow BH = CH$.

c) Tam giác OBC có $\widehat{B_3} = \widehat{C_3}, \widehat{B_2} = \widehat{C_2}$

nên $\widehat{B_3} + \widehat{B_2} = \widehat{C_3} + \widehat{C_2} \Leftrightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB}$

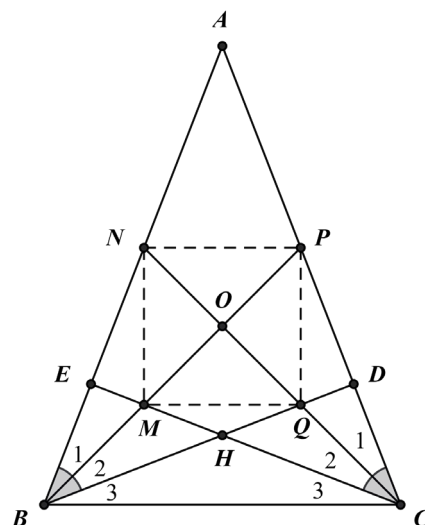
$\Rightarrow \triangle OBC$ cân tại O (1).

Mặt khác, vì $\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ nên ta có:

$\widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{C_3} + \widehat{C_2} = \widehat{B_2} + \widehat{B_3} + \widehat{B_1} + \widehat{C_3} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle OBC$ vuông cân.



d) Tam giác OBC cân tại O nên $OB = OC$ (3).

$\triangle BMH = \triangle CQH$ (g.c.g), $\Rightarrow BM = CQ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $OB - BM = OC - CQ \Leftrightarrow OM = OQ$

Mà $\triangle BNQ$ cân tại B có đường cao BO cũng là đường trung tuyến nên O là trung điểm của QN hay $ON = OQ$.

Tương tự ta có $OP = OM$.

$\Rightarrow OM = ON = OQ = OP \Rightarrow MNPQ$ là hình thoi.

Ta lại có: $MP \perp NQ$ nên MNPQ là hình vuông

Bài 9: MA là phân giác góc BMK nên MA là trục đối xứng của hai đường thẳng MK và MB.

Gọi I là điểm đối xứng của K qua MA, suy ra I thuộc đường thẳng BC.

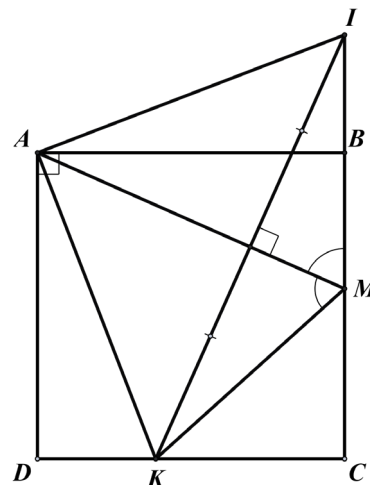
Ta có $AI = AK$, $AB = AD$.

Hai tam giác vuông ABI và ADK có hai cạnh bằng nhau nên $\triangle ABI = \triangle ADK$.

Từ đó ta có $\widehat{IAB} = \widehat{KAD}$.

$\widehat{IAK} = \widehat{IAB} + \widehat{BAK} = \widehat{KAD} + \widehat{BAK} = 90^\circ$. Vậy ta có:

$$\widehat{MAK} = \frac{1}{2} \widehat{IAK} = 45^\circ.$$



13. ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình bình hành $ABCD$. M là trung điểm AB . Nối C với M . Đường thẳng qua A song song với CM cắt CD ở N .

- Chứng minh rằng tứ giác $AMCN$ là hình bình hành.
- Gọi O là giao điểm của AC và MN . Chứng minh rằng B, O, D thẳng hàng.

Bài 2: Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm E, F, G, H, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD .

- Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.
- Gọi O là giao điểm giữa EG và HF . Chứng minh rằng M và N đối xứng nhau qua O .

Bài 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ ($AB > CD$), M là điểm trên AB sao cho $MB = BC$. Vẽ $MN \perp CD$ tại N . Vẽ $DE \perp BN$ tại E .

- Tứ giác $AMND$ là hình gì? Vì sao?
- Tứ giác $MBCN$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh rằng $\widehat{AEC} = 90^\circ$

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA , tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là :

- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông

Bài 5: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD, BD , tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để tứ giác $EFGH$ là :

- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A , vẽ đường phân giác AH . Gọi I là trung điểm của AB , đường vuông góc với AB ở I cắt AH tại O . Vẽ M là điểm sao cho O là trung điểm của AM

- Chứng minh tứ giác $IOMB$ là hình thang vuông.
- Gọi K là trung điểm của OM . Chứng minh tam giác IKB cân.
- Chứng minh tứ giác $AIKC$ có tổng các góc đối bằng 180° .

Bài 7: Cho $ABCD$ là một hình thoi có cạnh bằng 1. Giả sử tồn tại điểm M thuộc cạnh BC và một điểm N thuộc cạnh C sao cho tam giác CMN có chu vi bằng 2 và $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$. Tính các góc của hình thoi $ABCD$.

Bài tập tự luyện:

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM .

a) Chứng minh $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$.

b) Trên đường trung trực Mx của đoạn thẳng BC , lấy điểm D sao cho $MD = MA$

(D và A thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BC). Chứng minh rằng AD là phân giác chung của \widehat{MAH} và \widehat{CAB} .

c) Từ D kẻ DE , DF lần lượt vuông góc với AB và AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

d) Chứng minh $\triangle DBE = \triangle DCF$.

Bài 9: Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của điểm A qua điểm D .

a) Chứng minh tam giác ACE là tam giác vuông cân.

b) Từ A hạ $AH \perp BE$, gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AH và HE . Chứng minh tứ giác $BMNC$ là hình bình hành.

c) Chứng minh M là trực tâm của tam giác ANB .

d) Chứng minh $\widehat{ANC} = 90^\circ$.

Bài 10: Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông BDE , $ACFG$.

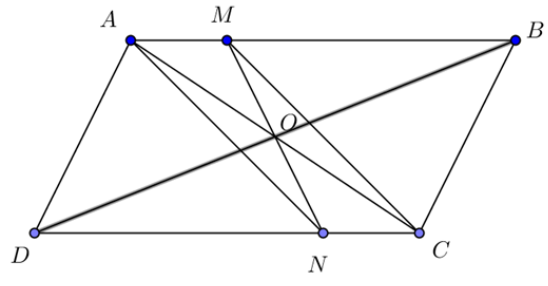
a) Chứng minh tứ giác $BCGE$ là hình thang cân.

b) Gọi K là giao điểm của các tia DE và FG , M là trung điểm của đoạn thẳng EG . Chứng minh ba điểm K , A , M thẳng hàng.

d) Chứng minh DC , FB và AM đồng quy.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:



a) Tứ giác ABCD là hình bình hành

⇒ AB//CD, AD//BC. Mà M ∈ AB và N ∈ CD nên AM//NC

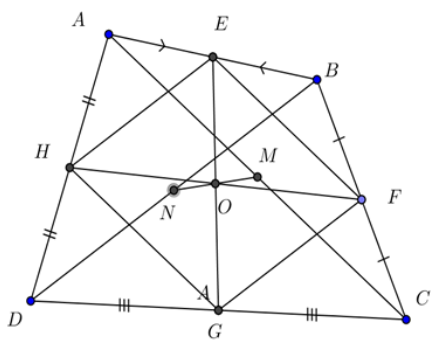
Xét tứ giác AMCN có AM//NC (cmt) và AN//MC (gt),

Do đó AMCN là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết hình bình hành).

b) Tứ giác AMCN là hình bình hành (câu a) do đó O là trung điểm của AC và MN.

Tứ giác ABCD là hình bình hành (gt) có O là trung điểm của AC nên O là trung điểm của BD. Vậy B, O, D thẳng hàng.

Bài 2:

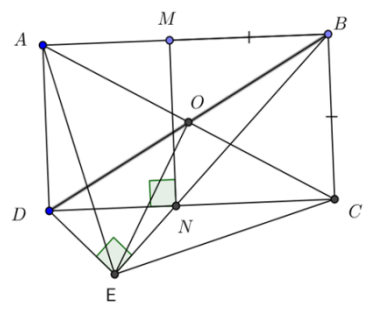


a) $EH // BD, EH = \frac{BD}{2}, GF // BD, GF = \frac{BD}{2}$

b) NGME là hình bình hành có O là trung điểm của EG. Suy ra O là trung điểm của MN

Bài 3: a) Tứ giác AMND là hình chữ nhật.

b) Tứ giác MBCN là hình vuông.



c) Gọi O là giao điểm giữa AC và BD

Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên O là trung điểm AC và $BD, AC = BD$.

Xét $\triangle EBD$ vuông tại E có EO là trung tuyến $\Rightarrow EO = \frac{BD}{2}$ Do vậy $EO = \frac{AC}{2}$.

Xét $\triangle EAC$ có EO là trung tuyến và $EO = \frac{AC}{2}$ nên

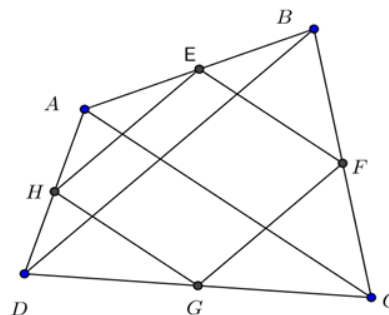
$\triangle EAC$ vuông tại E .

Bài 4: Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành

a) $EFGH$ là hình chữ nhật \Leftrightarrow Hình bình hành $EFGH$

có $\widehat{HEF} = 90^\circ \Leftrightarrow EH \perp EF$

$\Leftrightarrow BD \perp AC$



b) $EFGH$ là hình thoi \Leftrightarrow Hình bình hành $EFGH$ có $EH = EF \Leftrightarrow BD = AC$

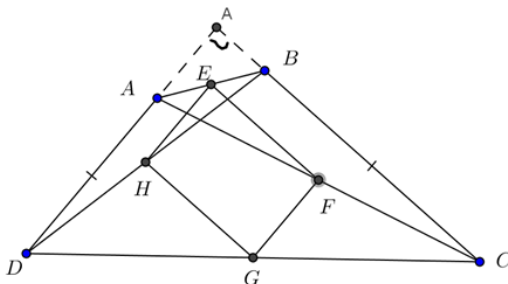
c) $EFGH$ là hình vuông \Leftrightarrow Hình chữ nhật $EFGH$ có $EH = EF \Leftrightarrow BD \perp AC$ và $BD = AC$.

Bài 5:

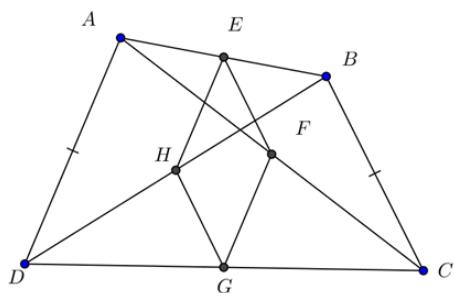
Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành

a) $EFGH$ là hình chữ nhật \Leftrightarrow Hình bình hành $EFGH$ có $\widehat{HEF} = 90^\circ \Leftrightarrow EH \perp EF$

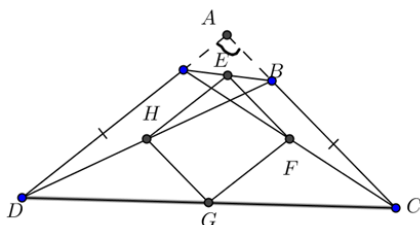
$\Leftrightarrow AD \perp BC$.



b) $EFGH$ là hình thoi \Leftrightarrow Hình bình hành $EFGH$ có $EH = EF \Leftrightarrow AD = BC$



c) $EFGH$ là hình vuông \Leftrightarrow Hình chữ nhật $EFGH$ có $EH \perp EF$; $EH = EF \Leftrightarrow AD \perp BC$ và $AD = BC$



Bài 6:

a) IO là đường trung bình của tam giác $ABM \Rightarrow IO \parallel MB$. Mà $AB \perp IO(gt)$ nên $AB \perp MB$

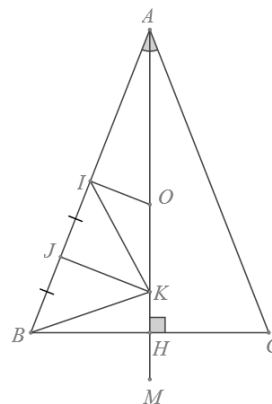
Tứ giác $OIBM$ có: $OI \parallel MB$ và $\widehat{OIB} = 90^\circ$ suy ra $OIBM$ là hình thang vuông.

b) Gọi J là trung điểm BI suy ra JK là đường trung bình của hình thang $OIBM \Rightarrow JK \parallel OI$ mà $BI \perp OI$ nên $JK \perp BI$. Vậy JK là trung trực của $BI, K \in KJ \Rightarrow KI = KB \Rightarrow \Delta BKI$ cân tại K .

c) Do ΔBKI cân tại K nên $\widehat{KBI} = \widehat{BIK}$. Trong ΔABC cân tại A, AH là đường phân giác, suy ra AH là trục đối xứng $\Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{ACK}$
 Vậy $\widehat{BIK} = \widehat{ACK}$

Ta có $\widehat{AIK} + \widehat{ACK} = \widehat{AIK} + \widehat{BIK} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{IAC} + \widehat{IKC} = 180^\circ$$



Bài 7: Trên nửa mặt phẳng bờ AD không chứa B vẽ tia Ax lấy điểm E sao cho $AE = AM$

$$\Rightarrow BM = DE, \widehat{ABM} = \widehat{ADE}$$

Ta có $\widehat{MAN} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$ (vì $\widehat{BAD} = 2\widehat{MAN}$)

$\Delta AMN = \Delta AEN$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = NE$.

Mà $CM + CN + MN = 2(gt)$ và có $CM + CN + MB + DN = 2$ (vì $BC = CD = 1$)

Suy ra $MN = MB + DN$

Ta có $NE = DE + DN$

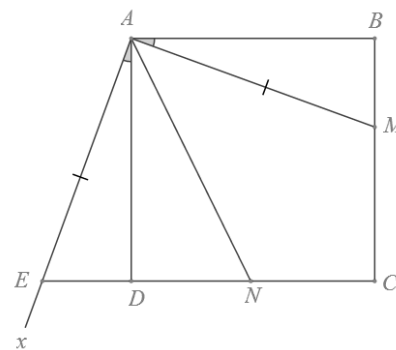
$\Rightarrow D$ nằm giữa $E, N \Rightarrow D, E, N$ thẳng hàng.

Ta có $\widehat{ADN} = \widehat{ABC}$ ($ABCD$ là hình thoi)

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

Suy ra $\widehat{ADN} = \widehat{ADE}$.

Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ADN} = 90^0$ nên là hình vuông



1. ĐA GIÁC – ĐA GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đa giác: $A_1A_2\dots A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $A_1A_2; A_2A_3; \dots; A_nA_1$ trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào đó có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng

2. Đa giác lồi: là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác.

Lưu ý: Trong chương trình THCS, chúng ta sẽ chỉ xét các đa giác lồi. Vì vậy, nếu không giải thích gì thêm, chúng ta viết “đa giác” để thay cho “đa giác lồi”.

3. Các khái niệm khác

• Một đa giác có n đỉnh được gọi là n – giác.

Ví dụ: tam giác, tứ giác, ngũ giác, thập giác, ..., 100 – giác.

• *Đường chéo* của đa giác là các đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau của đa giác đó.

• *Đa giác đều* là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau

III. BÀI TẬP

Bài 1: Tính số đo của mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, bát giác đều (đa giác đều 8 cạnh).

Bài 2: a) Tính tổng các góc của đa giác 15 cạnh.

b) Đa giác nào có tổng các góc bằng 1620° ?

Bài 3: Tìm số cạnh của một đa giác biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Bài 4: Tính số cạnh của một đa giác đều, biết mỗi góc của nó bằng 135° .

Bài 5: Góc ngoài của đa giác là góc kề bù với một góc của đa giác. Ta coi ở mỗi đỉnh của đa giác có một góc ngoài. Chứng minh rằng tổng các góc ngoài của đa giác bằng 360° .

Bài 6: Cho tam giác đều ABC , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, K, M theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC . Chứng minh rằng $DKFIEM$ là lục giác đều.

Bài 7: a) Tính số đường chéo của đa giác n cạnh.

b) Đa giác nào có số đường chéo bằng số cạnh?

Bài 8: Cho lục giác đều $ABCDEF$. Gọi M là trung điểm của EF , N là trung điểm của BD . Chứng minh rằng AMN là tam giác đều.

Bài 9: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo BD , lấy các điểm E và K sao cho $BE = DK$.

a) Chứng minh rằng $AKCE$ là hình bình hành.

b) Hình bình hành $ABCD$ có điều kiện gì thì $AKCE$ là hình thoi.

c) Gọi M là giao điểm của AK và CD . Xác định vị trí của điểm K để M là trung điểm của CD .

Tự luyện

Bài 10: Lục giác $ABCDEF$ có các cạnh đối song song và bằng nhau. Chứng minh rằng đường chéo AD, BE, CF đồng quy.

Bài 11: Cho lục giác đều $ABCDEF$. Trên cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA lấy các điểm A', B', C', D', E', F' sao cho $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$. Chứng minh rằng $A'B'C'D'E'F'$ là một lục giác đều.

Bài 12: Một lục giác đều và một ngũ giác đều chung cạnh AD (như hình vẽ). Tính các góc của tam giác ABC .

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1: Mỗi góc của ngũ giác đều bằng: $\frac{(5-2) \cdot 180^0}{5} = 108^0$

Mỗi góc của ngũ lục đều bằng: $\frac{(6-2) \cdot 180^0}{6} = 120^0$

Mỗi góc của bát giác đều bằng: $\frac{(8-2) \cdot 180^0}{8} = 135^0$

Bài 2: a) 26 v. (Tạo được 13 tam giác)

b) Đa giác có 11 cạnh (Số cạnh: $1620 : 180 + 2 = 11$)

Bài 3: Tìm cách giải. Bài này biết mối liên hệ giữa số đường chéo và số cạnh nên hiển nhiên chúng ta đặt số cạnh của đa giác là n biểu thị số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ từ đó ta tìm được số cạnh.

Trình bày lời giải

Đặt số cạnh của đa giác là n ($n \geq 3$) thì số đường chéo là $\frac{n(n-3)}{2}$ theo đề bài ta có:

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 7 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Leftrightarrow (n+2)(n-7) = 0$$

Vì $n \geq 3$ nên $n - 7 = 0 \Leftrightarrow n = 7$ Vậy số cạnh của đa giác là 7.

Bài 4: Gọi n là số cạnh của đa giác đều.

Ta có $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$ nên $\frac{n-2}{n} = \frac{135}{180} = \frac{3}{4}$.

Do đó $4(n-2) = 3n$. Vậy $n = 8$.

Bài 5: Tổng các góc trong và ngoài của đa giác tại một đỉnh bằng $2v$, tại n đỉnh bằng $2nv$

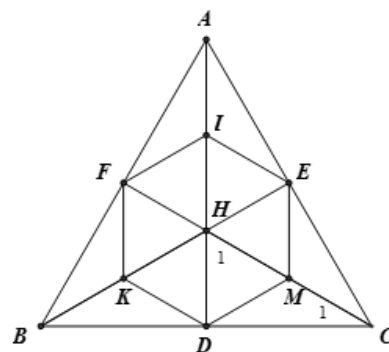
Ta đã biết tổng các góc trong của đa giác bằng $(n-2) \cdot 2v$.

Vậy tổng các góc ngoài của đa giác bằng: $2nv - (n-2) \cdot 2v = 4v$.

Bài 6: Xét ΔHDC vuông tại D , DM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $DM = HM$. Ta lại có $\widehat{C}_1 = 30^\circ$ nên $\widehat{H}_1 = 60^\circ$. Do đó ΔHDM là tam giác đều.

Tương tự các tam giác HME , HEI , HIF , HKD là các tam giác đều.

Lục giác $DKFIEM$ có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau (bằng 120°) nên là lục giác đều.



Bài 7: a) Từ mỗi đỉnh của hình n -giác lồi, kẻ được $n-1$ đoạn thẳng đến các đỉnh còn lại, trong đó có hai đoạn thẳng là cạnh của đa giác, $n-3$ đoạn thẳng là đường chéo.

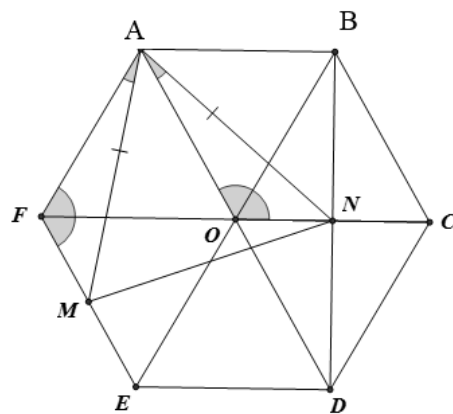
Đa giác có n đỉnh nên kẻ được $n(n-3)$ đường chéo, trong đó mỗi đường chéo tính 2 lần.

Vậy số đường chéo của hình n -giác lồi là $\frac{n(n-3)}{2}$.

b) Giải phương trình $\frac{n(n-3)}{2} = n$. Ta được $n = 5$

Bài 8: Gọi O là giao điểm của AD, BE, CF . Dễ dàng chứng minh N là trung điểm của $OC, \Delta AFM = \Delta AON$ (c.g.c).

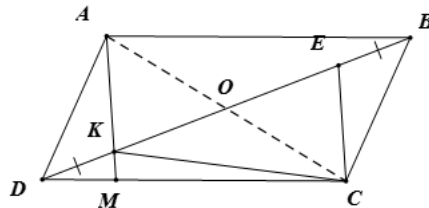
Từ đó $AM = AN$ và $\widehat{MAN} = 60^\circ$ nên ΔAMN là tam giác đều.



Bài 9: a) Tứ giác $AKCE$ có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

b) Hình bình hành $KACE$ là hình thoi. $\Leftrightarrow AC \perp KE$

\Leftrightarrow hình bình hành $ABCD$ là hình thoi



c) M là trung điểm của $CD \Leftrightarrow K$ là trọng tâm của $\Delta ADC \Leftrightarrow DK = \frac{1}{3}DB$.

Bài 10: HD: Chứng minh rằng $FBCE$ và $ACDF$ là hình bình hành.

Bài 11: HD: Chứng minh rằng các tam giác $AA'F, BB'A', CC'B', DD'C', EE'D', FF'E$ bằng nhau.

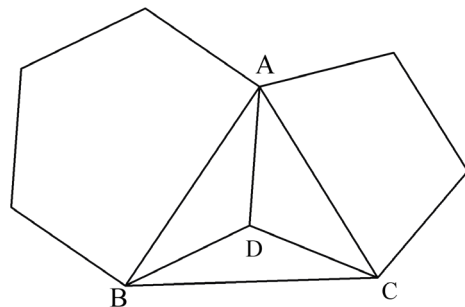
Bài 12:

Theo công thức tính góc của đa giác đều, ta có:

$$\widehat{ADB} = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = 30^\circ;$$

$$\widehat{ADC} = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = 36^\circ;$$

Suy ra $\widehat{BDC} = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ = 132^\circ$.



Ta có $\triangle BDC$ ($DB = DC$) cân tại D. Do đó $\widehat{DBC} = \widehat{DCB} = \frac{180^\circ - 132^\circ}{2} = 24^\circ$.

Suy ra $\widehat{BAC} = 30^\circ + 36^\circ = 66^\circ$; $\widehat{ABC} = 30^\circ + 24^\circ = 54^\circ$; $\widehat{BCA} = 24^\circ + 36^\circ = 60^\circ$

2+3. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT – DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.

Ta có: $S = a.b$ với a, b là độ dài hai cạnh của hình chữ nhật.

Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.

Ta có: $S = a^2$ với a là độ dài hai cạnh hình vuông.

Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh góc vuông.

Ta có: $S = \frac{1}{2}a.b$ với a, b là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông.

Diện tích tam giác thường bằng nửa diện tích một cạnh và chiều cao hạ xuống cạnh đó: Ta

có: $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$ với a, b, c là độ dài các cạnh tam giác và h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng hạ xuống cạnh đó.

II. BÀI TẬP

Bài 1: Một hình chữ nhật có các kích thước 6m và 2m. Một hình tam giác có các cạnh bằng 5m, 5m, 6m. Chứng minh rằng hai hình đó có chu vi bằng nhau và diện tích bằng nhau.

Bài 2: Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc, $AC = 16cm$, $BD = 10cm$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Tính diện tích tứ giác EFGH.

Bài 3: Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 12 cm$, $AD = 6,8 cm$. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE.

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

Bài 4: Cho hình chữ nhật ABCD có $CD = 4cm$, $BC = 3cm$. Gọi H là hình chiếu của C trên BD. Tính diện tích tam giác ADH.

Bài 5: Hai hình vuông có hiệu hai cạnh bằng 3m và hiệu diện tích bằng $69m^2$. Tính cạnh của mỗi hình vuông.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường phân giác BD. Biết $AD = 3cm$, $DC = 5cm$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 7: Trong hình chữ nhật có chu vi 100m, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích đó.

Bài 8: Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 26m, hiệu hai cạnh góc vuông bằng 14m.

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A, $BC = 15\text{cm}$, đường cao $AH = 10\text{cm}$. Tính đường cao ứng với cạnh bên.

Bài 10: Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD, $AB = 10\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$. Tính diện tích hình vuông có đường chéo là AD.

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = b$, đường cao AH. Ở phía ngoài tam giác vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCIK.

a) Tính diện tích tam giác DBC.

b) Chứng minh rằng $AK = DC$.

c) Đường thẳng AH cắt KI ở M. Tính diện tích các tứ giác $BHMK, CHMI, BCIK$.

Bài 12: Tam giác ABC có $AB = 10\text{cm}$, $AC = 17\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$.

a) Gọi AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC. Tính $HC^2 - HB^2$ và $HC - HB$.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 13: Cho điểm M nằm trong $\triangle ABC$. Các tia AM, BM, CM lần lượt cắt cạnh đối diện tại

D, E, F. Chứng minh $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1$

Tự luyện:

Bài 14: Một hình chữ nhật có diện tích 350 cm^2 và hai cạnh tỉ lệ với các số 2 và 7. Tính diện tích hình vuông có cùng chu vi với hình chữ nhật.

Bài 15: Tính diện tích một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 13 cm và tổng hai cạnh góc vuông bằng 17 cm.

Bài 16: Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh

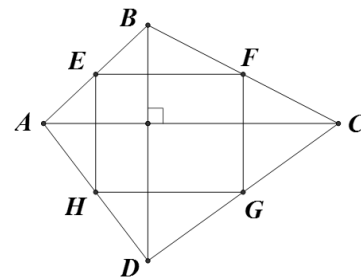
$$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1.$$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Chu vi hình chữ nhật và chu vi hình tam giác cùng bằng 16m. Diện tích hình chữ nhật và diện tích hình tam giác cùng bằng $12m^2$

Bài 2: $EFGH$ là hình chữ nhật, có $EF = 8cm, EH = 5cm$.

Diện tích hình chữ nhật $EFGH$ bằng $40cm^2$.



Bài 3: a) ABCD là hình chữ nhật nên $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6,8 = 40,8cm^2$.

E là trung điểm của CD, suy ra:

$$S_{BDE} = S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot S_{BCD} = 20,4cm^2.$$

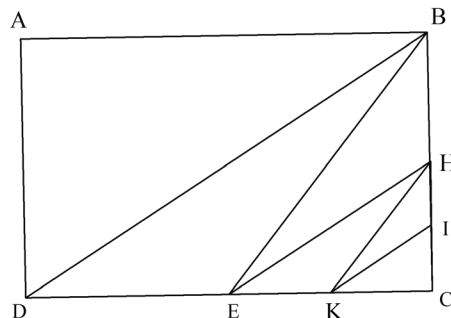
b) H là trung điểm BC

$$\Rightarrow S_{CHE} = \frac{1}{2} \cdot S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 20,4 = 10,2cm^2.$$

K là trung điểm CE $\Rightarrow S_{HKC} = \frac{1}{2} \cdot S_{CHE} = 5,1cm^2$.

I là trung điểm CH $\Rightarrow S_{CKI} = \frac{1}{2} \cdot S_{HKC} = 2,55cm^2$.

Vậy $S_{EHIK} = S_{CHE} - S_{CKI} = 10,2 - 2,55 = 7,65cm^2$.



Bài 4: Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông BCD , ta có $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$

nên $BC = 5cm$

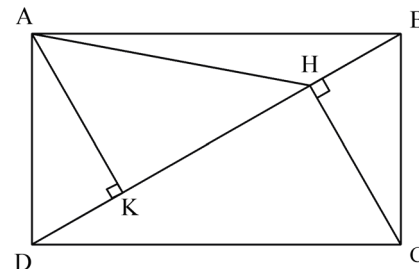
$$CH = \frac{2S_{BCD}}{BD} = \frac{BC \cdot CD}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4cm$$

Xét tam giác vuông CDH, ta có $DH^2 = CD^2 - CH^2 = 4^2 - 2,4^2 = 10,24 = 3,2^2$

nên $DH = 3,2cm$.

Kẻ $AK \perp BD$. Ta có $S_{ABD} = S_{CBD}$ nên $AK = CH = 2,4cm$. Vậy

$$S_{ADH} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 2,4 = 3,86 (cm^2).$$



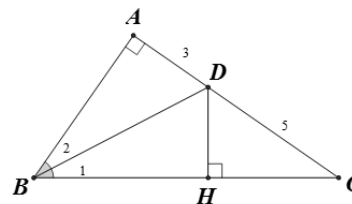
Bài 5: Gọi a và b là cạnh của hình vuông. Ta có $a - b = 3$ và $a^2 - b^2 = 69$, do đó

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{69}{3} = 23$$

Biết tổng $a + b = 23$, $a - b = 3$ ta tính được $a = 13; b = 10$.

Bài 6: Kẻ $DH \perp BC$. Ta có $\triangle HBD = \triangle ABD$ (cạnh huyền BD chung, góc nhọn $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$) nên $DH = AD = 3\text{cm}$ và $BH = AB$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle DHC$ vuông, ta có $HC^2 = DC^2 - DH^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$, nên $HC = 4\text{cm}$. Đặt $AB = BH = x$.



Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle ABC$ vuông, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên $(x + 4)^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow x = 6$.

Diện tích $\triangle ABC$ bằng $\frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} 6.8 = 24\text{cm}^2$.

Bài 7: Gọi một kích thước của hình chữ nhật là $x(\text{m})$, kích thước kia là $50 - x(\text{m})$

Diện tích hình chữ nhật bằng:

$$S = x(50 - x) = -x^2 + 50x = -(x - 25)^2 + 625 \leq 625.$$

Giá trị lớn nhất của S bằng 625 tại $x = 25$. Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật bằng 625 m^2 , khi đó hình chữ nhật là hình vuông có cạnh 25m.

Bài 8: Gọi a, b là các cạnh góc vuông. Ta có $a - b = 14$ và $a^2 + b^2 = 26^2 = 676$ (1)

Từ $a - b = 14$ suy ra $(a - b)^2 = 14^2$, tức là $a^2 + b^2 - 2ab = 196$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2ab = 676 - 196 = 480$.

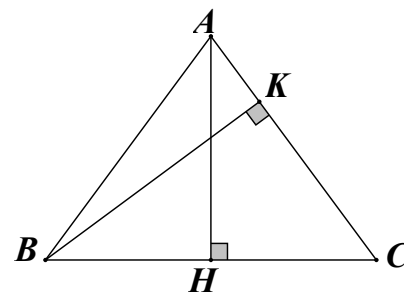
Diện tích tam giác vuông bằng $\frac{ab}{2} = \frac{480}{4} = 120\text{m}^2$.

Bài 9: Tam giác ABC cân tại A. Đường cao AH nên $BH = HC = BC : 2 = 15 : 2 = 7,5(\text{cm})$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AHC ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AH^2 + HC^2 = 10^2 + 7,5^2 \\ &= 156,25 = 12,5^2; \text{ suy ra } AC = 12,5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC.AH = \frac{1}{2} .15.10 = 75(\text{cm}^2).$$



Kẻ $BK \perp AC$, ta có $BK = 2S_{ABC} : AC = 2.75 : 12,5 = 12 (cm)$.

Bài 10: Kẻ $DH \perp AB, DK \perp AC$. Điểm D thuộc tia phân giác của góc A nên $DH = DK$.

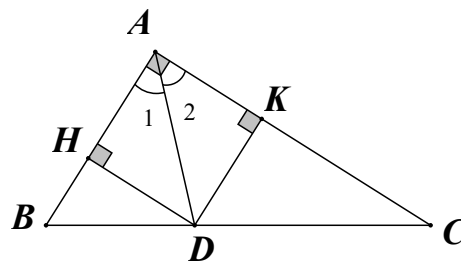
Đặt $DH = DK = x$, ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ADB} + S_{ADC} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot x + \frac{1}{2} AC \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x = 12,5x. \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $12,5x = 75$. Do đó $x = 75 : 12,5 = 6$.

$$S_{AHDK} = 6^2 = 36 (cm^2).$$



Bài 11:

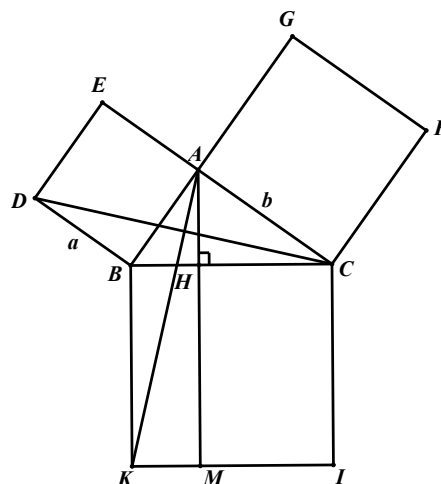
a) $S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ADBE} = \frac{a^2}{2}$

b) $\triangle ABK = \triangle DBC (c.g.c) \Rightarrow AK = DC$.

c) $S_{BHMK} = 2S_{ABK} = 2S_{DBC} = a^2$

Chứng minh tương tự, $S_{CHMI} = S_{ACFG} = b^2$.

Vậy $S_{BICK} = a^2 + b^2$



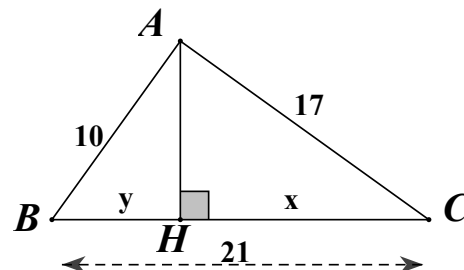
Lưu ý. Bài toán trên cho ta một cách chứng minh định lý Py-ta-go: Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Bài 12:

a) Đặt $HC = x, HB = y$. Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (AC^2 - AH^2) - (AB^2 - AH^2) \\ &= AC^2 - AB^2 = 17^2 - 10^2 = 189 \end{aligned}$$

Do đó: $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{189}{21} = 9$.



b) Biết tổng $(x + y)$ và hiệu $(x - y)$ ta tính được $y = 6 cm$, từ đó $AH = 8 cm$.

Đáp số: $S_{ABC} = 84 cm^2$.

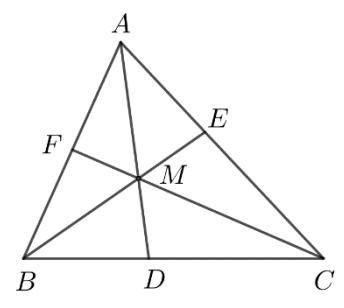
Bài 13: Ta có: $\frac{S_{BMD}}{S_{BAD}} = \frac{MD}{AD}$ (ΔBMD và ΔBAD có chung đường cao kẻ từ B)

Và $\frac{S_{CMD}}{S_{CAD}} = \frac{MD}{AD}$ (ΔCMD và ΔCAD có chung đường cao kẻ từ C)

Suy ra: $\frac{MD}{AD} = \frac{S_{BMD}}{S_{BAD}} = \frac{S_{CMD}}{S_{CAD}} = \frac{S_{BMD} + S_{CMD}}{S_{BAD} + S_{CAD}} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$

Chứng minh tương tự: $\frac{S_{MAC}}{S_{BAC}} = \frac{ME}{BE}$; $\frac{S_{MAB}}{S_{CAB}} = \frac{MF}{CF}$

Suy ra: $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = \frac{S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$ (đpcm)



4. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

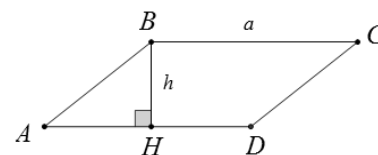
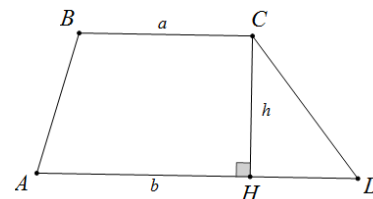
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h.$$

- Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:

$$S = a.h.$$



II. BÀI TẬP

Bài 1:

Hình thang cân ABCD ($AB // CD$) có $AB = 12\text{cm}$, $CD = 28\text{cm}$, $AD = BC = 17\text{cm}$. Tính diện tích hình thang.

Bài 2: Tính diện tích hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$), biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$, $BC = 25\text{cm}$.

Bài 3: Tính diện tích hình thang ABCD ($AB // CD$), biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 13\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $\hat{C} = 30^\circ$.

Bài 4: Tính diện tích hình bình hành ABCD, biết $\hat{A} = 135^\circ$, $AD = \sqrt{2}\text{dm}$, $CD = 3\text{dm}$.

Bài 5: Tính diện tích hình bình hành ABCD, biết $AD = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $CD = 10\text{cm}$.

Bài 6: Hình bình hành ABCD có $AB = 54\text{cm}$, $AD = 36\text{cm}$, một chiều cao bằng 30cm. Tính chiều cao còn lại.

Bài 7: Tính diện tích hình thang ABCD ($AB // CD$), biết $AB = 4\text{cm}$, $CD = 14\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$

Bài 8: Tính các góc của một hình bình hành có diện tích bằng 27cm^2 . Hai cạnh kề bằng 6 cm và 9 cm.

Bài 9: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$), E là trung điểm của AD. Gọi H là hình chiếu của E trên đường thẳng BC. Qua E vẽ đường thẳng song song với BC, cắt các đường thẳng AB và CD theo thứ tự ở I và K.

a) Chứng minh rằng $\triangle AEI = \triangle DEK$

b) Cho biết $BC = 8\text{cm}$, $EH = 5\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác $IBCK$; $ABCD$

Bài 10: Cho hình thang ABCD có hai đáy $AB = 5\text{cm}$, $CD = 15\text{cm}$ và hai đường chéo là $AC = 16\text{cm}$, $BD = 12\text{cm}$. Tính diện tích hình thang ABCD.

Bài 11: Hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc, $AB = 40$ cm, $CD = 60$ cm. Tính diện tích hình thang.

Bài 12: Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích 40 cm^2 . Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA .

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì?

b) Tính diện tích tứ giác $EFGH$.

Bài 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, G, H thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Các đoạn thẳng AG, CE, BH, DF cắt nhau tạo thành một tứ giác.

a) Tứ giác đó là hình gì?

b) Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó bằng $\frac{1}{5}$ diện tích hình bình hành $ABCD$.

Tự luyện

Bài 14: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), E là trung điểm của AD . Đường thẳng qua E và song song với BC cắt AB và CD ở I và K . Chứng minh $S_{ABCD} = S_{BIKC}$.

Bài 15: Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của AD , qua M kẻ đường thẳng d cắt AB, CD lần lượt tại E và F . Kẻ $MH \perp BC$ tại H . Chứng minh $S_{EBCF} = MH \cdot BC$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Kẻ AH, BK vuông góc với CD .

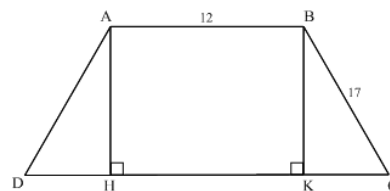
Ta có: $DH = CK = \frac{CD - AB}{2} = \frac{28 - 12}{2} = 8 \text{ (cm)}$

Áp dụng định lý Py – ta – go vào tam giác vuông BKC có:

$$BK^2 = BC^2 - CK^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2 \text{ nên } BK = 15 \text{ cm}$$

Diện tích hình thang $ABCD$ bằng:

$$\frac{1}{2} (AB + CD) \cdot BK = \frac{1}{2} (12 + 28) \cdot 15 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Bài 2: Chiều cao hình thang bằng 24 cm .

Đáp số: 204 cm^2 .

Bài 3: Chiều cao hình thang bằng 4 cm .

Đáp số: 36 cm^2 .

Bài 4: Chiều cao $AH = 1 \text{ dm}$.

Đáp số: 3 dm^2 .

Bài 5: Chứng minh rằng $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Đáp số: $48cm^2$.

Bài 6: Nếu chiều cao 30cm ứng với cạnh 54cm thì diện tích hình bình hành bằng $30.54 = 1620(cm^2)$, chiều cao còn lại bằng $1620 : 36 = 45(cm)$.

Nếu chiều cao 30cm ứng với cạnh 36cm thì chiều cao còn lại bằng $30.36 : 54 = 20(cm)$

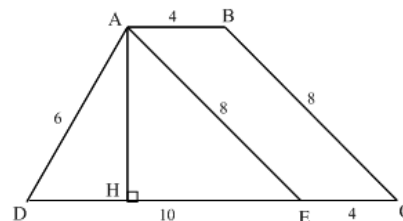
Bài 7: Kẻ $AE // BC$. Tứ giác ABCE là hình bình hành nên $AE = BC = 8cm$, $EC = AB = 4cm$,
 $DE = DC - EC = 14 - 4 = 10(cm)$

Tam giác ADE có $AD^2 + AE^2 = DE^2$ (vì $6^2 + 8^2 = 10^2$)
 nên $\widehat{DAE} = 90^\circ$.

Kẻ $AH \perp CD$, ta có $AH.DE = AD.AE$ (bằng $2.S_{ADE}$)

nên $AH = \frac{6.8}{10} = 4,8(cm)$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AH = \frac{1}{2}(4 + 14).4,8 = 43,2(cm^2)$

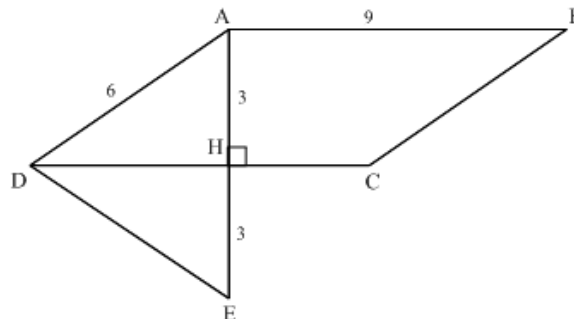


Bài 8: Giả sử hình bình hành ABCD có $AD = 6cm$, $AB = 9cm$ diện tích $27cm^2$ (\widehat{A} là góc tù).
 Kẻ $AH \perp CD$.

$$AH = \frac{S}{AB} = \frac{27}{9} = 3(cm).$$

Tam giác vuông AHD có $AD = 2AH$ nên $\widehat{ADH} = 30^\circ$ (Chứng minh: Lấy E đối xứng với A qua H, để chứng minh $\triangle ADE$ đều).

Do đó $\widehat{ADH} = \widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{DAB} = \widehat{C} = 150^\circ$.

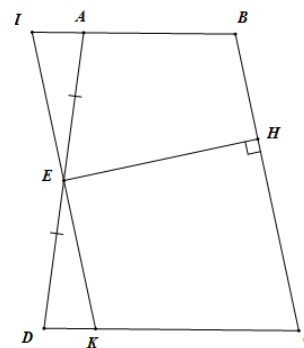


Bài 9: a) $\triangle AEI = \triangle DEK$ (c.g.c)

b) IBCK là hình bình hành, $S_{IBCK} = BC.EH = 8.5 = 40(cm^2)$

Ta có $\triangle AEI = \triangle DEK \Rightarrow S_{AEI} = S_{DEK} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{IBCK}$.

Vậy $S_{ABCD} = 40cm^2$



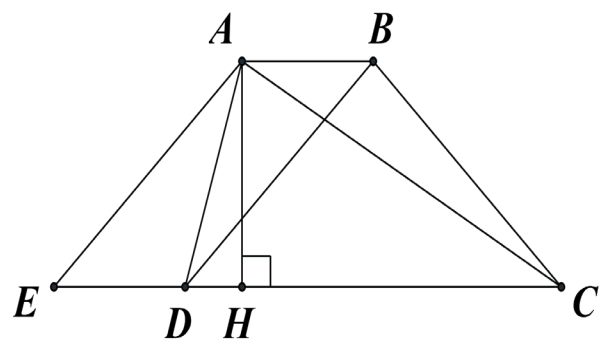
Bài 10: Qua A kẻ $AE \parallel BD$ ($E \in CD$).

$\Rightarrow AE = BD = 12\text{ cm}, DE = AB = 5\text{ cm}.$

$\Rightarrow \Delta AEC$ vuông tại A (Định lý Pytago đảo).

$\Rightarrow AH = \frac{AE.AC}{EC} = \frac{12.16}{20} = 9,6\text{ cm}.$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 96\text{ cm}^2.$

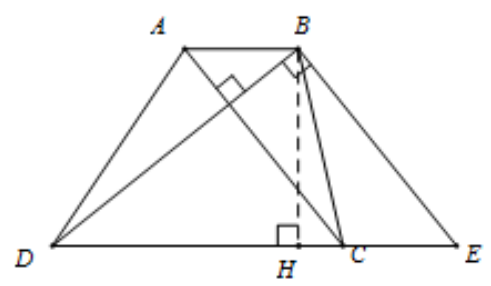


Bài 11: Kẻ $BE \parallel AC$ ($E \in DC$)

Ta có: $CE = AB = 40\text{ cm} \Rightarrow DE = 100\text{ cm}$

Ta lại có: $BE = AC = BD \Rightarrow \Delta BDE$ cân ở B.

Kẻ $BH \perp DE$ thì BH cũng là trung tuyến.



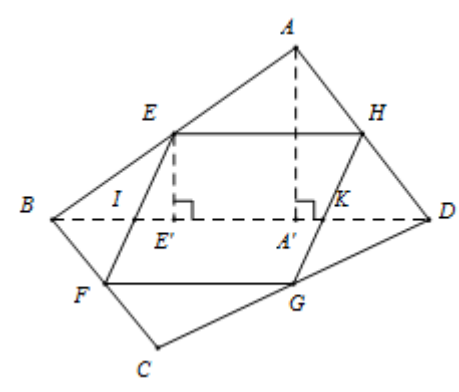
Do $AC \perp BD, AC \parallel BE$ nên $BD \perp BE \Rightarrow \Delta BDE$ vuông ở E $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}DE = 50\text{ cm}$

$S_{ABCD} = (40 + 60).50 : 2 = 2500\text{ (cm}^2\text{)}.$

Bài 12:

- a) $EFGH$ là hình bình hành.
- b) Gọi I, K là các giao điểm của EF, GH và BD .

Kẻ EE', AA' vuông góc với BD



Xét hình bình hành $EHKI$, ta có $EH = \frac{1}{2}BD, EE' = \frac{1}{2}AA'$

$\Rightarrow S_{EHKI} = EH.EE' = \frac{1}{4}BD.AA' = \frac{1}{2}S_{ABD}$

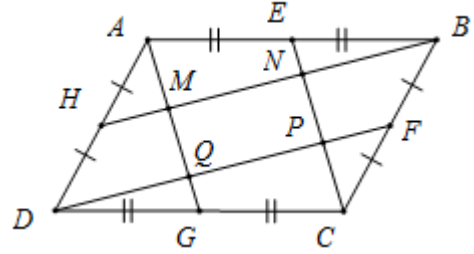
Xét hình bình hành $FGKI$ và chứng minh tương tự: $S_{FGKI} = \frac{1}{2}S_{BCD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EFGH} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 20\text{ cm}^2$.

Bài 13: a) Gọi tứ giác tạo thành là MNPQ như trên hình 207.

Dễ dàng chứng minh $AG // CE$,

$BH // DF$ nên MNPQ là hình bình hành.



b) ΔADQ có $AH = HD$,

$HM // DQ \Rightarrow AM = MQ$. Tương tự: $NP = PC$, mà

$MQ = NP$ nên $AM = MQ = PC$.

Ta lại có $QG = \frac{1}{2}PC$ nên $QG = \frac{1}{2}MQ$. Vậy $MQ = \frac{2}{5}AG$.

Suy ra $S_{MNPQ} = \frac{2}{5}S_{AECG}$, mà $S_{AECG} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Do đó $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

5. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

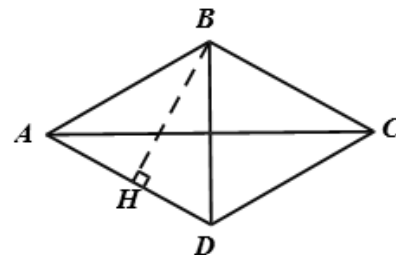
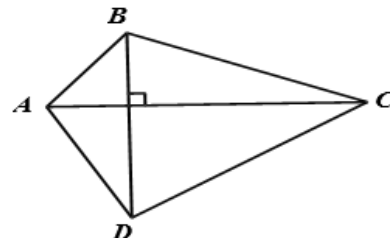
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc bằng nửa tích hai đường chéo.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

• Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo hoặc bằng tích của một cạnh với chiều cao.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AD \cdot BH$$



III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 5 \text{ cm}$, $CD = 12 \text{ cm}$, $BD = 8 \text{ cm}$, $AC = 15 \text{ cm}$.

a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC và cắt CD ở E . Tính \widehat{DBE} .

b) Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 2: Một hình chữ nhật có hai cạnh kề dài 8m và 5m. Tính diện tích tứ giác có đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật.

Bài 3: Tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Biết $EG = 5 \text{ cm}$, $HF = 4 \text{ cm}$. Tính diện tích tứ giác $EFGH$.

Bài 4: Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng a , góc tù của hình thoi bằng 150° .

Bài 5: Tính diện tích hình thoi có chu vi bằng 52 cm, một đường chéo bằng 24 cm.

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Qua I kẻ IM vuông góc với AB tại M và IN vuông góc với AC tại N . Lấy D đối xứng I qua N .

a) Tứ giác $ADCI$ là hình gì?

b) Đường thẳng BN cắt DC tại K . Chứng minh $\frac{DK}{DC} = \frac{1}{3}$.

c) Cho $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 20 \text{ cm}$. Tính diện tích hình $ADCI$.

Bài 7: Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có $AB = 3 \text{ cm}$, $CD = 14 \text{ cm}$, $AC = 15 \text{ cm}$, $BD = 8 \text{ cm}$.

a) Chứng minh rằng AC vuông góc với BD .

b) Tính diện tích hình thang.

Bài 8: Tính diện tích hình thoi có cạnh bằng 4 cm, tổng hai đường chéo bằng 10 cm

Bài 9: Tính cạnh của hình thoi có diện tích bằng 24 cm^2 , tổng hai đường chéo bằng 14 cm.

Tự luyện:

Bài 10: Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có AC vuông góc với BD tại O .

a) Chứng minh các tam giác OCD, OAB vuông cân.

b) Biết $AB = 2 \text{ cm}, CD = 8 \text{ cm}, AD = 5 \text{ cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 11: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 10 \text{ cm}, BD = 6 \text{ cm}$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA .

a) Tứ giác $EFGH$ là hình gì? Vì sao?

b) Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

c) Tính diện tích tứ giác $EFGH$.

Bài 12: So sánh diện tích của một hình thoi và một hình vuông có cùng chu vi.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

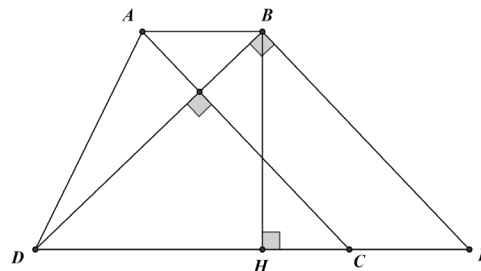
Bài 1:

a) $DE = 17 \text{ cm}; BE = 15 \text{ cm}; BD = 8 \text{ cm}$

$$DE^2 = BE^2 + DB^2 = 17^2 = 15^2 + 8^2 = 289$$

$\Rightarrow \triangle DBE$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{DBE} = 90^\circ$.

b) Theo câu a, có $BD \perp AC \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 60 \text{ cm}^2$.



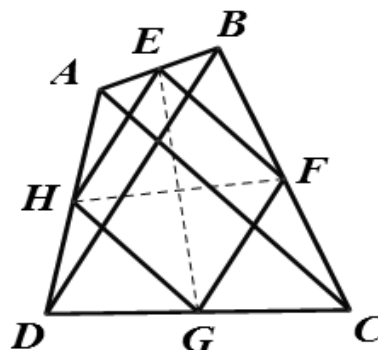
Bài 2: *Đáp số:* (Tứ giác đó là hình thoi, diện tích bằng 20 m^2 .)

Bài 3: EF là đường trung bình của tam giác ABC nên

$$EF = \frac{1}{2} AC$$

Tương tự: $GH = \frac{1}{2} AC; EH = FG = \frac{1}{2} BD$

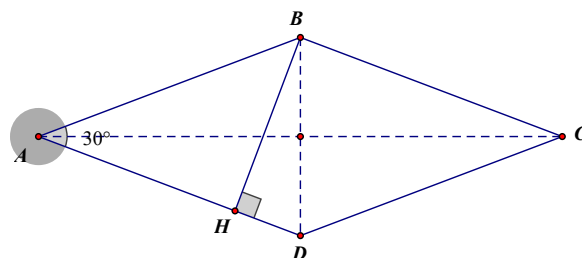
Do $AC = BD$ nên $EF = FG = GH = EH$ suy ra $EFGH$ là hình thoi



$$S_{EFGH} = \frac{1}{2} EG.FH = \frac{1}{2} 5.4 = 10(\text{cm}^2)$$

Bài 4: Kẻ $BH \perp AD$. Ta tính được $\hat{A} = 30^\circ$, $BH = \frac{a}{2}$

$$S_{ABCD} = AD.BH = a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$



Bài 5: Đáp số: 120cm^2

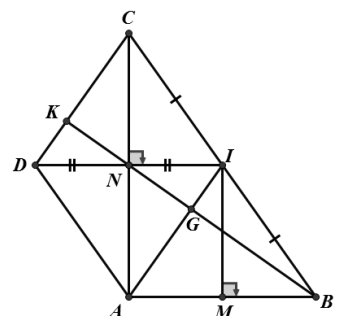
Bài 6:

a) Chứng minh được ADCI là hình thoi.

b) Gọi $AI \cap BN = G \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC .

Ta chứng minh được $DK = GI$, lại có

$$DC = AI \Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3}.$$



c) $S_{ADCI} = 2S_{ACI} = S_{ABC} = 96\text{cm}^2$.

Bài 7: a) Kẻ $BE \parallel AC$. Tứ giác ABEC là hình bình hành nên $BE = AC = 15\text{cm}$, $CE = AB = 3\text{cm}$ suy ra $DE = DC + CE = 14 + 3 = 17(\text{cm})$

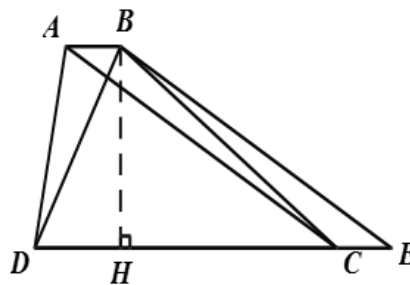
Tam giác BDE vuông vì có:

$$BD^2 + BE^2 = DE^2 \quad (\text{Vì } 8^2 + 15^2 = 17^2)$$

Nên $BD \perp BE$. Ta lại có $BE \parallel AC$ nên

b) Hình thang ABCD có hai đường chéo vuông góc nên

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2}.15.8 = 60(\text{cm}^2).$$



Bài 8: Gọi độ dài hai đường chéo là $2x$ và $2y$, ta có $2x + 2y = 10$ và $x^2 + y^2 = 4^2$.

$$\text{Suy ra } 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 5^2 - 16 = 9$$

$$\text{Diện tích hình thoi bằng } \frac{1}{2}.2x.2y = 2xy = 9(\text{cm}^2)$$

Bài 9:

Gọi độ dài hai đường chéo là $2x$ và $2y$, ta có $2x2y = 48 \Leftrightarrow xy = 12$ và $2x + 2y = 14 \Rightarrow x + y = 7 \Rightarrow (x + y)^2 = 49 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 49 - 24 = 25$

Từ đó suy ra Cạnh hình thoi bằng 5.

6. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để diện tích đa giác, ta thường chia đa giác đó thành các tam giác, các tứ giác tính được diện tích rồi tính tổng các diện tích đó; hoặc tạo ra một đa giác nào đó chứa đa giác ấy rồi tính hiệu các diện tích.

II. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm E , trên tia đối của tia CD lấy điểm K sao cho $CK = AE$. Chứng minh rằng diện tích tứ giác $BEDK$ bằng diện tích hình vuông?

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có $CD = 4 \text{ cm}$, đường cao vẽ từ A đến cạnh CD bằng 3 cm .

- Tính diện tích hình bình hành $ABCD$;
- Gọi M là trung điểm của AB . Tính diện tích tam giác ADM ;
- DM cắt AC tại N . Chứng minh $DN = 2NM$;
- Tính diện tích tam giác AMN .

Bài 3: Tam giác ABC có diện tích $30m^2$. Điểm D trên cạnh AC sao cho $AD = \frac{1}{3}AC$. Gọi E là trung điểm của AB . Tính diện tích tứ giác $BEDC$?

Bài 4: Cho tứ giác $ABCD$ có diện tích 60 cm^2 . Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho $AE = EF = FB$. Trên cạnh CD lấy các điểm G, H sao cho $CG = GH = HD$.

- Tính tổng diện tích các tam giác ADH và CBF .
- Tính diện tích tứ giác $EFGH$.

Bài 5: Tam giác ABC có diện tích $30m^2$. Điểm D trên cạnh AC sao cho $AD = \frac{1}{3}AC$, E là trung điểm của AB . Gọi K là giao điểm của BD và CE . Tính diện tích tứ giác $ADKE$.

Bài 6: Cho hình thang vuông có đáy nhỏ và chiều cao bằng a , đáy lớn bằng $2a$. Hãy chia hình thang vuông đó thành bốn hình như nhau.

Tự luyện

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A , có diện tích S . Gọi O là trung điểm của đường cao AH . Gọi D là giao điểm của BO với cạnh AC và E là giao điểm của CO với cạnh AB . Tính diện tích tứ giác $ADOE$ theo S .

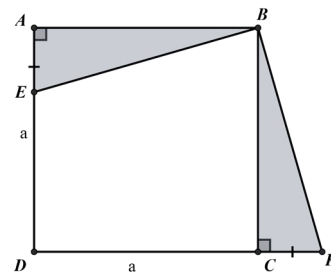
Bài 8: Cho tam giác ABC có diện tích 30 cm^2 . Các điểm D, E theo thứ tự lấy trên các cạnh AC, AB sao cho $AD = DC; AE = \frac{1}{2}EB$. Gọi K là giao điểm của BD và CE . Tính diện tích tứ giác $ADKE$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Vì $\triangle BCK = \triangle BAE$ (c.g.c) nên $S_{BCK} = S_{BAE}$

Suy ra $S_{BCK} + S_{BCDE} = S_{BAE} + S_{BCDE}$

Hay $S_{BEDK} = S_{ABCD}$

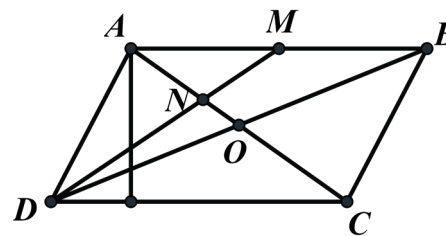


Bài 2:

a) $S_{ABCD} = 3.4 = 12 \text{ cm}^2$

b) $AM = 2 \text{ cm}$. $S_{ADM} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3 (\text{cm}^2)$.

c) Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.



Chứng minh N là trọng tâm của $\triangle ADB$: $DN = \frac{2}{3}DM \Rightarrow DN = 2MN$ hay $NM = \frac{1}{3}MD$.

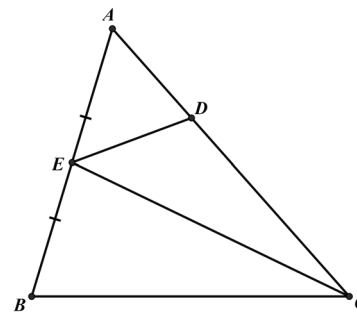
d) $S_{ANM} = \frac{1}{3}S_{ADM} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ cm}^2$.

Bài 3:

Vì $AE = EB$ nên $S_{CAE} = S_{CBE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 (\text{m}^2)$

Mặt khác $DC = \frac{2}{3}AC$ nên $S_{CDE} = \frac{2}{3}S_{CAE} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 (\text{m}^2)$

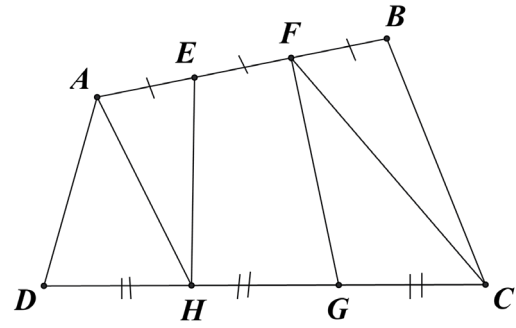
$S_{BEDC} = S_{CEB} + S_{CDE} = 15 + 10 = 25 (\text{m}^2)$



Bài 4:

a) $S_{ADH} + S_{CBF} = \frac{1}{3}S_{ACD} + \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABCD} = 20 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } S_{EFGH} &= S_{AFCH} - (S_{AEH} + S_{CGF}) \\
 &= S_{AFCH} - \left(\frac{1}{2}S_{AHF} + \frac{1}{2}S_{CFH} \right) \\
 &= S_{AFCH} - \frac{1}{2}S_{AFCH} = \frac{1}{2}S_{AFCH} \\
 &= \frac{1}{2} \left(S_{ABCD} - \frac{1}{3}S_{ABCD} \right) \\
 &= \frac{1}{3}S_{ABCD} = 20 \text{ (cm}^2\text{)}
 \end{aligned}$$



Bài 5: Vì $AE = EB$ nên $S_{CAE} = S_{CBE} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15 \text{ (m}^2\text{)}$

Vì $AD = \frac{1}{3}AC$ nên $S_{BAD} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ (m}^2\text{)}$

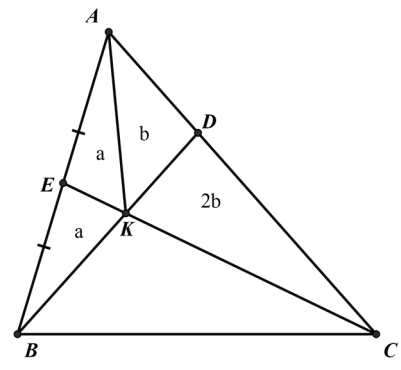
Đặt $S_{AEK} = a, S_{ADK} = b$. Ta có:

$$2a + b = S_{ABD} = 10 \text{ nên } 2a = 10 - b ;$$

$$a + 3b = S_{ACE} = 15 \text{ nên } 2a = 30 - 6b$$

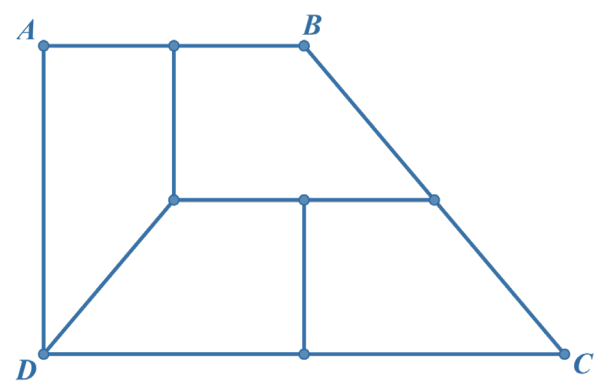
Từ $10 - b = 30 - 6b$ suy ra $5b = 20$, vậy $b = 4$ do đó $a = 3$

$$S_{ADKE} = a + b = 3 + 4 = 7 \text{ (m}^2\text{)}$$



Bài 6:

Tham khảo hình vẽ:



7. ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chữ nhật ABCD có AB=4 cm, CD = 9cm. Trên các cạnh AB, AD, lần lượt lấy M,N, sao cho $AM = AN = x$.

a) Tính diện tích hình MBCDN theo x.

b) Tìm x biết $S_{MBCDN} = 34cm^2$.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB=4cm, AC=5cm. Các điểm D,E lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho BD= AE= x. Tìm x để diện tích tứ giác BDEC nhỏ nhất.

Bài 3: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^0$, các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H. Chứng minh rằng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$

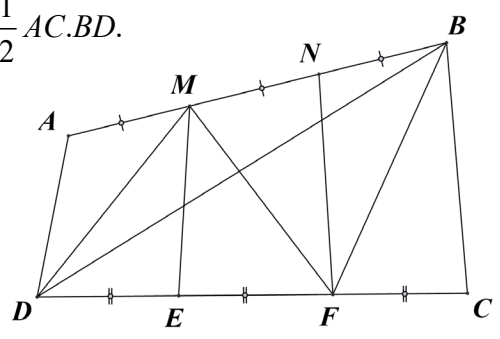
Bài 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{ABC} \leq \frac{1}{2} AB.AC$

Bài 5: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2} AC.BD$.

Bài 6: Cho hình bên, biết $S_{ABCD} = S$.

a) Chứng minh rằng $S_{ADM} + S_{BCF} = \frac{1}{3} S$.

b) Tính S_{MNFE} theo S.



Bài 7: Gọi K và M là trung điểm của các cạnh AB, CD của tứ giác lồi ABCD, L và N nằm trên hai cạnh kia của tứ giác sao cho KLMN là hình chữ nhật. Chứng minh rằng diện tích của hình chữ nhật KLMN bằng một nửa diện tích tứ giác ABCD.

Bài 8: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$). Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, CD cắt các cạnh AD, BC lần lượt tại E,F. Chứng minh rằng :

a) $S_{OAD} = S_{OBC}$

b) $OE = OF$.

Tự luyện

Bài 9: Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy một điểm E sao cho $BE = 3EA$. Trên cạnh BC lấy một điểm F sao cho $BF = 4FC$. Gọi D là giao điểm của AF và CE .

a) Chứng minh $S_{ACF} = S_{AEF}$.

b) Từ E và C kẻ EH, CK vuông góc với AF . Chứng minh $EH = CK$.

c) Chứng minh $CD = DE$.

d) Chứng minh $S_{ABC} = 2S_{ABD}$.

Bài 10: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi M là giao điểm của BG và AC . Chứng minh:

a) $S_{GBC} = \frac{2}{3}S_{MBC}$.

b) $S_{GBC} = S_{GAC} = S_{GAB}$.

Bài 11: Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AM . Các đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G . Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của BG, CG .

a) Tứ giác $EHKD$ là hình gì? Vì sao?

b) Cho $S_{ABC} = 36 \text{ cm}^2$. Tính S_{EHKD} .

Bài 12: Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm H di chuyển trên BC . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC .

a) Chứng minh A, E, F thẳng hàng.

b) Chứng minh $BEFC$ là hình thang. Có thể tìm vị trí của H để $BEFC$ là hình bình hành, hình chữ nhật không?

c) Xác định vị trí của H để tam giác EHF có diện tích lớn nhất.

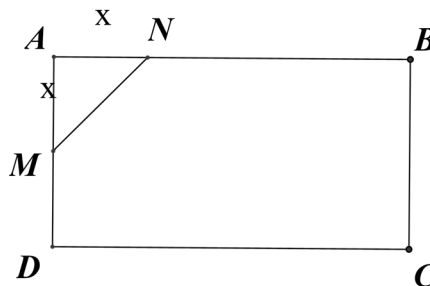
KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $S_{AMN} = \frac{1}{2}x^2, S_{ABCD} = 36$

$S_{MBCDN} = S_{ABCD} - S_{AMN} = 36 - \frac{1}{2}x^2$

b) $36 - \frac{1}{2}x^2 = 34 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2. (h.109)$

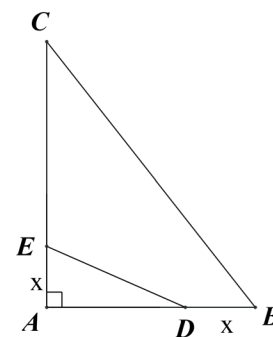


Bài 2:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 10; S_{AED} = \frac{1}{2}x(4-x)$

$S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} = 10 - \frac{1}{2}x(4-x)$

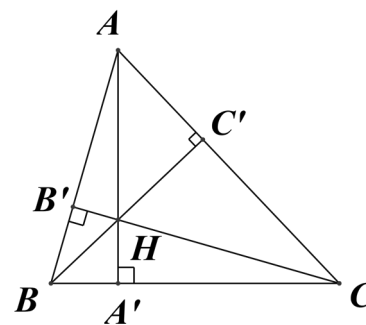
$= 10 - 2x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 8 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 \geq 8.$



Bài 3:

Ta có $\frac{HA'}{AA'} - \frac{HB'}{BB'} - \frac{HC'}{CC'} = \frac{HA'.BC}{2} - \frac{HB'.AC}{2} - \frac{HC'.AB}{2}$

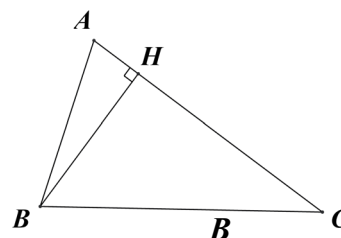
$= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} - \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$



Bài 4:

Vẽ $BH \perp AC$ tại H. Ta có $BH \leq AB$

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \leq \frac{1}{2}AB.AC$ (h.112) Hình 112.

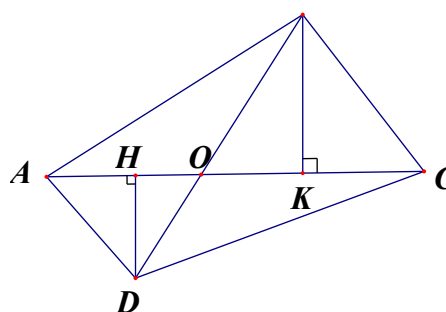


Bài 5: Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vẽ $BK \perp AC$ tại K, $DH \perp AC$ tại H.

Ta có $BK \leq OB, DH \leq OD$.

Do đó



$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{ABC} + S_{ACD} \\
 &= \frac{1}{2}BK.AC + \frac{1}{2}DH.AC \\
 &= \frac{1}{2}OB.AC + \frac{1}{2}OD.AC = \frac{1}{2}AC(OB + OD) = \frac{1}{2}AC.BD.
 \end{aligned}$$

Bài 6: a) Nối B với D, ta có $S_{ADM} = \frac{1}{3}S_{ABD}$; $S_{BCF} = \frac{1}{3}S_{BDC}$.

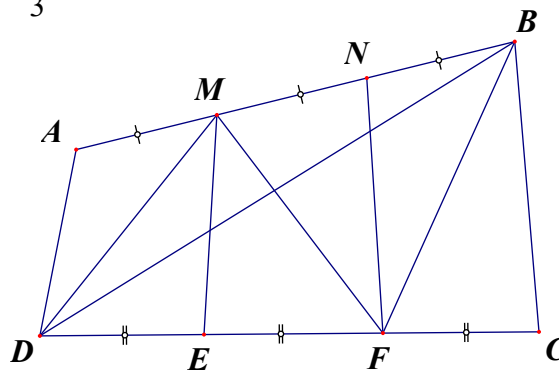
Do đó $S_{ADM} + S_{BCF} = \frac{1}{3}(S_{ABD} + S_{BDC}) = \frac{1}{3}S$

b) Nối M với F.

$$S_{MBFD} = \frac{2}{3}S; S_{MEF} = \frac{1}{2}S_{MDF}; S_{MNF} = \frac{1}{2}S_{MBF}$$

Do đó $S_{MNFE} = S_{MEF} + S_{MNF}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(S_{MDF} + S_{MBF}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S.
 \end{aligned}$$



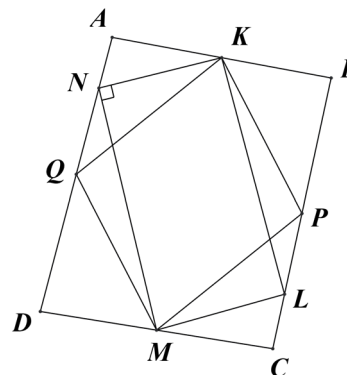
Bài 7: Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, AD

Chứng minh được :

$$S_{AQK} = \frac{1}{4}S_{ABD}; S_{MPC} = \frac{1}{4}S_{BCD}$$

$$S_{DQM} = \frac{1}{4}S_{DAC}; S_{DKP} = \frac{1}{4}S_{ABC}$$

Suy ra: $S_{QKPM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$



Ta có QKPM là hình bình hành, KLMN là hình chữ nhật nên nếu O là trung điểm của NL, PQ. Suy ra $AD // BC // MK$.

$$\Rightarrow S_{QMK} = S_{NMK}; S_{PMK} = S_{LMK} \Rightarrow S_{KLMN} = S_{QKPM}$$

Do đó $S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Bài 8:

$S_{ADC} = S_{BDC}$ (hai tam giác có chung đáy DC, đường cao tương ứng bằng nhau)

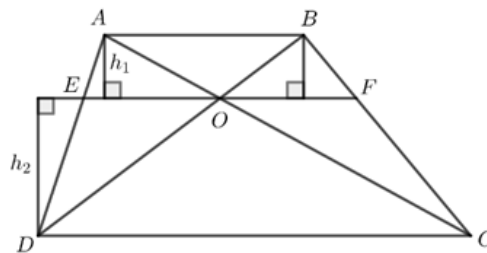
$$\Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC} \Rightarrow S_{OAD} = S_{OBC}$$

Ta có: $S_{OAE} + S_{ODE} = S_{OBF} + S_{OCF}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}h_1OE + \frac{1}{2}h_2OE = \frac{1}{2}h_1OF + \frac{1}{2}h_2OF$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OE(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}OF(h_1 + h_2)$$

$$\Rightarrow OE = OF.$$



1. ĐỊNH LÝ TALET TRONG TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đoạn thẳng tỉ lệ

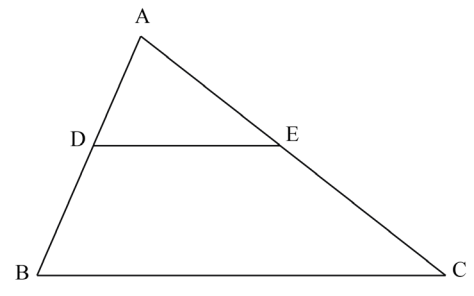
Hai đoạn thẳng AB và CD gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng A'B' và C'D' nếu $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

(hoặc $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$).

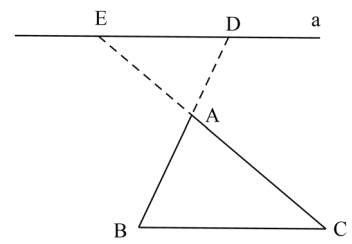
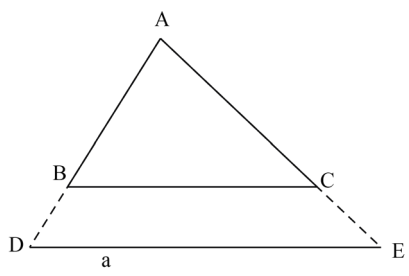
2. Định lý Ta – lét

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì đường thẳng định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

GT	$\Delta ABC : DE // BC$ $(D \in AB, E \in AC)$
KL	$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$



Chú ý: Định lý Ta – lét vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.



III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC, các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G.

- a) Tính $\frac{AE}{AC}$
- b) Tính $\frac{AG}{GD}$

b) Kể hai cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.

Bài 2: Cho đoạn thẳng AM , M là một điểm trên đoạn AB . Tính các tỉ số $\frac{AM}{AB}$ và $\frac{MB}{AB}$ nếu:

a) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4}$

c) $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$

Bài 3: Cho góc xOy . Trên tia Ox , lấy theo thứ tự 2 điểm A, B sao cho $OA = 2\text{cm}, AB = 3\text{cm}$. Trên tia Oy , lấy điểm C với $OC = 3\text{cm}$. Từ B , kẻ đường thẳng song song với AC cắt Oy tại D . Tính độ dài CD .

Bài 4: Cho tam giác ACE có $AC = 11\text{cm}$. Lấy điểm B trên cạnh AC sao cho $BC = 6\text{cm}$. Lấy điểm D trên cạnh AE sao cho $DB \parallel EC$. Giả sử $AE + ED = 25,5\text{cm}$. Hãy tính:

a) Tỉ số $\frac{DE}{AE}$;

b) Độ dài các đoạn thẳng AE, DE và AD .

Bài 5: Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC sao cho $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$, điểm E trên đoạn AD sao cho $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi K là giao điểm của BE và AC . Tính tỉ số $\frac{AK}{KC}$.

Bài 6: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và điểm E thuộc đoạn thẳng MC . Qua E kẻ đường thẳng song song với AC , cắt AB ở D và cắt AM ở K . Qua E kẻ đường thẳng song song với AB , cắt AC ở F . Chứng minh $CF = DK$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$. Từ D trên cạnh AB , kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại E . Trên tia đối của tia CA , lấy điểm F sao cho $CF = DB$. Gọi M là giao điểm của DF và BC . Chứng minh $\frac{DM}{MF} = \frac{AC}{AB}$

Bài 8: Cho tam giác ABC có đường cao AH . Trên AH , lấy các điểm K, I sao cho $AK = KI = IH$. Qua I, K lần lượt vẽ các đường thẳng $EF \parallel BC, MN \parallel BC$ ($E, M \in AB, F, N \in AC$).

a) Tính $\frac{MN}{BC}$ và $\frac{EF}{BC}$.

b) Cho biết diện tích của tam giác ABC là 90 cm^2 . Tính diện tích tứ giác $MNFE$.

Tự luyện:

Bài 1: Cho 5 điểm A, B, C, D, E theo thứ tự trên một đường thẳng. Biết $AB = 6\text{cm}, BC = 9\text{cm}, CD = 4\text{cm}$ và $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE}$. Tính AE .

Bài 2: Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự trên một đường thẳng và $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD} = \frac{2}{3}$.

a) Nếu BD = 10cm, tính CB; DA.

b) Chứng minh rằng $AC = \frac{3AB + 2AD}{5}$

c) Gọi O là trung điểm của BD. Chứng minh rằng $OB^2 = OA \cdot OC$

Bài 3: Cho ΔABC có $AB = 7,5\text{cm}$. Trên AB lấy điểm D với $\frac{DB}{DA} = \frac{1}{2}$

a) Tính DA, DB.

b) Gọi DH, BK lần lượt là khoảng cách từ D, B đến cạnh AC. Tính $\frac{DH}{BK}$.

c) Cho biết $AK = 4,5\text{cm}$. Tính HK.

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là một điểm bất kỳ trên cạnh AB. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC ở F và kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD ở H. Đường thẳng kẻ qua F song song với BD cắt CD ở G. Chứng minh $AH \cdot CD = AD \cdot CG$.

HD: $\frac{AH}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$

Bài 5: Cho ΔABC có AD là đường trung tuyến, G là trọng tâm. Qua G kẻ đường thẳng d cắt AB, AC thứ tự tại M, N. Chứng minh:

a) $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3;$

b) $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1.;$

Bài 6: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD. Qua điểm M là trung điểm của BC kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và AC lần lượt tại E và K. Chứng minh:

a) $AE = AK$.

b) $BE = CK$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) Có E là trung điểm của AC (vì BE là trung tuyến)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \text{ (tính chất trung điểm của đoạn thẳng)}$$

b) ΔABC có các trung tuyến AD, BE, CF cắt nhau tại G

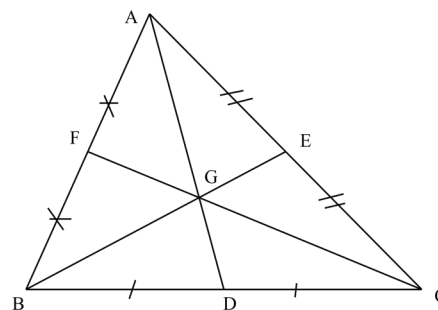
\Rightarrow G là trọng tâm ΔABC

$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} = 2 \text{ (G là trọng tâm } \Delta ABC)$$

c) G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF}$

\Rightarrow BG và GE là cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.

\Rightarrow CG và GF là cặp đoạn thẳng tỉ lệ với AG và GD.



Bài 2:



a) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MA}{1} = \frac{MB}{2} = \frac{MA+MB}{1+2} = \frac{AB}{3} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{1}{3}; \frac{MB}{AB} = \frac{2}{3}$

b) Có $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MA}{7} = \frac{MB}{4} = \frac{MA+MB}{7+4} = \frac{AB}{11} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{7}{11}; \frac{MB}{AB} = \frac{4}{11}$

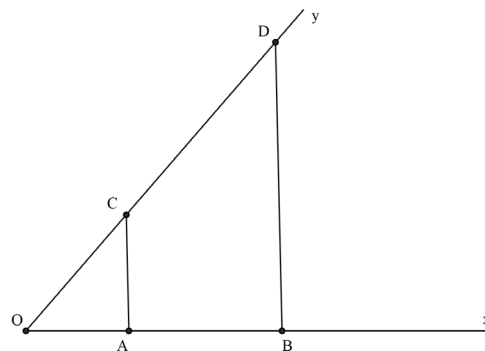
c) $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{MA}{m} = \frac{MB}{n} = \frac{MA+MB}{m+n} = \frac{AB}{m+n} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{m}{m+n}; \frac{MB}{AB} = \frac{n}{m+n}$

Bài 3:

Xét ΔOBD có: $AC \parallel BD$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OC}{CD} \text{ (định lí Ta-let trong tam giác)}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{AB \cdot OC}{OA} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5(cm)$$



Bài 4:

a) Theo định lý Ta-lét trong ΔACE , ta có: $\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}$.

b) Cách 1. Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có: $\frac{DE + AE}{AE} = \frac{17}{11}$

Từ đó tính được $AE = 16,5\text{cm}; DE = 9\text{cm}$ và $AD = 7,5\text{cm}$.

Cách 2. Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

Cách 3. Thay $DE = 25,5 - AE$ vào $\frac{DE}{AE} = \frac{6}{11}$

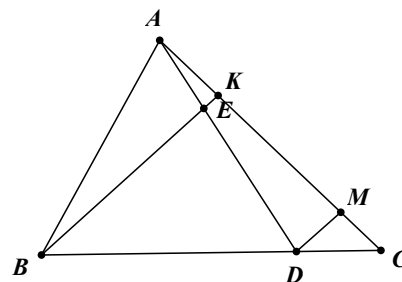
Bài 5: Kẻ $DM // BK (M \in AC)$

Áp dụng định lý Ta-lét trong ΔCBK , ta có:

$$\frac{KM}{KC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Tương tự với ΔADM , ta có: $\frac{AK}{KM} = \frac{1}{2} \quad (2)$

Từ (1) và (2), tìm được: $\frac{AK}{KC} = \frac{3}{8}$



Bài 6: Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến và điểm E thuộc đoạn thẳng MC. Qua E kẻ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở D và cắt AM ở K. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở F. Chứng minh $CF = DK$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh được ADEF là hình bình hành, từ đó: $EF = AD \quad (1)$

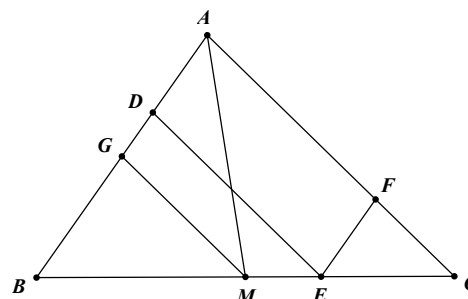
Kẻ $MG // AC (G \in AB)$, ta được G là trung điểm của AB. Áp dụng định lý Ta-lét trong ΔABC , ta có:

$$\frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

Tương tự với ΔAGM và ΔABC , ta có:

$$\frac{DK}{AD} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{BG} = \frac{AC}{AB} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $CF = DK$



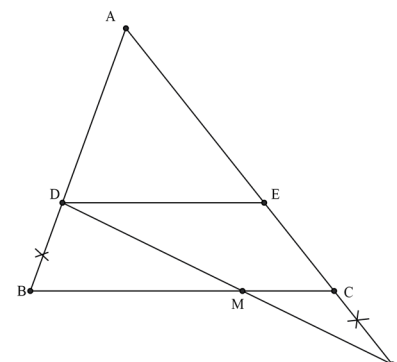
Bài 7:

Xét ΔABC có: $DE // BC$

$$\Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{BD} \text{ hay } \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{BD} \quad (\text{định lý Ta-let trong tam giác}) \quad (1)$$

Xét ΔDEF có: $DE // MC$ (vì $DE // BC$)

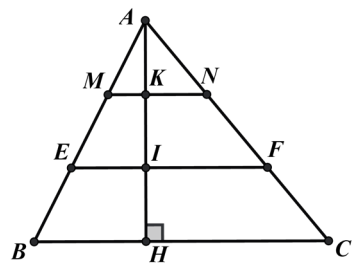
$$\Rightarrow \frac{DM}{MF} = \frac{EC}{CF} \quad (\text{định lý Ta-let trong tam giác}) \quad (2)$$



Mà $CF = DB$ (gt)(3) nên từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DM}{MF} = \frac{AC}{AB}$

Bài 8:

a) +) $NK // CH \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$
 $MN // BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$
 +) $IF // CH \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$
 $EF // BC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3}$



b) $MNFE$ có $MN // FE$ và $KI \perp MN$. Do đó $MNEF$ là hình thang có 2 đáy MN, FE , chiều cao KI .

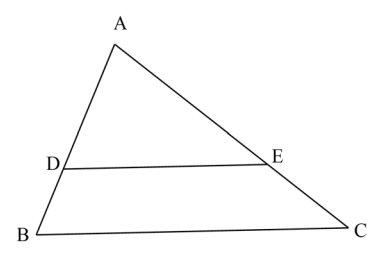
$$\Rightarrow S_{MNEF} = \frac{(MN + FE) \cdot KI}{2} = \frac{\left(\frac{1}{3}BC + \frac{2}{3}BC\right) \cdot \frac{1}{3}AH}{2} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = 30(cm^2)$$

2. ĐỊNH LÝ TALET ĐẢO VÀ HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ TALET

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

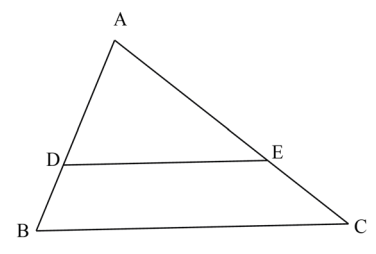
Định lý Ta – lét đảo: Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

GT	$\Delta ABC : D \in AB, E \in AC$ và $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$
KL	$DE \parallel BC$



• *Hệ quả của định lý Ta – lét:* Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

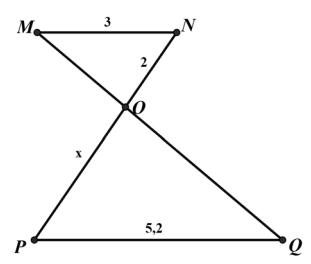
GT	$\Delta ABC : DE \parallel BC$ ($D \in AB, E \in AC$)
KL	$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



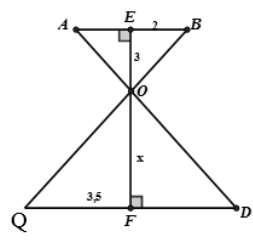
• *Chú ý:* Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng d song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

III. BÀI TẬP

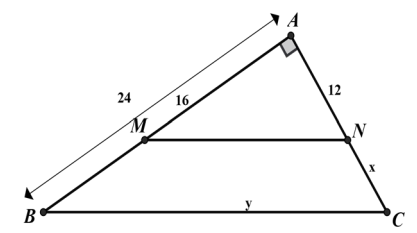
Bài 1: Tìm x trong hình



Biết $MN \parallel PQ$
Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài 2: Cho tam giác ABC, điểm I nằm trong tam giác, các tia AI, BI, CI cắt các cạnh BC, AC, AB theo thứ tự ở D, E, F. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt tia CI tại H và cắt tia BI tại K. Chứng minh:

$$\text{a) } \frac{AK}{BD} = \frac{HA}{DC}; \quad \text{b) } \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE} = \frac{AI}{ID}.$$

Bài 3: Tam giác ABC có đường cao AH. Đường thẳng d song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B', C' và H'.

$$\text{a) Chứng minh rằng } \frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$$

Áp dụng: Cho biết $AH' = \frac{AH}{3}$ và diện tích tam giác ABC là $67,5\text{cm}^2$. Hãy tính diện tích tam giác $AB'C'$.

Bài 4: Cho tam giác ABC, điểm I thuộc cạnh AB, điểm K thuộc cạnh AC. Kẻ IM song song với BK (M thuộc AC), kẻ KN song song với CI (N thuộc AB). Chứng minh MN song song với BC.

Bài 5: (Định lý Céva) Trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy tương ứng ba điểm P, Q, R. Chứng minh nếu AP, BQ, CR đồng quy thì $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD. Qua $E \in AD$ kẻ đường thẳng song song với DC cắt AC ở G. Qua G kẻ đường thẳng song song với CB cắt AB tại H. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } HE // BD$$

b) Qua B kẻ đường thẳng song song với CD, cắt đường thẳng Ac tại I. Qua C kẻ đường thẳng song song với BA, cắt BD tại F. Chứng minh $IF // AD$.

Bài 7: Cho hình thang ABCD ($AB // CD$). M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

$$\text{a) Chứng minh } IK // AB$$

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Chứng minh rằng $EI = IK = KF$.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ có AD là trung tuyến. Từ một điểm M bất kỳ trên cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh:

$$\text{a) } ME + MF = 2AD$$

b) $ADMI$ là hình hình hành

Bài tập tự luyện

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông ở A, đường cao AH. Từ điểm D nằm giữa H và C, vẽ $DE \perp DC$ ($E \in AC$); $DK \perp AC$ ($K \in AC$). Chứng minh $BE \parallel HK$

Bài 2: Cho tam giác ABC, trung tuyến AD có G là trọng tâm. Vẽ đường thẳng d qua G cắt cạnh AB; AC lần lượt tại E;F. Chứng minh

$$a) \frac{AB}{AE} + \frac{AC}{AF} = 3 \qquad b) \frac{BE}{AE} + \frac{CE}{AF} = 1$$

Bài 3: Cho tam giác AOB có $AB = 18\text{cm}$, $OA = 12\text{cm}$, $OB = 9\text{cm}$. Trên tia đối của tia OB lấy điểm D sao cho $OD = 3\text{cm}$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt tia AO ở C. Gọi F là giao điểm của AD và BC. Tính:

$$a) \text{Độ dài OC, CD;} \qquad b) \text{Tỉ số } \frac{FD}{FA}.$$

Bài 4: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD, M là trung điểm của AB, O là giao điểm của AD và BC. OM cắt CD tại N. Chứng minh N là trung điểm của CD.

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE. Qua D kẻ DF vuông góc với AB (F thuộc AB); qua E kẻ EG vuông góc với AC. Chứng minh:

$$a) AD \cdot AE = AB \cdot AG = AC \cdot AF;$$

$$b) FG \text{ song song với BC.}$$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

Hình 1. Trong tam giác ABC, $\Delta OPQ, MN // PQ$ ta có: $\frac{OP}{ON} = \frac{PQ}{MN}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{5,2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5,2 \cdot 2}{3} = \frac{52}{15} (cm)$$

Hình 2. Ta có: $EF \perp AB; EF \perp QD$ Suy ra $AB // QD$.

Trong $\Delta OQF, QF // EB$ suy ra: $\frac{OF}{OE} = \frac{FQ}{EB}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{3,5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 3,5}{2} = 5,25 (cm)$$

Hình 3. Áp dụng định lí Pytago trong $\Delta AMN, \hat{A} = 90^\circ$ ta có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow MN = \sqrt{400} = 20 (cm)$$

Trong $\Delta AMN, MN // BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{12}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18 (cm); NC = 18 - 12 = 6 (cm)$$

Trong $\Delta AMN, MN // BC$ suy ra: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ (hệ quả của định lí Ta-let)

$$\Leftrightarrow \frac{16}{24} = \frac{20}{BC} \Leftrightarrow BC = \frac{24 \cdot 20}{16} = 30 (cm)$$

Bài 2: a) $AK // BD \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AK}{BD}$

Từ $AH // DC \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AH}{DC}$

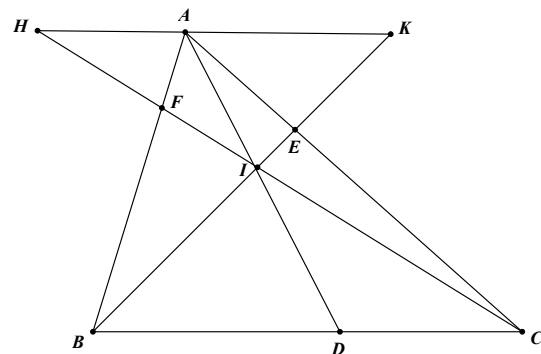
Do đó $\frac{AK}{BD} = \frac{AH}{DC}$

b) Ta có: $\frac{AK}{BD} = \frac{AH}{DC} = \frac{AK + AH}{BD + DC} = \frac{HK}{BC} = \frac{AI}{ID}$

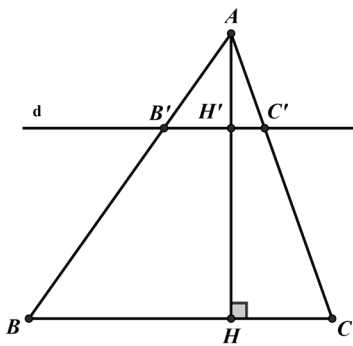
Ta chứng minh

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AH}{BC} (2); \frac{AE}{CE} = \frac{AK}{BC} (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\frac{AE}{CE} + \frac{AF}{BF} = \frac{AI}{ID}$ (đpcm)



Bài 3:



a) Trong $\Delta ABH, B'H' // BH$ suy ra $\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (1)

Trong $\Delta ACH, C'H' // CH$ suy ra $\frac{AH'}{AH} = \frac{AC'}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (2)

Trong $\Delta ABC, B'C' // BC$ suy ra $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ (hệ quả của định lí Ta-let) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$

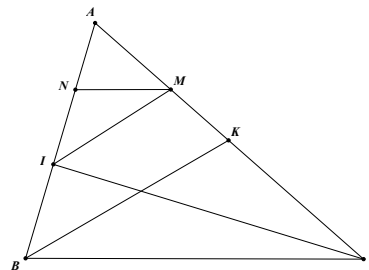
b) Ta có: $\frac{AH'}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$ (câu a); $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'C' = \frac{1}{3}BC$

Từ đó suy ra: $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{AH'}{AH} \cdot \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AB'C'} = \frac{1}{9}S_{ABC} = \frac{67,5}{9} = 9,5 (cm^2)$

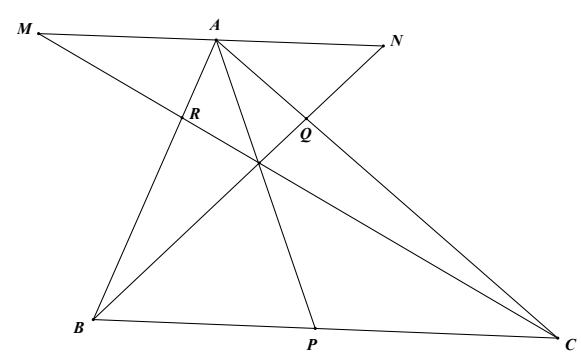
Bài 4: Từ $IM // BK$ và $KN // IC$ ta suy ra $\frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AC}$

và $\frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AC}$.

Do đó $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow MN // BC$.



Bài 5:



Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt BQ và CR lần lượt tại N và M.

Ta chứng minh được: $\frac{QC}{AQ} = \frac{BC}{AN}$ (1)

$\frac{RA}{BR} = \frac{AM}{BC}$ (2); $\frac{BP}{CP} = \frac{AN}{AM}$ (3)

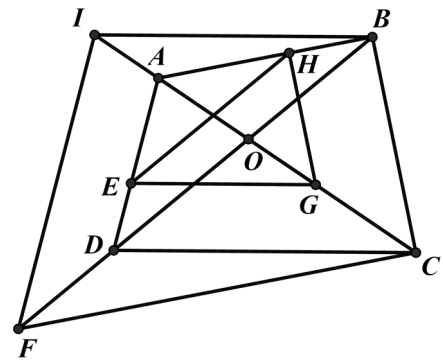
Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$ (đpcm)

Bài 6:

a) $\left. \begin{aligned} EG // DC &\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AC} \\ GH // BC &\Rightarrow \frac{AG}{AC} = \frac{AH}{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow EH // BD$

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD

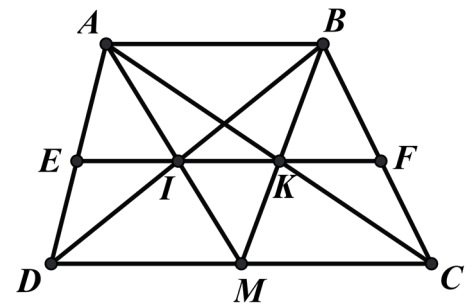
$\left. \begin{aligned} BI // DC &\Rightarrow \frac{OI}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ AB // CF &\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OF}{OB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OI}{OA} = \frac{OF}{OD} \Rightarrow AD // IF$



Bài 7:

a) $\left. \begin{aligned} AB // DM &\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MD}{AB} \\ AB // MC &\Rightarrow \frac{MK}{KB} = \frac{MC}{AB} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{MK}{KB} \Rightarrow IK // AB$

b) Ta có:



$$\left. \begin{aligned} AB // EI &\Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{ID}{DB} \\ AB // IK &\Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{IM}{MA} \\ AB // DM &\Rightarrow \frac{DI}{BI} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \frac{DI}{BD} = \frac{IM}{AM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{IE}{AB} = \frac{IK}{AB} \Rightarrow EI = IK$$

Tương tự $IK = KF$. Do đó $EI = IK = KF$.

Bài 8: a) $MF // AD \Rightarrow \frac{MF}{AD} = \frac{CM}{CD}$

$$AD // ME \Rightarrow \frac{ME}{AD} = \frac{BM}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{AD} + \frac{ME}{AD} = \frac{CM}{CD} + \frac{BM}{BD} \text{ mà } CD = BD \text{ (gt)}$$

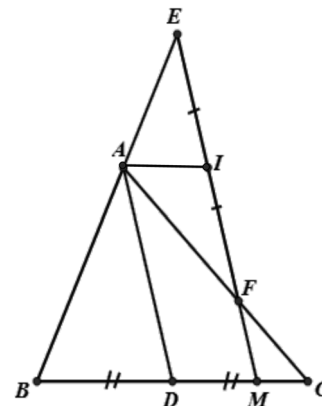
$$\Rightarrow \frac{MF + ME}{AD} = \frac{CM + BM}{CD} = \frac{BC}{CD} = 2 \Rightarrow ME + MF = 2AD$$

(đpcm)

b) $ME + MF = 2AD$ (cmt)

Mà $ME + MF = FE + MF + MF = FE + 2MF = 2IF + 2MF = 2IM$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow AD = IM \\ AD // IM \end{aligned} \right\} \Rightarrow ADIM \text{ là hình bình hành}$$



3. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

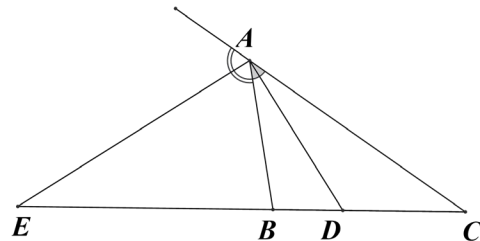
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định lý: Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

• AD là phân giác trong của $\Delta ABC \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

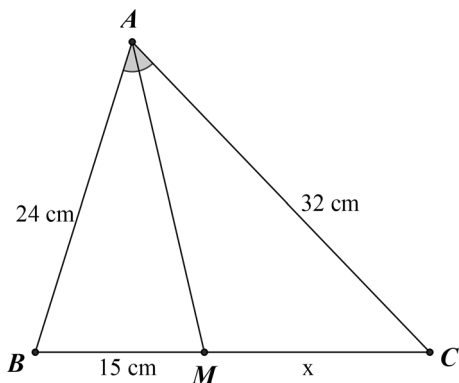
• Tính chất trên vẫn đúng với phân giác ngoài AE

(ΔABC không cân ở A) $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

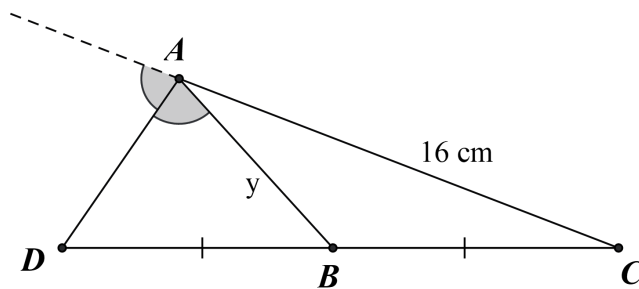


II. BÀI TẬP

Bài 1: Tính độ dài x, y trong các hình vẽ sau:



Hình 1



Hình 2

Bài 2: Cho tam giác ABC có $AB = 4cm, AC = 5cm, BC = 6cm$, các đường phân giác BD và CE cắt nhau ở I.

- a) Tính các độ dài AD, DC.
- b) Tính các độ dài AE, BE.

Bài 3: Cho tam giác cân ABC có $AB = BC$. Đường phân giác góc A cắt BC tại M, đường phân giác góc C cắt BA tại N. Chứng minh $MN \parallel AC$.

Bài 4: Cho ΔABC có AD, BE, CF là các đường phân giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD. Phân giác của \hat{A} và \hat{D} cắt các đường chéo BD và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh: MN song song với AD.

Bài 6: Cho ΔABC có phân giác AD, biết $AB = m, AC = n$.

- a) Tính tỉ số diện tích của ΔABD và ΔACD theo m và n.

b) Vẽ phân giác DE của $\triangle ADB$ và vẽ phân giác DF của $\triangle ADC$. Chứng minh rằng:
 $AF \cdot CD \cdot BE = AE \cdot BD \cdot CF$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM, đường phân giác của \widehat{AMB} cắt AB ở D, đường phân giác của \widehat{AMC} cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BC$.

b) Gọi I là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng $DI = IE$.

c) Tính DE, biết $BC = 30\text{cm}$, $AM = 10\text{cm}$.

d) $\triangle ABC$ phải thêm điều kiện gì để ta có $DE = AM$?

e) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân nếu biết $MD = ME$.

Bài 8: Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A. Đường cao AH và đường phân giác BE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $CE = 2 \cdot HI$.

Tự luyện

Bài 1: Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Biết rằng $BC = 10\text{cm}$ và $2AB = 3AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BD và CD.

KQ: $BD = 6\text{ cm}$; $CD = 4\text{cm}$.

Bài 2: Gọi AI là đường phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là các đường phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$.

Bài 3: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 18cm. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M, đường phân giác của góc C cắt AB tại N. Biết rằng $\frac{MA}{MC} = \frac{1}{2}$; $\frac{NA}{NC} = \frac{3}{4}$, tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

KQ: $AB = 4\text{cm}$; $AC = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{ cm}$.

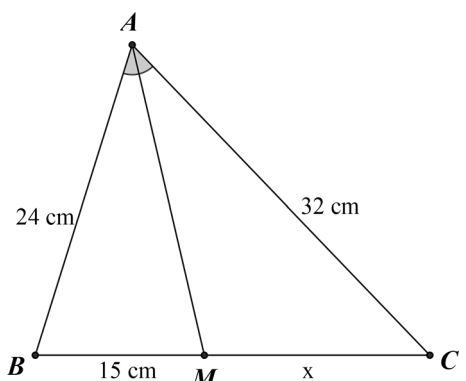
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, đường phân giác BD.

a) Tính các độ dài DA, DC.

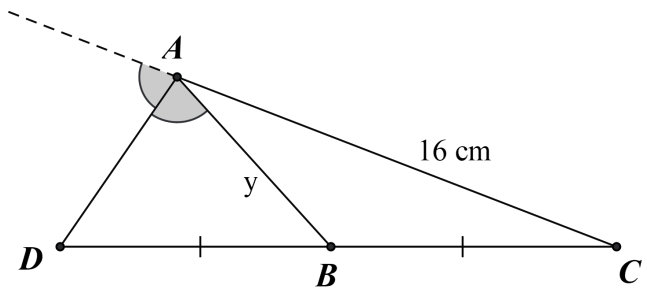
b) Tia phân giác của \widehat{C} cắt BD ở I. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{BIM} = 90^\circ$

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:



Hình 1



Hình 2

a) Xét $\triangle ABC$ có AM là đường phân giác trong nên: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$

Hay $\frac{15}{x} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 4}{3} = 20(cm)$

b) Xét $\triangle ABC$ có AD là đường phân giác ngoài nên: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

Mà B là trung điểm của đoạn thẳng DC nên: $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{2} = \frac{y}{16} \Rightarrow y = 8(cm)$

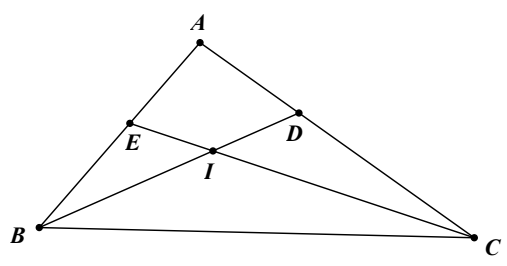
Bài 2: a) Theo tính chất đường phân giác: $\frac{AD}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{CD}{3} = 1.$

Do đó, $AD = 2cm, CD = 3cm.$

b) Ta có: Theo tính chất đường phân giác:

$\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AE}{5} = \frac{EB}{6} = \frac{4}{11}.$

Do đó, $AE = \frac{20}{11}cm, BE = \frac{24}{11}cm.$

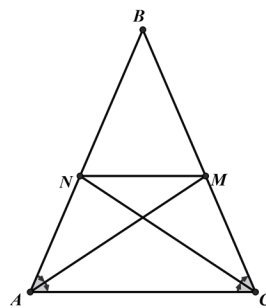


Bài 3: AM là phân giác của \widehat{A} nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

CN là phân giác của \widehat{C} nên $\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC}$.

Lại có: $AB = BC$.

Suy ra: $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{AN} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow MN \parallel AC$.



Bài 4: Xét $\triangle ABC$, áp dụng tính chất đường phân giác ta có:

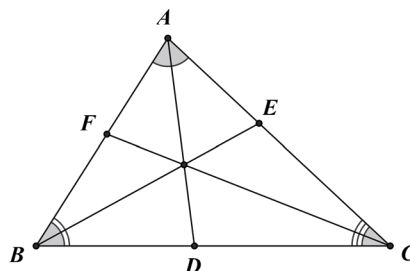
$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} \quad (1)$$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

$$\frac{BF}{FA} = \frac{BC}{AC} \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) theo vế ta được:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$



Bài 5: Gọi O là giao điểm của BD và AC .

Xét tam giác ABD , phân giác AM , ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DM}$

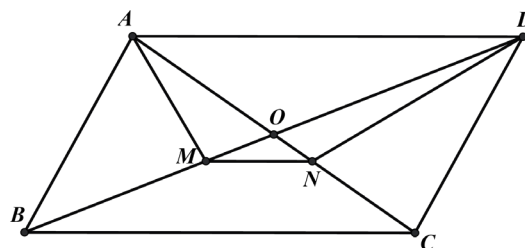
Tương tự, $\frac{CD}{AD} = \frac{CN}{AN}$;

Mà $AB = CD$, suy ra $\frac{BM}{DM} = \frac{CN}{AN}$

Từ đó, ta có:

$$\frac{BM}{DM} + 1 = \frac{CN}{AN} + 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{CA}{AN} \Leftrightarrow \frac{DO}{DM} = \frac{AO}{AN}$$

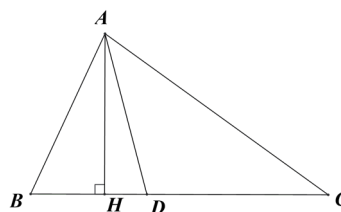
Suy ra $MN \parallel AD$.



Bài 6: a) Vẽ đường cao AH của $\triangle ABC$. Vì $\triangle ABC$ có phân giác AD nên:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}. \text{ Vậy } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BD}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{m}{n}$$

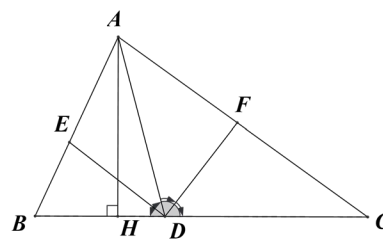
b) Ta có: $\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD}$ (do DF là phân giác \widehat{ADC})



$$\frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD} \text{ (do DE là phân giác } \widehat{ADB} \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BE}{AE} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BD}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow AF \cdot CD \cdot BE = AE \cdot BD \cdot CF$$



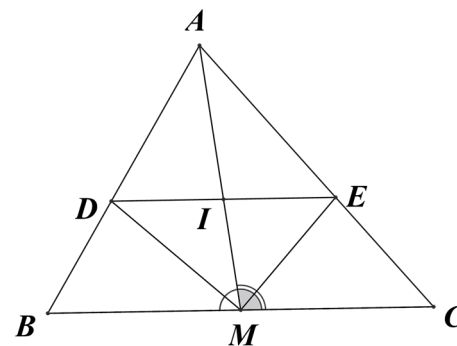
Bài 7: a) Ta có

$$\frac{BD}{AD} = \frac{MB}{MA} \text{ (do MD là phân giác của } \widehat{AMB} \text{)}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{MC}{MA} \text{ (do ME là phân giác của } \widehat{AMC} \text{)}$$

Mà $MB = MC$ (M là trung điểm của BC)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow DE // BC$$



b) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACM$ lần lượt có $DI // BM$ và $EI // CM$.

$$\frac{DI}{BM} = \frac{EI}{CM} \left(= \frac{AI}{AM} \right) \text{ Mà } BM = CM \Rightarrow DI = EI$$

c) Ta có: $\frac{BD}{AD} = \frac{MB}{MA}$. Mà $\frac{BD}{AD} = \frac{IM}{AI}$ (do $DI // BM$) $\Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{IM}{AI}$

Ta lại có: $\frac{BM}{DI} = \frac{AM}{AI}$ (do $DI // BM$)

$$\frac{BM}{DI} = \frac{AI + IM}{AI} = 1 + \frac{IM}{AI} = 1 + \frac{BM}{AM} = \frac{AM + BM}{AM}$$

$$\Rightarrow DI = \frac{BM \cdot AM}{AM + BM} = \frac{15 \cdot 10}{10 + 15} = \frac{150}{25} = 6$$

$$\Rightarrow ED = 2DI = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (do } DI = IE = \frac{1}{2}DE \text{)}$$

d) Để $DE = AM$ ta cần tứ giác ADME là hình chữ nhật

Hay $DM // AE, EM // AD, \widehat{BAC} = 90^\circ$

Khi $\widehat{BAC} = 90^\circ$ thì $AM = MB = MC$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC)

$\Rightarrow \triangle ABM, \triangle ACM$ cân tại M

$\Rightarrow MD \perp AB, ME \perp AC$ (đường phân giác của tam giác cân đồng thời là đường cao)

Mà $AB \perp AC$. Suy ra $DM \parallel AE, EM \parallel AD$. Suy ra tứ giác $ADME$ là hình chữ nhật

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A thì $DE = AM$.

e) Khi $DM = EM$ thì $\triangle DME$ cân tại M có MI là trung tuyến ($DI = IE$) nên đồng thời là đường cao $\Rightarrow MI \perp DE$

Mà $DE \parallel BC$ (cmt) nên $MI \perp BC$

$\triangle ABC$ có AI vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân.

Bài 8: Ta có $\widehat{AIE} = \widehat{BAH} + \widehat{ABI} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B}) = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{B} = 45^\circ + \frac{1}{2}\widehat{C} = \widehat{AEI}$.

Suy ra $\triangle AIE$ cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (1).

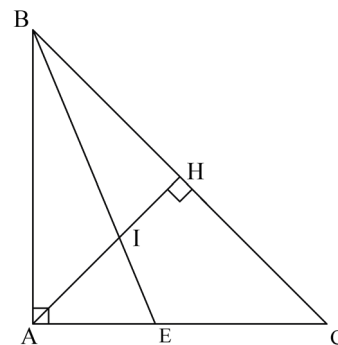
Áp dụng tính chất đường phân giác của $\triangle ABH$ và $\triangle BAC$ ta có:

$$\frac{IH}{IA} = \frac{BH}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{BH}{IH} \quad (2); \quad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EC} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\frac{BH}{IH} = \frac{BC}{EC}$ (4)

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = 2.BH$

Từ đó kết hợp với (4) suy ra $EC = 2.IH$.



4. KHÁI NIỆM HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định nghĩa

- Hai tam giác gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có ba cặp góc bằng nhau đôi một và ba cặp cạnh tương ứng tỉ lệ.

- Ta có $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \end{cases}$

• Tính chất

a) Mỗi tam giác đồng dạng với chính tam giác đó (hoặc nói: Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau).

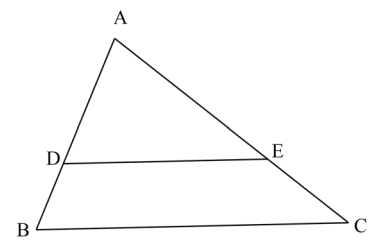
b) Nếu $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ theo tỉ số k thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $\frac{1}{k}$.

c) Nếu $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ và $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

• Định lý

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.

GT	ΔABC $DE // BC (D \in AB, E \in AC)$
KL	$\Delta ADE \sim \Delta ABC$



III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng với nhau theo tỉ số k, chứng minh rằng tỉ số chu vi của hai tam giác ABC và A'B'C' cũng bằng k.

Bài 2: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 10cm, CA = 14cm, AB = 6cm$. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF có cạnh nhỏ nhất là 9cm. Tính các cạnh còn lại của tam giác DEF.

Bài 3: Cho ΔABC , điểm D thuộc cạnh BC sao cho: $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$. Kẻ $DE // AC ; DF // AB$ ($E \in AB; F \in AC$).

a) Nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng. Đối với mỗi cặp, hãy viết các góc bằng nhau và các tỉ số tương ứng.

b) Hãy tính chu vi ΔBED , biết hiệu chu vi của ΔDFC và ΔBED là 30cm

Bài 4: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo AC lấy điểm E sao cho $AC = 3AE$. Qua E vẽ đường thẳng song song với CD, cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N.

a) Tìm các tam giác đồng dạng với $\triangle ADC$ và tìm tỉ số đồng dạng.

b) Điểm E nằm ở vị trí nào trên AC thì E là trung điểm của MN?

Bài 5: Cho $\triangle ABC$. Vẽ tam giác đồng dạng với tam giác đó, biết tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{3}$. Có thể dựng được bao nhiêu tam giác như thế?

Tự luyện

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD, có $AB = 6\text{cm}$, $AD = 5\text{cm}$. Lấy F trên cạnh BC sao cho $CF = 3\text{cm}$. Tia DF cắt tia AB tại G.

a) Chứng minh $\triangle GBF \sim \triangle DCF$ và $\triangle GAD \sim \triangle DCF$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AG.

c) Chứng minh $AG \cdot CF = AD \cdot AB$.

Bài 2: Cho tam giác ABC, kẻ Ax song song với BC. Từ trung điểm M của cạnh BC, kẻ một đường thẳng bất kỳ cắt Ax ở N, cắt AB ở P và cắt AC ở Q. Chứng minh $\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$.

Bài 3: Hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 10\text{cm}$, $CD = 25\text{cm}$ và hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh rằng $\triangle AOB \sim \triangle COD$ và tìm tỉ số đồng dạng.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = k = \frac{C_{\Delta ABC}}{C_{\Delta A'B'C'}}$$

Với $C_{\Delta ABC}$ là chu vi tam giác ABC và $C_{\Delta A'B'C'}$ là chu vi tam giác $A'B'C'$

Bài 2: $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

ΔABC cạnh nhỏ nhất là cạnh $AB = 6\text{ cm}$. Nên cạnh nhỏ nhất của ΔDEF là $DE = 9\text{ cm}$

Ta có: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{6}{9} = \frac{14}{DF} = \frac{10}{EF}$

Từ đó tính được $DF = 21\text{ cm}; EF = 15\text{ cm}$

Bài 3:

a) Các cặp tam giác đồng dạng:

$\Delta ABC \sim \Delta EBD$; $\Delta ABC \sim \Delta FDC$; $\Delta FDC \sim \Delta EBD$ (vì cùng đồng dạng với ΔABC)

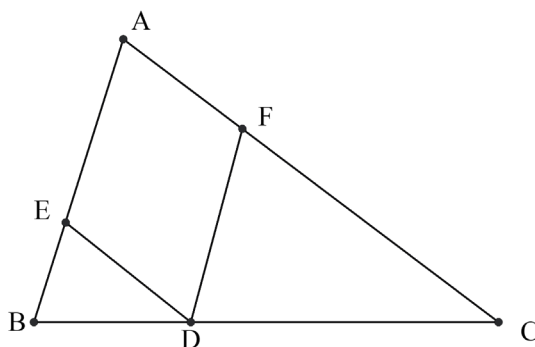
* $\Delta ABC \sim \Delta EBD$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BED}; \widehat{ABC} = \widehat{EBD}; \widehat{ACB} = \widehat{EDB};$$

$$\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED} = \frac{3}{1}$$

* $\Delta ABC \sim \Delta FDC$ có: $\frac{AC}{FC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{FD} = \frac{3}{2}$

* $\Delta FDC \sim \Delta EBD$ có: $\frac{FC}{ED} = \frac{CD}{DB} = \frac{FD}{EB} = \frac{2}{1}$



c) Ta có tỉ số về chu vi bằng tỉ số đồng dạng

* $\Delta DFC \sim \Delta BED$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{CD}{DB} = \frac{2}{1}$

Do đó: $\frac{P_{\Delta DFC}}{P_{\Delta BED}} = \frac{2}{1} \Rightarrow P_{\Delta DFC} = 2P_{\Delta BED}$

Mà theo giả thiết: $P_{\Delta DFC} - P_{\Delta BED} = 30 \Rightarrow 2P_{\Delta BED} - P_{\Delta BED} = 30 \Rightarrow P_{\Delta BED} = 30(cm)$

Bài 4:

a) Tam giác đồng dạng với ΔADC

* $\Delta ADC \sim \Delta ADC$. Tỉ số đồng dạng: $k_1 = 1$

* $\Delta ADC \sim \Delta CBA$. Tỉ số đồng dạng: $k_1 = 1$ (hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng)

$\Delta ADC \sim \Delta AME$ theo tỉ số đồng dạng $k_2 = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

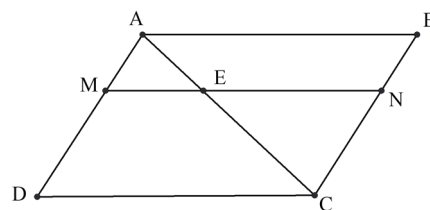
$\Delta ADC \sim \Delta CNE$ theo tỉ số đồng dạng $k_3 = \frac{AC}{CE} = \frac{3}{2}$

b) E là trung điểm của MN thì $EM = EN$ suy ra: $\frac{EM}{EN} = 1$

Ta có: $\Delta AME \sim \Delta CNE$ (cùng đồng dạng với ΔADC)

suy ra: $\frac{AE}{CE} = \frac{EM}{EN} = 1 \Rightarrow AE = CE = 1$

Suy ra E là trung điểm của AC

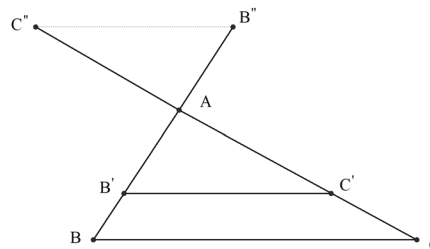


Bài 5: Cách 1: - Tại đỉnh A dựng tam giác $AB'C'$

đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$ bằng

cách

Kẻ $B'C' // BC$ sao cho $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{2}{3}$



- Tam giác có 3 đỉnh, tại mỗi đỉnh ta dựng tương tự như trên, sẽ được ba tam giác đồng dạng với tam giác ABC.

Cách 2: - Ta có cách dựng thứ 2 bằng cách vẽ $B''C'' // BC$ sao cho: $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{2}{3}$

- Tam giác có 3 đỉnh, tại mỗi đỉnh ta dựng tương tự như trên, sẽ được ba tam giác đồng dạng với tam giác ABC

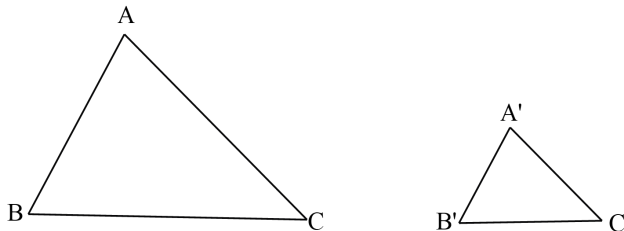
Kết luận: Ta có thể dựng được sáu tam giác đồng dạng với tam giác ABC (trong đó tại mỗi đỉnh có một cặp tam giác bằng nhau)

5. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định lý: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$
	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$
KL	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



II. BÀI TẬP

Bài 1: Hai tam giác mà các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng không? Tại sao?

- a) 4cm, 5cm, 6cm và 8mm, 1cm, 12mm.
- b) Tam giác ABC vuông tại A, có AB = 6cm, AC = 8cm và tam giác A'B'C' vuông tại A', có A'B' = 9cm, B'C' = 16cm.

Bài 2: Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh tỉ lệ với 4 : 5 : 6 . Cho biết ΔDEF ~ ΔABC và cạnh nhỏ nhất của ΔDEF là 0,8m, hãy tính các cạnh còn lại của ΔDEF.

Bài 3: Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác A'B'C'. Cho biết BC = 24,3cm, CA = 32,4cm và AB = 16,2cm, hãy tính độ dài các cạnh của tam giác A'B'C' nếu:

- a) AB lớn hơn A'B' là 10 cm;
- b) A'B' lớn hơn AB là 10 cm.

Bài 4: Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác đó. Trên cạnh OA lấy điểm D sao cho OD = 2/3 OA. Qua D vẽ các đường thẳng song song với AB, AC lần lượt cắt OB, OC tại E và F

- a) Chứng minh ΔDEF ~ ΔABC
- b) Tính độ dài DE, AB biết hiệu độ dài hai cạnh đó là 12cm
- c) Tính chu vi của Δ DEF, biết rằng tổng chu vi của Δ ABC và Δ DEF là 120cm.

Bài 5: Cho tứ giác ABCD có AB = 3cm ; BC = 10cm ; CD = 12 cm ; AD = 5cm ; BD = 6cm . Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình thang.

Bài 6: Chứng minh 2 tam giác ABC và DEF đồng dạng và viết các cặp góc bằng nhau, nếu biết một trong các trường hợp sau:

- a) $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $AC = 5\text{cm}$, $DE = 10\text{cm}$, $DF = 12\text{cm}$, $EF = 8\text{cm}$.
 b) $AB = 24\text{cm}$, $BC = 21\text{cm}$, $AC = 27\text{cm}$, $DE = 28\text{cm}$, $DF = 36\text{cm}$, $EF = 32\text{cm}$.
 c) $AB = DE = 12\text{cm}$, $AC = DF = 18\text{cm}$, $BC = 27\text{cm}$, $EF = 8\text{cm}$.

Bài 7: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và $\triangle DEF$ vuông tại D có $BC = 10\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $EF = 5\text{cm}$, $DF = 4\text{cm}$.

- a) Tính AB, DE.
 b) Chứng minh: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.
 c) Chứng minh: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bài 8: Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA.

- a) Chứng minh $\triangle A'B'C' \sim \triangle CAB$
 b) Tính chu vi của $\triangle A'B'C'$, biết chu vi của $\triangle ABC$ bằng 54cm .

Tự luyện

Bài 1: Từ điểm D trên cạnh AB của tam giác ABC, kẻ một đường thẳng song song với BC, cắt AC ở E và cắt đường thẳng qua C song song với AB tại F; BF cắt AC ở I. Tìm các cặp tam giác đồng dạng.

Bài 2: Cho tam giác ABC, lấy D trên cạnh BC sao cho $\frac{DB}{DC} = \frac{1}{2}$. Qua D kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại E.

- a) Tìm các cặp tam giác đồng dạng và tìm tỉ số đồng dạng.
 b) Tính chu vi các tam giác DBD, EDC biết chu vi tam giác ABC bằng 24cm .

Bài 3: Cho tam giác ABC, kẻ Ax song song với BC. Từ trung điểm M của cạnh BC, kẻ một đường thẳng bất kỳ cắt Ax ở N, cắt AB ở P và cắt AC ở Q. Chứng minh $\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) Đổi sang đơn vị mm, ta lập được tỉ số: $\frac{40}{8} = \frac{50}{10} = \frac{60}{12} = 5$

Từ đó kết luận hai tam giác đồng dạng.

b) Theo định lý Pytago, tính được $BC = 10\text{cm}$.

Vì $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3} \neq \frac{5}{8} = \frac{BC}{B'C'}$ nên hai tam giác không đồng dạng.

Bài 2: Vì $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ nên $\triangle DEF$ cũng có độ dài các cạnh tỉ lệ với 4 : 5 : 6.

Giả sử $DE < EF < FD \Rightarrow DE = 0,8m$

Ta có $\frac{DE}{4} = \frac{EF}{4} = \frac{FD}{6} = 0,2$

Từ đó tính được $EF = 1m$ và $FD = 1,2m$.

Bài 3: Ta có $\frac{16,2}{A'B'} = \frac{24,3}{B'C'} = \frac{32,4}{C'A'}$

a) Tính được $A'B' = 6,2cm$. Từ đó tính được $B'C' = 9,3cm$ và $A'C' = 12,4cm$.

b) Tương tự câu a tính được $A'B' = 26,2cm$, $B'C' = 39,3cm$ và $A'C' = 52,4cm$.

Bài 4:

a) Ta có: $DE // AB$ suy ra: $\triangle ODE \sim \triangle OAB$

$$\Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{AB} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \triangle ODF \sim \triangle OAC \Rightarrow \frac{OD}{OA} = \frac{OF}{OC} = \frac{DF}{AC} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

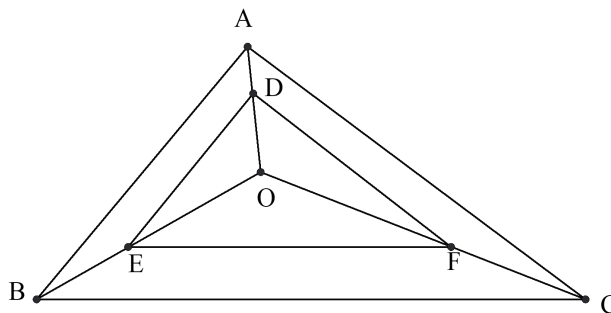
$$\text{Do đó: } \Rightarrow \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF // BC \text{ (theo}$$

định lí Ta let đảo)

$$\Rightarrow \triangle OEF \sim \triangle OBC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{OF}{OC} = \frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2); (3) suy ra } \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \triangle DEF \sim \triangle ABC \text{ (c.c.c)}$$



b) Ta có: $\frac{DE}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{DE}{2} = \frac{AB}{3}$ mà $AB - DE = 12$. Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau có

$$\frac{DE}{2} = \frac{AB}{3} = \frac{AB - DE}{3 - 2} = 12$$

$$\Rightarrow DE = 24(cm); AB = 36(cm)$$

c) Ta có tỉ số về chu vi bằng tỉ số đồng dạng

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{AB}{DE} = \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DEF}} = \frac{3}{2} \Rightarrow P_{\Delta ABC} = \frac{3}{2} P_{\Delta DEF}$

Mà theo giả thiết: $P_{\Delta ABC} + P_{\Delta DEF} = 120 \Rightarrow \frac{3}{2} P_{\Delta DEF} + P_{\Delta DEF} = 120 \Rightarrow P_{\Delta DEF} = 48 (cm)$

Bài 5: Ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{AD}{BC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \frac{BD}{BC} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

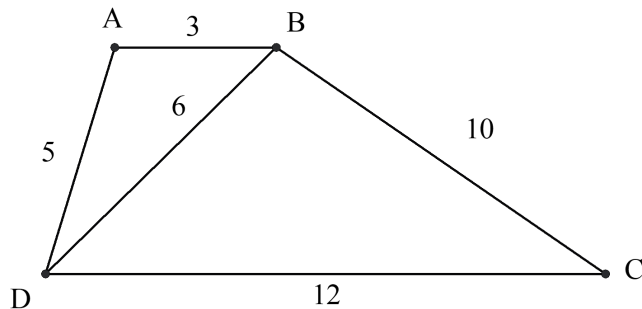
Do đó:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BDC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ Mà hai góc ở vị trí so le trong

Do đó suy ra: $AB \parallel CD \Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình thang.



Bài 6:

a) Ta chia các cặp cạnh theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \frac{AC}{DE} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \frac{BC}{DF} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BA}{FE} = \frac{AC}{ED} = \frac{CB}{DF}$$

$$\frac{BA}{FE} = \frac{AC}{ED} = \frac{CB}{DF} \Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta FED \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{F}, \widehat{A} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{D}$$

b) Ta chia các cặp cạnh theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}; \frac{AB}{FE} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}; \frac{AC}{DF} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{CB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{AC}{FD}$$

$$\frac{CB}{DE} = \frac{BA}{EF} = \frac{AC}{FD} \Rightarrow \Delta CBA \sim \Delta DEF \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{A} = \widehat{F}$$

c) Ta chia các cặp cạnh theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}; \frac{AC}{DE} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}; \frac{BC}{DF} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DE} = \frac{BC}{DF}$$

$$\frac{BA}{FE} = \frac{AC}{ED} = \frac{CB}{DF} \Rightarrow \Delta BAC \sim \Delta FED \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{F}, \widehat{A} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{D}$$

Bài 7:

a) Tính AB, DE.



$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6cm$$

$$DE = \sqrt{EF^2 - DF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm$$

$$b) \frac{AB}{DE} = \frac{6}{3} = 2; \frac{AC}{DF} = \frac{8}{4} = 2; \frac{BC}{EF} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

$$c) \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Bài 8: a) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{1}{2}$, suy ra ngay $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (c-c-c)

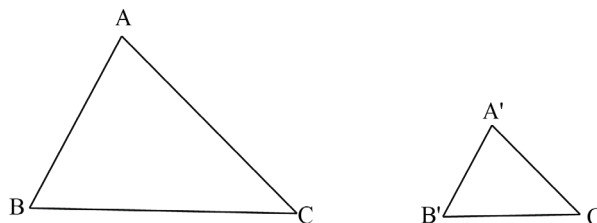
$$b) \frac{1}{2} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{AB + BC + CA} = \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} \Rightarrow P_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} = 27cm$$

6. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• Định lý: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau, thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, \widehat{B} = \widehat{B}'$
KL	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình thang ABCD (AB//CD), biết $AB = 9cm, BD = 12cm, DC = 16cm$. Chứng minh $\Delta ABD \sim \Delta BDC$.

Bài 2: Cho xOy , phân giác Ot. Trên Ox lấy các điểm A và C' sao cho $OA = 4cm, OC' = 9cm$, trên Oy lấy các điểm A' và C sao cho $OA' = 12cm, OC = 3cm$, trên tia Ot lấy các điểm B và B' sao cho $OB = 6cm, OB' = 18cm$. Chứng minh:

- a) $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$;
- b) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Bài 3: Cho ΔABC có $AB = 8cm, AC = 16cm$. Gọi D và E là hai điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = 2cm, CE = 13cm$. Chứng minh :

- a) $\Delta AEB \sim \Delta ADC$
- b) $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$
- c) $AE.AC = AB.AD$

Bài 4: Chứng minh rằng nếu $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số k thì tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng cũng bằng k.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB = 9cm, AC = 12cm, BC = 7cm$. Chứng minh $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Bài 6: Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là một cạnh thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

- a) Chứng minh $AB^2 = DM.BN$;
- b) BM cắt DN tại P. Tính góc \widehat{BPD} .

Bài 7*: Cho tam giác ABC có $AB = 2cm ; AC = 3cm ; BC = 4cm$. Chứng minh rằng:
 $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$.

Bài 8*: Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Lấy M tùy ý thuộc BC, kẻ MN song song với AB (với $N \in AC$), kẻ MP song song với AC (với $P \in AB$). Gọi O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{OMP} = \widehat{AMN}$.

Bài 9: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$. Trên AB lấy điểm E sao cho $AE = 2\text{cm}$, trên AC lấy điểm D sao cho $AD = 1\text{cm}$.

a) Chứng minh: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

b) Chứng minh: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

c) Tính độ dài đoạn DE.

Bài 10: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 3\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$. Trên AB lấy điểm E sao cho $AE = 2\text{cm}$, trên AC lấy điểm D sao cho $AD = 1\text{cm}$.

a) Chứng minh: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

b) Chứng minh: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

c) Tính độ dài đoạn DE.

Bài 11: Cho $\triangle ABC$, biết $AB = 7,5\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Trên AB, AC theo thứ tự lấy điểm M và N sao cho $AN = 3\text{cm}$, $AM = 2,5\text{cm}$.

a) Chứng minh: $\triangle AMN \sim \triangle ABC$

b) Tính độ dài đoạn MN.

Tự luyện:

Bài 1: Cho hình thang ABCD biết $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm I sao cho $AB \cdot DC = AI \cdot DI$. Chứng minh:

a) $\triangle ABI \sim \triangle DIC$;

b) $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

Bài 2: Cho hình thoi ABCD, $\widehat{A} = 60^\circ$. Qua C kẻ đường thẳng d bất kì cắt các tia đối của các tia BA, DA theo thứ tự tại E và F. Gọi I là giao điểm của BF và ED. Chứng minh:

a) $\frac{EB}{BA} = \frac{AD}{DF}$;

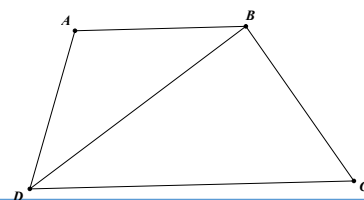
b) $\triangle EBD \sim \triangle BDF$;

c) $\widehat{BID} = 120^\circ$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: Ta chứng minh được $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$.

Từ đó suy ra $\triangle ABD \sim \triangle BDC(c.g.c)$



Bài 2:

a) Chứng minh được $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$ (c.g.c)

b) Chứng minh được $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{3}$

Bài 3:

a) Xét tam giác AEB và tam giác ADC có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}; \frac{AE}{AD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

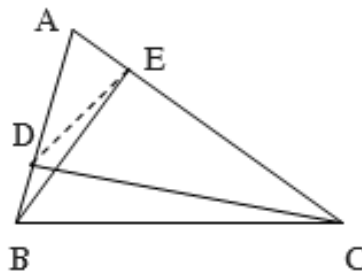
Mặt khác lại có góc A chung

$\Rightarrow \Delta AEB \sim \Delta ADC$ (c-g-c)

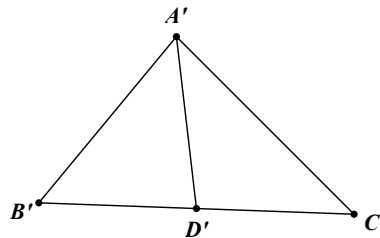
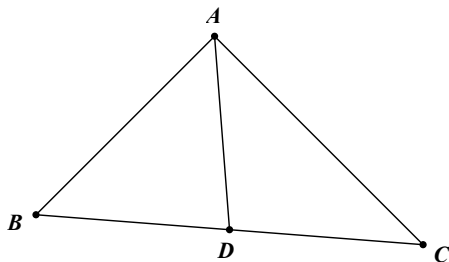
b) Chứng minh tương tự câu a) ta có $\Delta AED \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ABC}$ (hai góc tương ứng)

c) Theo câu b) ta có $\Delta AED \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AD$



Bài 4:



HD: a) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ có AD và A'D' lần lượt là trung tuyến xuất phát từ đỉnh A và A' xuống cạnh BC và B'C' của hai tam giác đó.

$$\text{Ta có } k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{B'C'}{2}} = \frac{BD}{B'D'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} \text{ Có } \widehat{B} = \widehat{B}' .$$

Vậy $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ (c-g-c) Từ đó suy ra $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$

Bài 5: Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BC = 7\text{cm}$. Chứng minh được $\Delta ABC \sim \Delta ACE$ (c.g.c)

suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{E}$

Từ đó ta có $\widehat{ABC} = \widehat{BCE} + \widehat{E} = 2\widehat{E} = 2\widehat{BCA}$

Bài 6: a) Ta có $AM // BC$ (do $AD // BC$) suy ra $\triangle NAM \sim \triangle NBC \Rightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{NB}{BC}$ hay

$$\frac{NA}{AM} = \frac{NB}{AB} \quad (1) \quad (\text{vì } BC = AB).$$

Ta có $NA // DC$ (do $AB // DC$) suy ra $\triangle NAM \sim \triangle CDM \Rightarrow \frac{NA}{AM} = \frac{CD}{DM}$ hay $\frac{NA}{AM} = \frac{AB}{DM}$ (2)
(vì $CD = AB$).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{NA}{AB} = \frac{AB}{DM}$ hay $AB^2 = DM \cdot BN$.

b) Từ $\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{DM} \Rightarrow \frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$

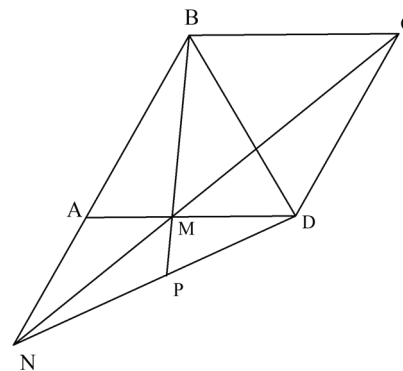
Xét $\triangle BND$ và $\triangle DBM$ có $\frac{NB}{BD} = \frac{BD}{DM}$ và

$$\widehat{NBD} = \widehat{BDM} = 60^\circ.$$

Suy ra $\triangle BND \sim \triangle DBM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{BND} \Rightarrow \widehat{MBD} + \widehat{MBN} = \widehat{BND} + \widehat{MBN} = 60^\circ$$

Mà $\widehat{BPD} = \widehat{BND} + \widehat{MBN}$ nên $\widehat{BPD} = 60^\circ$.



Bài 7*:

Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D sao cho $BD = 1 \text{ cm}$

$$\Rightarrow CD = BC - BD = 3 \text{ cm} \Rightarrow CD = AC \text{ nên } \triangle ACD$$

cân tại C, do vậy $\widehat{DAC} = \widehat{ADC}$ (1)

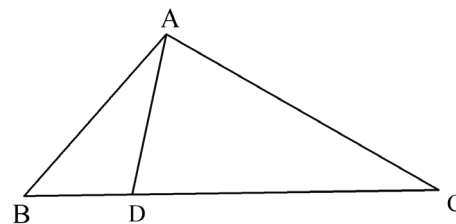
$$\triangle ABD \text{ và } \triangle CBA \text{ có } \widehat{ABD} \text{ chung và } \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAD}$$

Do đó $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + 2.\widehat{ACB}$.



Bài 8*:

Giả sử $MB \leq MC$. Gọi Q là giao điểm MO và AB ; K là giao điểm CP và MN.

Vì $MNAP$ là hình bình hành nên $\widehat{QPM} = \widehat{ANM}$ (1)

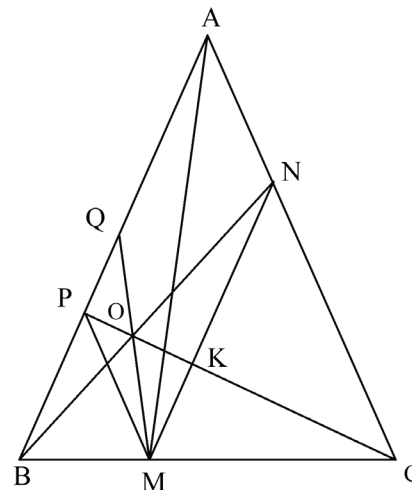
Vì ΔABC cân tại A nên suy ra ΔPBM cân tại P và ΔNCM cân tại N.

Do đó $PB = PM = AN$ và $NC = NM = AP$ kết hợp với

$$MN // AP, \text{ suy ra } \frac{PQ}{PM} = \frac{PQ}{PB} = \frac{KM}{KN} = \frac{PB}{PA} = \frac{NA}{NM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta QPM \sim \Delta ANM$ (c.g.c) \Rightarrow

$\widehat{QMP} = \widehat{AMN}$ hay $\widehat{OMP} = \widehat{AMN}$. Điều phải chứng minh.



Bài 9:

a) $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}; \frac{AE}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

b) $\Delta ABC, ADE : \begin{cases} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \\ \widehat{BAC} = \widehat{DAE} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE$

c) $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = 3 \Rightarrow DE = \frac{1}{3}BC = \frac{4}{3}(cm)$

Bài 10: a) $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}; \frac{AE}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

b) $\begin{cases} \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \\ \widehat{BAC} = \widehat{DAE} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE$ (c.g.c)

c) $\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = 3 \Rightarrow DE = \frac{1}{3}BC = 2(cm)$

Bài 11: a) $\frac{AM}{AB} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{1}{3}; \frac{AN}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$\begin{cases} \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \\ \widehat{BAC} = \widehat{MAN} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AMN$ (c.g.c)

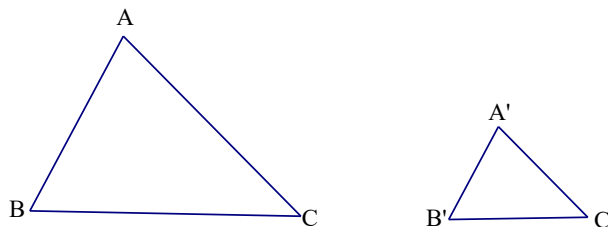
b) $\Delta ABC \sim \Delta AMN \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = 3 \Rightarrow MN = \frac{1}{3}BC = 4(cm)$

7. TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ BA

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• *Định lý:* Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B}'$
KL	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



II. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt tia AD tại E. Chứng minh:

a) $\Delta ABD \sim \Delta ECD$;

b) ΔACE cân tại C.

Bài 2: Cho hình thang ABCD có $AB \parallel CD$, $AB = 4 \text{ cm}$, $DB = 6 \text{ cm}$ và $\widehat{A} = \widehat{CBD}$. Tính độ dài CD.

Bài 3: Cho ΔABC vuông tại A có AK là đường cao $AB = 12 \text{ cm}$, $AC = 16 \text{ cm}$.

a) Chứng minh: $\Delta ABK \sim \Delta CBA$. Tính độ dài đoạn thẳng BC, AK.

b) Chứng minh: $\Delta ABK \sim \Delta CAK$

c) Chứng minh: $\Delta CAK \sim \Delta CBA$

Bài 4: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng quy tại O. Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với BO cắt CO, OA lần lượt ở E và F.

a) Chứng minh: $\Delta FCM \sim \Delta OBM$ và $\Delta PAE \sim \Delta PBO$

b) Chứng minh: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

Bài 5: Cho ΔABC có 3 góc nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Chứng minh:

a) $AD \cdot BC = BE \cdot AC = CF \cdot AB$

b) $AD \cdot HD = DB \cdot DC$ và suy ra các hệ thức tương tự

c) $\Delta ABH \sim \Delta EDH$ và suy ra các kết quả tương tự

d) $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ và $\Delta BDF \sim \Delta EDC$

e) $\Delta AHB \sim \Delta AFD$ và suy ra các kết quả tương tự.

f) Điểm H cách đều 3 cạnh của ΔDEF

Bài 6: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

a) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Đường thẳng qua O , vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K . Chứng minh $\frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$

Bài 7: Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, $AB = 4$ cm, $AC = 8$ cm, Tính độ dài cạnh BC ?

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho ΔABC nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $BH \cdot BE = BD \cdot BC$.

b) Chứng minh: $CH \cdot CF = CD \cdot CB$.

c) Chứng minh: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

Bài 2: Cho tam giác ABC và d là đường thẳng tùy ý qua B . Qua E là điểm bất kì trên AC , vẽ đường thẳng song song với AB và BC , lần lượt cắt d tại M và N . Gọi D là giao điểm của ME và BC . Đường thẳng NE cắt AB và MC lần lượt tại F và K . Chứng minh:

a) $\Delta AFN \sim \Delta MDC$;

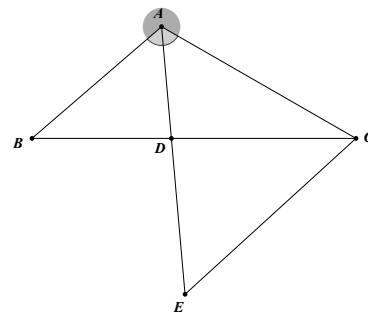
b) $AN \parallel MK$.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) Do $AB \parallel CE$ nên $\widehat{BAD} = \widehat{DEC}$. Chứng minh được $\Delta ABD \sim \Delta ECD$ (g.g)

b) Chứng minh được $\widehat{CAD} = \widehat{CED} (= \widehat{BAD})$ nên ΔACE cân tại C .

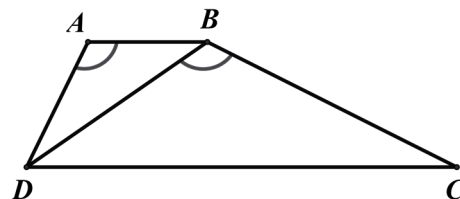


Bài 2: Xét ΔABD và ΔBDC :

$\widehat{A} = \widehat{CBD}$; $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ (so le trong)

$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BDC$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow CD = \frac{BD^2}{AB} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ cm}$$

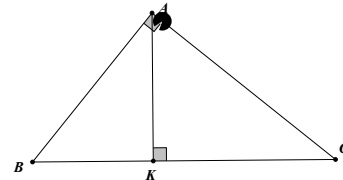


Bài 3: a) Chứng minh: $\triangle ABK \sim \triangle CBA$. Tính độ dài đoạn thẳng BC, AK.

$$\triangle ABK, CBA : \begin{cases} \widehat{ABK} = \widehat{CBA} (= 90^\circ - \widehat{BAK}) \\ \widehat{AKB} = \widehat{CAB} (= 90^\circ) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle CBA$$

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A: BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20 \text{ cm}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AK = \frac{BA \cdot AC}{BC} = 8,6 \text{ cm}$$



$$b) \triangle ABK, CAK : \begin{cases} \widehat{ABK} = \widehat{KAC} (= 90^\circ - \widehat{BAK}) \\ \widehat{AKB} = \widehat{CKA} (= 90^\circ) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle CAK$$

$$c) \begin{cases} \triangle ABK \sim \triangle CAK \\ \triangle ABK \sim \triangle CBA \end{cases} \Rightarrow \triangle CAK \sim \triangle CBA \text{ (cách khác g-g)}$$

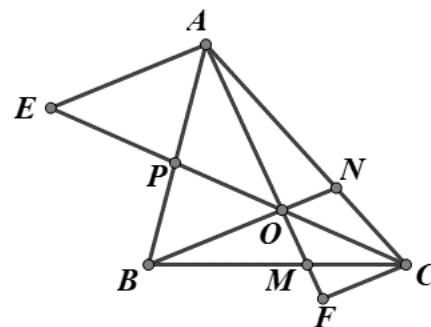
Bài 4:

$$a) \triangle FCM, OBM : \begin{cases} \widehat{FCM} = \widehat{OBM} (OB // CF) \\ \widehat{FMC} = \widehat{OMB} \end{cases} \Rightarrow \triangle FCM \sim \triangle OBM$$

$$\triangle PAE, PBO : \begin{cases} \widehat{PAE} = \widehat{PBO} (OB // AE) \\ \widehat{EPA} = \widehat{OPB} \end{cases} \Rightarrow \triangle PAE \sim \triangle PBO$$

$$b) \begin{cases} \triangle FCM \sim \triangle OBM \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{OB}{FC} \\ \triangle PAE \sim \triangle PBO \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AE}{BO} \end{cases} \Rightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{AE}{FC}$$

$$\begin{cases} \triangle AEC : ON // AE, \begin{cases} N \in AC \\ O \in EC \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{ON} = \frac{AC}{NC} \\ \triangle AFC : ON // CF, \begin{cases} O \in FA \\ O \in AC \end{cases} \Rightarrow \frac{ON}{FC} = \frac{AN}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{FC} = \frac{AN}{NC}$$



Từ các kết quả trên suy ra đpcm: $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{AE}{FC} \cdot \frac{FC}{AE} = 1$

Bài 5: a) Vì AD, BE, CF là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AD \perp BC; CF \perp AB; BE \perp AC$

$$\text{Xét } \triangle CFA \text{ và } \triangle BEA \text{ có: } \left. \begin{cases} \widehat{CFA} = \widehat{BEA} = 90^\circ \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases} \right\} \Rightarrow \triangle CFA \sim \triangle BEA (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{BE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC \cdot BE = CF \cdot AB \quad (1)$$

Xét $\triangle CFB$ và $\triangle ADB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{CFB} = \widehat{ADB} = 90^\circ \\ \widehat{B} \text{ chung} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle ADB (g - g)$$

$$\Rightarrow \widehat{FCB} = \widehat{DAB} \text{ và } \frac{CF}{AD} = \frac{CB}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot BC = CF \cdot AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AD \cdot BC = BE \cdot AC = CF \cdot AB$

b) Xét $\triangle CDH$ và $\triangle ADB$ có:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{CDH} = \widehat{ADB} = 90^\circ \\ \widehat{HCD} = \widehat{BAD} (cmt) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle CDH \sim \triangle ADB (g - g)$$

$$\frac{HD}{BD} = \frac{CD}{AD} = \frac{CH}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot HD = CD \cdot BD; AB \cdot HD = CH \cdot BD; CD \cdot AB = CH \cdot AD$$

$$c) \text{ Xét } \triangle AEH \text{ và } \triangle BDH \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \widehat{AEH} = \widehat{BDH} = 90^\circ \\ \widehat{AHE} = \widehat{BHD} (dd) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle BDH (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{EH}{DH}$$

$$\text{Xét } \triangle AHB \text{ và } \triangle EHD \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \frac{AH}{BH} = \frac{EH}{DH} (cmt) \\ \widehat{AHB} = \widehat{EHD} (dd) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle EDH (c - g - c)$$

Tương tự ta có: $\triangle AHC \sim \triangle FHD; \triangle BHC \sim \triangle FHE$

$$d) \text{ Vì } \triangle CFA \sim \triangle BEA \Rightarrow \frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Xét } \triangle AEF \text{ và } \triangle ABC \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AB} (cmt) \\ \widehat{A} \text{ (chung)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC (c - g - c)$$

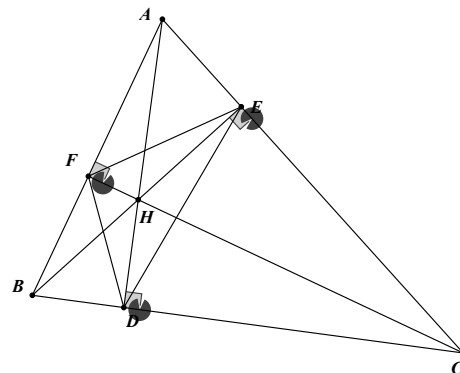
$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \left. \begin{array}{l} \triangle BDF \sim \triangle BAC \\ \triangle BAC \sim \triangle EDC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle EDC \text{ (t/c..)}$$

$$e) \text{ Vì } \triangle BDF \sim \triangle BAC \Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC} \Leftrightarrow \widehat{ADF} = \widehat{ABH} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BDF} = \widehat{BAC} \text{)}$$

$$\text{Xét } \triangle AHB \text{ và } \triangle AFD \text{ có: } \left. \begin{array}{l} \widehat{ABH} = \widehat{ADF} \\ \widehat{A} \text{ (chung)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle AFD (g - g)$$

Tương tự ta có: $\triangle AED \sim \triangle AHC$

f)



$$\left. \begin{array}{l} \Delta AHB'' \Delta AFD \rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{FDA} \\ \Delta AHB'' \Delta EHD \rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{EDH} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{FDA} = \widehat{EDH} \Rightarrow DH \text{ là tia phân giác } \widehat{FDE} \quad (3)$$

Lại có: $\widehat{FEB} = \widehat{FAD}$ (cùng phụ với $\widehat{AEF} = \widehat{FDB}$)

Mà: $\widehat{HAB} = \widehat{HED}$ (cmt)

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{HED} \Rightarrow EH$ là tia phân giác \widehat{FED} (4)

Từ (3) và (4) suy ra: H là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác FED hay H cách đều 3 cạnh của tam giác FED

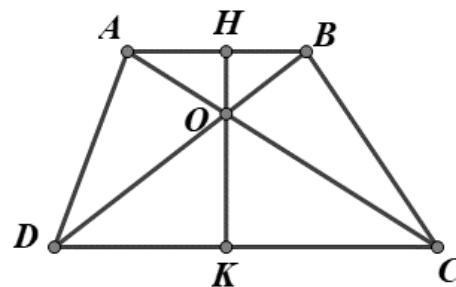
Bài 6:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \widehat{COD} \\ \widehat{OAB} = \widehat{OCD} (AB // CD) \end{array} \right. \Rightarrow \Delta OAB'' \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

đpcm

$$b) \left\{ \begin{array}{l} \widehat{AHO} = \widehat{CKO} (= 90^\circ) \\ \widehat{OAH} = \widehat{OCK} (AB // CD) \end{array} \right. \Rightarrow \Delta OAH'' \Delta OCK \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OK}$$

$$\text{Mà } \Delta OAB'' \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} \text{ nên } \frac{OH}{OK} = \frac{AB}{CD}$$



Bài 7:

Kẻ đường phân giác BD của tam giác ABC.

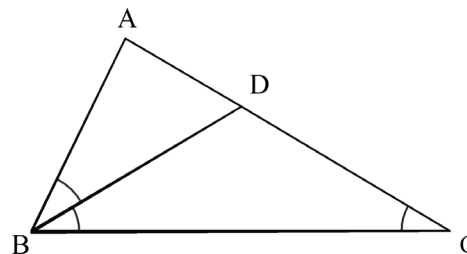
Xét ΔABC và ΔADB có \widehat{A} chung,

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABD} \left(= \frac{\widehat{ABC}}{2} \right) \text{ suy ra } \Delta ABC \sim \Delta ADB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{4^2}{8} = 2 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow CD = 6 \text{ (cm)}.$$

$$\Delta ABC \text{ có } BD \text{ là đường phân giác nên } \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot CD}{AD} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ (cm)}.$$



8. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

• **Áp dụng các trường hợp đồng dạng của tam giác vào tam giác vuông**

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu:

- Tam giác vuông này có **một góc nhọn** bằng **góc nhọn** của tam giác vuông kia.
- Tam giác vuông này có **hai cạnh góc vuông** tỉ lệ với **hai cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia.

• **Dấu hiệu đặc biệt nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng**

Nếu **cạnh huyền và một cạnh góc vuông** của tam giác vuông này tỉ lệ với **cạnh huyền và cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng.

• **Tỉ số hai đường cao, trung tuyến, phân giác của hai tam giác đồng dạng**

- Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.
- Tỉ số hai đường phân giác tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

• **Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng**

Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC có các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Chứng minh:

- a) $\triangle BEH \sim \triangle CDH$;
- b) $\triangle EHD \sim \triangle BHC$.

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ có đường cao AH, biết $AB = 30\text{cm}$, $BH = 18\text{cm}$; $AC = 40\text{cm}$

- a) Tính độ dài AH và chứng minh: $\triangle ABH \sim \triangle CAH$
- b) Chứng minh $\triangle ABH \sim \triangle CBA$

Bài 3: Cho tam giác ABC, có $\widehat{A} = 90^\circ + \widehat{B}$, đường cao CH. Chứng minh:

- a) $\widehat{CBA} = \widehat{ACH}$
- b) $CH^2 = BH \cdot AH$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D, EB cắt AD tại I. Trên EB lấy điểm M sao cho $DM = DA$.

- a) Chứng minh $\triangle EMC \sim \triangle ECB$
- b) Chứng minh $EB \cdot MC = 2a^2$.
- c) Tính diện tích tam giác EMC theo a.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = 5,4\text{cm}$, $AC = 7,2\text{cm}$.

a) Tính BC.

b) Từ trung điểm M của BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh $\triangle EMB \sim \triangle CAB$.

c) Tính EB và EM.

d) Chứng minh BH vuông góc với EC.

e) Chứng minh $HA.HC = HM.HE$.

Bài 6: Cho tứ giác ABCD, có $\widehat{DBC} = 90^\circ$, $AD = \sqrt{20}\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $DB = 6\text{cm}$, $DC = 9\text{cm}$.

a) Tính góc \widehat{BAD}

b) Chứng minh $\triangle BAD \sim \triangle DBC$

c) Chứng minh $DC \parallel AB$.

Bài 7: Cho hình bình hành ABCD ($AC > BD$) vẽ CE vuông góc với AB tại E, vẽ CF vuông góc với AD tại F. Chứng minh rằng $AB.AE + AD.AF = AC^2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình thang vuông ABCD ($AB \parallel DC$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Chứng minh $BD^2 = AB.DC$.

Bài 2: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E. Gọi G là một điểm trên cạnh BC. Tính diện tích tứ giác ADGE biết diện tích tam giác ABC bằng 16cm^2 , diện tích tam giác ADE bằng 9cm^2 .

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, $BC = 20\text{cm}$, $AH = 8\text{cm}$. Gọi D là hình chiếu của H trên AC, E là hình chiếu của H trên AB.

a) Chứng minh tam giác ADE đồng dạng với tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ADE.

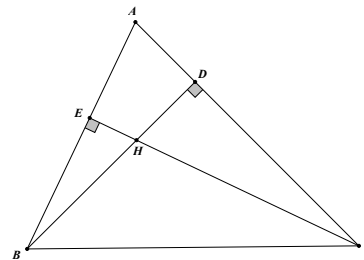
KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $\triangle BEH \sim \triangle CDH (g - g)$

b) Có $\triangle BEH \sim \triangle CDH$ ta suy ra $\frac{HE}{HD} = \frac{HB}{HC}$

Từ đó chứng minh được $\triangle EHD \sim \triangle BHC (c.g \cdot c)$



Bài 2:

a) Vì $AH \perp BC \Rightarrow \triangle AHB$ vuông tại H , theo định lý Pitago ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = 30^2 - 18^2 = 900 - 324 = 576 \Leftrightarrow AH = 24cm$$

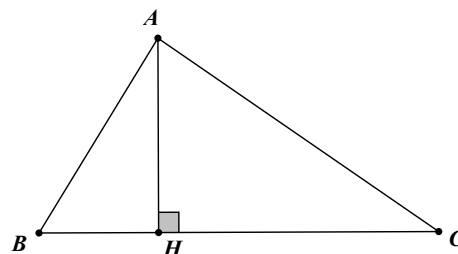
Vì $AH \perp BC \rightarrow \triangle AHC$ vuông tại H , theo định lý Pitago ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow HC^2 = AC^2 - AH^2$$

$$\Leftrightarrow HC^2 = 40^2 - 24^2 = 1600 - 576 = 1024 \Leftrightarrow HC = 32cm$$

Ta lại có:
$$\left. \begin{array}{l} \frac{AH}{BH} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \\ \frac{HC}{AH} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH}$$



Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$ có:
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90^\circ \\ \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} (cmt) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAH}$$

b) Ta có: $\widehat{HBA} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAH} + \widehat{HAB} = 90^\circ$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CBA$ có:
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^\circ \\ \widehat{B} \text{ (chung)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CAB (g - g) (\text{đpcm})$$

Bài 3:

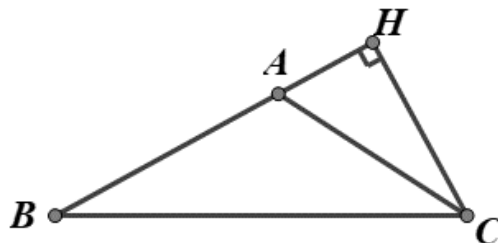
a) $\widehat{CBA} = \widehat{ACH}$

$$\widehat{ACH} = 90^\circ - \widehat{CAH} = 90^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 90^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{CBA}$$

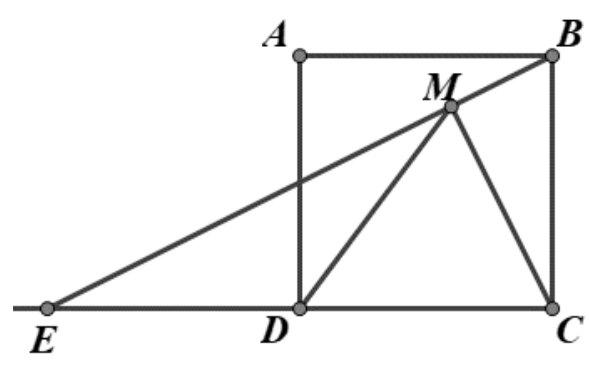
b) $CH^2 = BH \cdot AH$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{ACH} = \widehat{CBH} \\ \widehat{CHA} = \widehat{BHC} = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \triangle HCA \sim \triangle HBC$$

$$\Rightarrow \frac{HC}{HB} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HC^2 = HA \cdot HB$$



Bài 4:



a) Chứng minh $\triangle EMC \sim \triangle ECB$

Tam giác EMC có trung tuyến $MD = DA = \frac{1}{2} EC$ nên là tam giác vuông tại M.

$$\begin{cases} \widehat{MEC} = \widehat{CEB} \\ \widehat{EMC} = \widehat{ECB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ECB \sim \triangle EMC$$

b) Chứng minh $EB \cdot MC = 2a^2$.

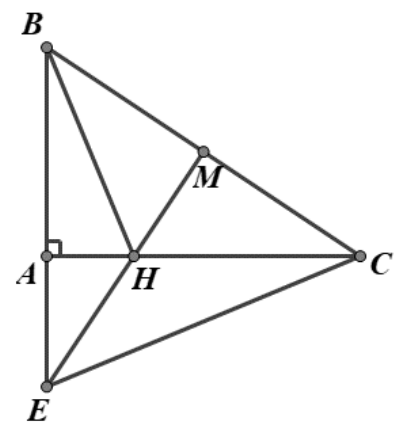
$$\triangle ECB \sim \triangle EMC \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BC}{MC} \Rightarrow EB \cdot MC = EC \cdot BC = 2a^2$$

c) Tính diện tích tam giác EMC theo a.

$$\triangle ECB \sim \triangle EMC \Rightarrow \frac{S_{EMC}}{S_{ECB}} = \left(\frac{EC}{EB}\right)^2 = \frac{EC^2}{EC^2 + CB^2} = \frac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \frac{4}{5}$$

$$S_{EBC} = \frac{1}{2} EC \cdot BC = a^2 \Rightarrow S_{EMC} = \frac{4}{5} a^2$$

Bài 5:



a) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 9cm$ (Pitago)

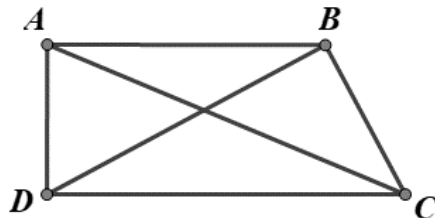
b) $\widehat{EMB} = \widehat{CAB} (= 90^\circ), \widehat{EBM} = \widehat{CBA}$ (góc chung) $\Rightarrow \triangle EMB \sim \triangle CAB$ (g.g)

$$c) \Delta EMB \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{ME}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{MB}{AB} = \frac{9:2}{5,4} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} ME = \frac{5}{6} AC = 6cm \\ BE = \frac{5}{6} BC = 7,5cm \end{cases}$$

d) ΔBEC có 2 đường cao CA, EM cắt nhau tại H nên H là trực tâm ΔBEC , $BH \perp EC$

e) Chứng minh $\Delta AHE \sim \Delta MHC$ từ đó suy ra $HA.HC = HM.HE$.

Bài 6:



a) Ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2$, suy ra tam giác ABD vuông tại A (Pitago đảo)

b) Ta có $BC = \sqrt{CD^2 - BD^2} = 3\sqrt{5}$ (Pitago)

$$\widehat{BAD} = \widehat{CBD} = 90^\circ, \frac{AB}{BD} = \frac{AD}{BC} \left(\frac{4}{6} = \frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{5}} \right) \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BDC (c.g.c)$$

c) $\Delta ABD \sim \Delta BDC \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BDC} \Rightarrow AB \parallel CD$

Bài 7: Vẽ $BH \perp AC$ ($H \in AC$)

Xét ΔABH và ΔACE có $\widehat{AHB} = \widehat{AEC} = 90^\circ$; \widehat{BAC} chung.

Suy ra $\Delta ABH \sim \Delta ACE$ (g.g)

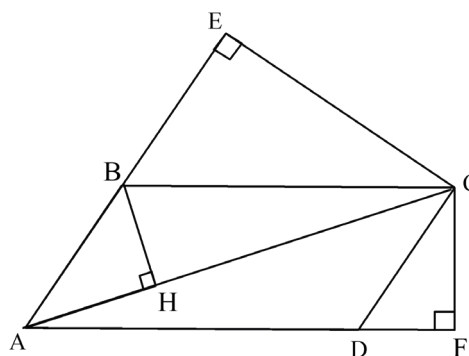
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AE} \Rightarrow AB.AE = AC.AH \quad (1)$$

Xét ΔCBH và ΔCFA có $\widehat{BCH} = \widehat{CAF}$ (so le trong)
 $\widehat{CHB} = \widehat{CFA} (= 90^\circ)$

$$\text{Suy ra } \Delta CBH \sim \Delta ACF (g.g) \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{CH}{AF} \Rightarrow BC.AF = AC.CH \quad (2)$$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$AB.AE + BC.AF = AC.AH + AC.CH \Rightarrow AB.AE + AD.AF = AC(AH + CH) = AC^2.$$



9. ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$. Các điểm D, E lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho: $AD = 3\text{cm}$, $AE = 4\text{cm}$.

a) Chứng minh rằng: $DE \parallel BC$.

b) M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 2,5MC$. Gọi N là giao điểm của AM và DE .

Chứng minh rằng $DN = 2,5NE$.

Bài 2: Cho hình thang $ABCD$ có $(AB \parallel DC)$. E là giao điểm của AD và BC , F là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua trung điểm của AB và qua trung điểm của DC .

Bài 3: Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). O là giao điểm của AC và DB . Đường thẳng qua O song song với AB cắt AD ở M . Chứng minh rằng

a) $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ b) $\frac{1}{OM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$.

Bài 4: Cho tam giác ABC có đường trung tuyến BM cắt đường phân giác Cd ở N .

Chứng minh rằng $\frac{NC}{ND} - \frac{AC}{AB} = 1$.

Tự luyện

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao BE và CF . Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ E đến AB , Q là chân đường vuông góc kẻ từ F đến AC . Chứng minh PQ song song với BC .

Bài 6: Cho tam giác ABC vuông tại A , $Ab = 1\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$.

a) Tính độ dài BD .

b) Chứng minh $\triangle BDE \sim \triangle CDB$.

c) Tính $\widehat{DEB} + \widehat{DCB}$.

Bài 7: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$) có hai đường chéo vuông góc với nhau tại O , $AB = 4\text{cm}$, $CD = 9\text{cm}$.

a) Chứng minh $\triangle AOB \sim \triangle DAB$.

b) Tính độ dài AD .

c) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

d) Tính tỉ số $\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a) Ta có : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (vì $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$) (1)

Xét $\triangle ABC$ có $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE // BC$ (định lý Ta- lét đảo)

b) Xét $\triangle AMC$ có $NE // MC (DE // BC)$

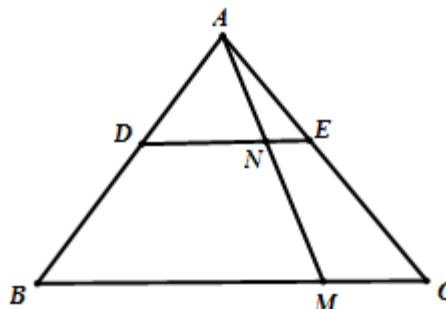
nên $\frac{NE}{MC} = \frac{AE}{AC}$. (2)

Xét $\triangle ABM$ có $DN // BM (DE // BC)$

Nên $\frac{DN}{BM} = \frac{AD}{AB}$. (3)

Từ (1) và (2) và (3) có : $\frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$.

Mà $BM = 2,5MC$ (gt), nên $DN = 2,5NE$.



Bài 2: Qua F vẽ đường thẳng song song với DC và cắt AD tại I, cắt BC tại K, vì $IK // DC, AB // DC$ (gt) nên $IK // AB$. $\triangle FAB$ có $AB // DC$

Nên : $\frac{AF}{CF} = \frac{BF}{DF}$ (hệ quả của định lý Ta - lét)

$\Rightarrow \frac{AF}{AF + CF} = \frac{BF}{BF + DF}$ hay $\frac{AF}{AC} = \frac{BF}{DB}$.

$\triangle ADC$ có $IF // DC$, nên $\frac{IF}{DC} = \frac{AF}{AC}$

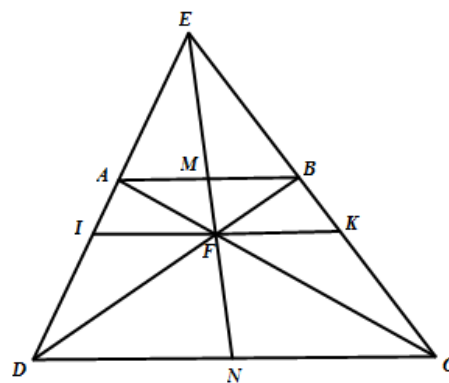
(hệ quả của định lý Ta- lét)

$\triangle BDC$ có $FK // DC$, nên $\frac{FK}{DC} = \frac{BF}{DB}$ (hệ quả của định lý Ta- lét)

Suy ra : $IF = FK$.

$\triangle EDN$ có $IF // DN$, nên $\frac{IF}{DN} = \frac{EF}{EN}$ (hệ quả của định lý Ta- lét)

$\triangle ECN$ có $FK // NC$, nên $\frac{FK}{NC} = \frac{EF}{EN}$ (hệ quả của định lý Ta- lét).



Do đó : $\frac{IF}{DN} = \frac{FK}{NC}$, mà $IF = FK \Rightarrow DN = NC$.

Bài 3: a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OCD$ có

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{OBA} = \widehat{ODC} \text{ (so le trong và } AB // CD).$$

Do đó $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (g.g)

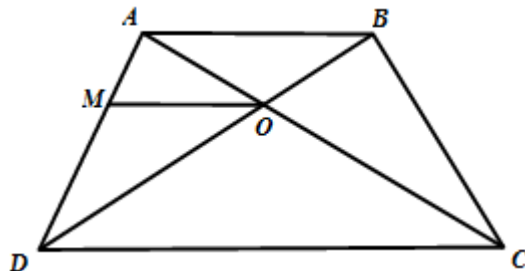
b) Ta có $OM // AB$ (gt), $AB // CD$ (gt) $\Rightarrow OM // CD$.

Xét $\triangle ABD$ có $OM // AB \Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$ (hệ quả của định lí Ta - lét)

Xét $\triangle ACD$ có $OM // CD \Rightarrow \frac{OM}{CD} = \frac{AM}{AD}$ (hệ quả của định lí Ta - lét)

$$\text{Do đó } \frac{OM}{AB} + \frac{OM}{CD} = \frac{DM}{AD} + \frac{AM}{AD} \Rightarrow OM \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$



Bài 4: Qua D vẽ đường thẳng song song với BM cắt AC ở E.

Xét $\triangle CDE$ có $MN // DE \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{MC}{EM}$.

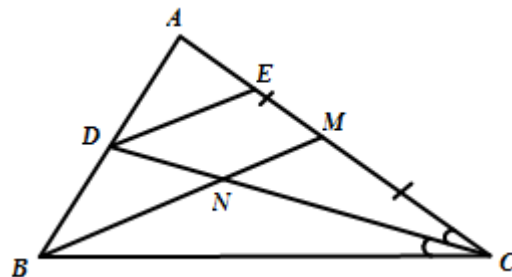
Xét $\triangle ABM$ có $DE // BM \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EM}$.

Xét $\triangle ABC$ có CD là đường phân giác $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

Mà $AM = MC$ (M là trung điểm của AC)

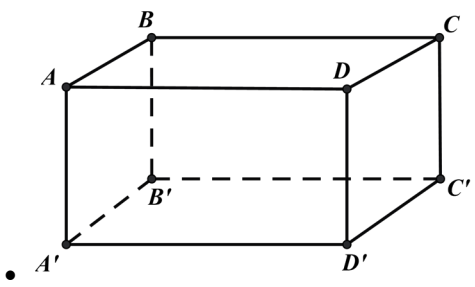
$$\text{Do đó } \frac{NC}{ND} - \frac{AD}{BD} = \frac{MC}{EM} - \frac{AE}{EM} = \frac{MC - AE}{EM} = \frac{AM - AE}{EM} = 1$$

$$\text{Hay } \frac{NC}{ND} - \frac{AC}{BC} = 1.$$

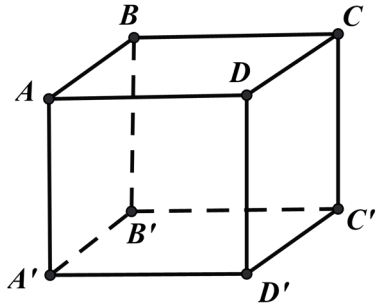


1. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN



Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$



Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

H.1

Ở H.1, ta có hình $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật có:

- 6 mặt $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ADD'A'$, $BCC'A'$, $ABB'A'$, $DCC'D'$ là những hình chữ nhật.
- 12 cạnh và 8 đỉnh là: $A, B, C, D, A', B', C', D'$.
- Hai mặt của hình hộp chữ nhật không có cạnh chung gọi là hai mặt đối diện và có thể xem chúng là hai mặt đáy của hình hộp chữ nhật, khi đó các mặt còn lại được xem là các mặt bên.
- Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là những hình vuông gọi là hình lập phương.

Các công thức tính diện tích

Xét hình hộp chữ nhật có chiều cao h , đáy có chiều dài là a , và chiều rộng là b .

a) Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng chu vi đáy nhân chiều cao:

$$S_{xq} = 2(a + b)h.$$

b) Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật bằng diện tích xung quanh cộng diện tích hai đáy:

$$S_{tp} = 2(a + b)h + 2ab.$$

c) Thể tích của hình hộp chữ nhật bằng diện tích đáy nhân chiều cao:

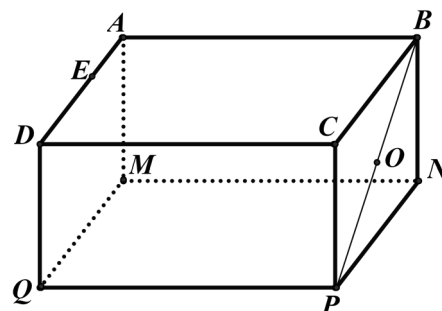
$$V = abh$$

trong đó a, b, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao của hình hộp chữ nhật.

Hệ quả: Với hình lập phương thì $V = a^3$ trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

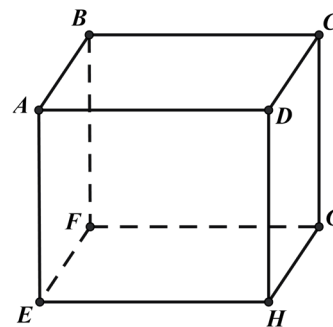
II. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.MNPQ$ (hình vẽ)



- Kể tên những cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật.
- Kể tên ba đường thẳng nào cắt nhau tại điểm A ?
- Nếu O là trung điểm của đoạn thẳng BP thì O có là điểm thuộc đoạn thẳng NC không?
- Nếu E là điểm thuộc cạnh AD thì E có thể là điểm thuộc cạnh BN không?
- Kể tên các đường thẳng song song với:
 - AM
 - AD
 - PQ
- Kể tên các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(MNPQ)$.
- Đường thẳng BC song song với những mặt phẳng nào?
- Đường thẳng DP song song với những mặt phẳng nào? Tại sao?
- Hai mặt phẳng nào cắt nhau theo đường thẳng AM ?
- Mặt phẳng $(ABNM)$ và mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt nhau theo đường thẳng nào?
- Các cặp mặt phẳng nào song song với nhau?
- Mặt phẳng (BMP) song song với mặt phẳng nào? Tại sao?
- Đường thẳng AM vuông góc với những mặt phẳng nào?
- Hai mặt phẳng $(ABNM)$ và $(ADQM)$ có vuông góc với nhau không? Tại sao?
- Cho biết $AB = 6\text{ cm}$, $BN = 4\text{ cm}$, $MQ = 5\text{ cm}$. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình hộp chữ nhật và độ dài CM .

Bài 2: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ (hình vẽ)



- Đường thẳng AB và đường thẳng HG có song song với nhau không?
- Đường thẳng BH và đường thẳng AG có cắt nhau không?
- Đường thẳng AG và đường thẳng CE có cắt nhau không?
- Đường thẳng CE và đường thẳng DF có cắt nhau không?
- Đường thẳng DF và đường thẳng BH có cắt nhau không?
- Đường thẳng BH và đường thẳng AE có cắt nhau không?
- Đường thẳng CH có song song với mặt phẳng (ABE) không?
- Đường thẳng BF có vuông góc với mặt phẳng (EGH) không?

i) Đường thẳng BC có vuông góc với đường thẳng AF không?

j) Mặt phẳng $(ABCD)$ có vuông góc với mặt phẳng (DHG) không?

k) Cho biết cạnh của hình lập phương bằng $\sqrt{5}cm$. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình lập phương và độ dài đoạn BH

Bài 3: Tính các kích thước của hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỉ lệ với 3, 4, 5 và thể tích của hình hộp này là $480cm^3$

Bài 4: Diện tích toàn phần của một hình lập phương là $486cm^3$. Thể tích của nó là bao nhiêu?

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA' , DD' , BB' , CC' lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = DF = \frac{2}{3}DD'$; $BG = CH = \frac{1}{3}CC'$. Chứng minh rằng $mp(ADHG) // mp(EFC'B')$.

Bài 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích của hình chữ nhật $ADC'B'$ biết: $AB = 12$, $AC' = 29$, $DD' = 16$.

Bài 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$

b) Trong số sáu mặt của hình hộp chữ nhật, có bao nhiêu cặp mặt phẳng vuông góc với nhau?

Bài 8: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Diện tích các mặt $ABCD$, $BCC'B'$ và $DCC'D'$ lần lượt là $108cm^2$, $72cm^2$ và $96cm^2$.

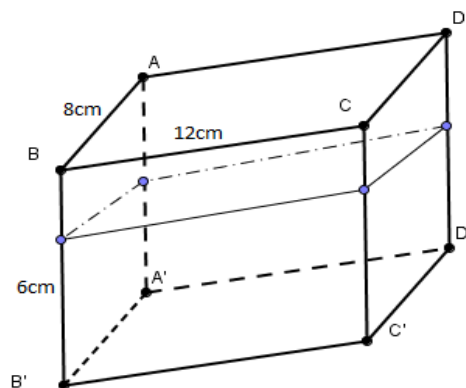
a) Tính thể tích của hình hộp.

b) Tính độ dài đường chéo của hình hộp.

Bài 9: Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đập bình lại rồi

đựng đứng lên (lấy mặt $(ADD'A')$ làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?

Bài 10: Một bình đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật có chiều rộng bằng 4cm, chiều dài bằng 8cm, chiều cao bằng 5cm. Mực nước hiện tại bằng $\frac{3}{4}$



chiều cao của bình. Nếu ta đổ nước trong bình vào một bình khác hình lập phương có cạnh bằng 5cm thì chiều cao mực nước là bao nhiêu?

Bài 11: Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 60cm^3 và diện tích toàn phần bằng 94cm^2 .

Tính chiều rộng, chiều dài của hình hộp chữ nhật biết chiều cao bằng 4cm.

Tự luyện

Bài 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Những cạnh nào song song với DD' ?
- b) Những cạnh nào song song với BC ?
- c) Những cạnh nào song song với CD ?
- d) Những mặt nào song song với $mp(BCC'B')$

Bài 2: Một căn phòng dài 5m, rộng 3,2m và cao 3m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và bốn bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $6,3\text{m}^2$. Hãy tính diện tích cần quét vôi?

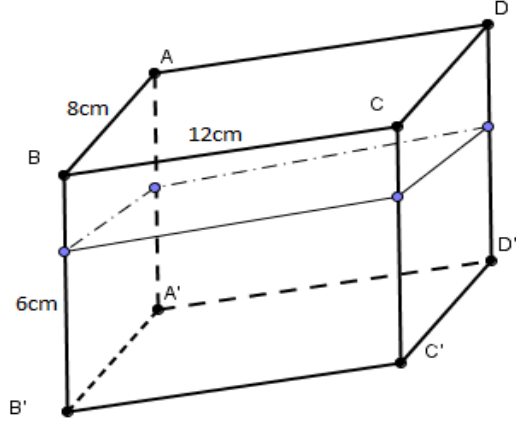
Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$; $AA' = 5\text{cm}$. Tính AC'

Bài 4: Tìm độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết $BD' = \sqrt{3}\text{cm}$

Bài 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

- a) Hai đường thẳng AC' và BD' có cắt nhau không?
- b) Đường thẳng BD có cắt các đường thẳng AA' , $A'C'$, CC' hay không?
- c) Tìm một điểm cách đều các đỉnh của hình hộp chữ nhật

Bài 6: Một bể đựng nước có dạng hình hộp chữ nhật (xem hình vẽ). Mực nước hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình. Nếu ta đặt bình lại rồi dựng đứng lên (lấy mặt $(AA'B'B)$ làm đáy) thì chiều cao của mực nước là bao nhiêu?



Bài 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- Chứng minh rằng $mp(ACD') \parallel mp(A'C'B)$.
- Chứng minh rằng $mp(CDB')$ và $mp(BCD')$ cắt nhau. Tìm giao tuyến của chúng.

Bài 8: Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Chứng minh rằng $mp(DD'B')$ vuông góc với $mp(ACC'A')$.

Bài 9: Một hình hộp chữ nhật có các kích thước bằng 8, 9, 12. Tính độ dài lớn nhất của một đoạn thẳng có thể đặt trong hình hộp chữ nhật đó.

Bài 10: Một hình hộp chữ nhật có tổng ba kích thước bằng 61cm và đường chéo bằng 37cm. Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật đó.

Bài 11: Đường chéo của một hình lập phương dài hơn đường chéo mỗi mặt của nó là 1cm. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lập phương đó.

Bài 12: Một hồ cá cảnh mini có dạng hình hộp chữ nhật với chiều cao 5 dm, chiều rộng 3 dm và chiều dài 4 dm. Người ta đổ vào hồ cá 50 dm³ nước.

- Hỏi chiều cao của khối nước trong bể là bao nhiêu dm?
- Tính thể tích phần hồ cá không chứa nước.

Bài 13: Một chiếc hộp dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 8 cm, chiều rộng 6 cm và chiều dài 24cm. Người ta định đặt một cái que dài 27 cm vào trong hộp.

- Hỏi toàn bộ cái que có ở trong hộp không? Vì sao?
- Giữ nguyên chiều cao và chiều rộng của hộp. Nếu muốn đặt cái que lọt đúng theo một cạnh của đáy hộp thì phải tăng chiều dài hộp ít nhất bao nhiêu cm? (Biết số đo các chiều là số nguyên). Tính diện tích toàn phần của hộp khi đó.

Bài 14: Một hình lập phương có cạnh bằng 1. Người ta tăng độ dài của mỗi cạnh của nó thêm 20%.

- Diện tích toàn phần của nó tăng bao nhiêu phần trăm?
- Thể tích của nó tăng bao nhiêu phần trăm?

Bài 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD và $B'D'$

- Nêu vị trí tương đối của các cặp đường thẳng MN và BD; MN và CC' ; AC và $A'D'$.
- Chứng minh $MN \perp (A'B'C'D')$
- Biết $AA' = 20 \text{ cm}$, $AB = 30 \text{ cm}$, $AD = 40 \text{ cm}$. Tính $B'D'$; $B'M$.
- Tính thể tích hình hộp.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: HD:

a) Các cạnh bằng nhau của hình hộp chữ nhật là :

$$AB = DC = QP = MN; AM = BN = CP = DQ; AD = BC = NP = MQ$$

b) Ba đường thẳng cắt nhau tại điểm A là AD, AM, AB .

c) O là điểm thuộc đoạn thẳng NC .

Do tính chất của hình bình hành $BCPN$.

d) E là điểm thuộc cạnh AD thì E không thuộc cạnh BN vì hai đường AD, BN chéo nhau.

e) • Các đường thẳng song song với AM là BN, CP, DQ .

• Các đường thẳng song song với AD là BC, NP, MQ .

• Các đường thẳng song song với PQ là AB, CD, MN .

f) Các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(MNPQ)$ là mặt phẳng $(ABCD)$.

g) Đường thẳng BC song song với các mặt phẳng: $mp(NPQM), mp(ADPN), mp(ADQM)$.

h) Đường thẳng DP song song với $mp(ABNM)$ vì $\begin{cases} DP \parallel AN \\ DP \not\subset mp(ABNM) \\ AN \subset mp(ABNM) \end{cases}$

i) Hai mặt phẳng cắt nhau theo đường thẳng AM là $mp(ABNM), mp(ADQM)$.

j) Mặt phẳng $(ABNM)$ và mặt phẳng $(MNPQ)$ cắt nhau theo đường thẳng MN .

k) Các mặt phẳng song song với nhau là : $mp(ADQM)$ và $mp(DCPN)$; $mp(ABNM)$ và $mp(DCPQ)$; $mp(ABCD)$ và $mp(MNPQ)$.

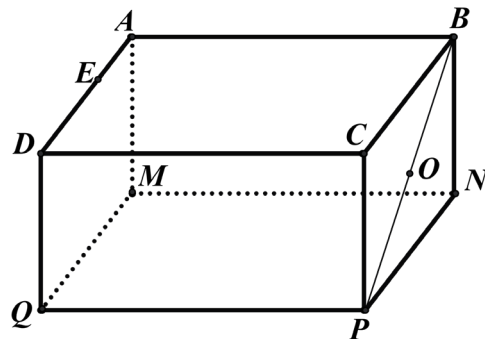
l) Mặt phẳng (BMP) song song với mặt phẳng (AQC) vì

$$\begin{cases} BM, BP \subset mp(BMP) \text{ và } BM \cap BP \\ AQ, QC \subset mp(AQC) \text{ và } AQ \cap QC \\ BM \parallel CQ, BP \parallel AQ \end{cases}$$

m) Đường thẳng AM vuông góc với hai mặt phẳng: $mp(ABCD); mp(MNPQ)$.

n) Hai mặt phẳng $mp(ABNM)$ và $mp(ADQM)$ có vuông góc với nhau vì

$$\begin{cases} AB \subset mp(ABNM) \\ AB \perp mp(ADQM) \end{cases}$$

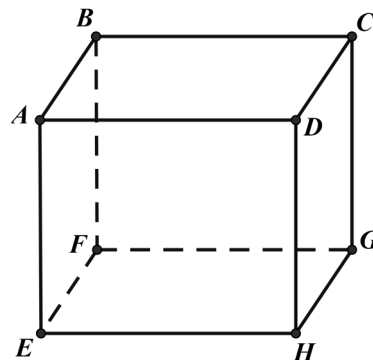


o) Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_p = 2(ab + bc + ca) = 2(6.5 + 5.4 + 4.6) = 148 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật là $AB.BN.MQ = 6.4.5 = 120 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$\text{Độ dài } CM = \sqrt{AB^2 + BN^2 + CP^2} = \sqrt{6^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{77} \text{ (cm)}$$



Bài 2: HD

a) Xét mp(ABCD) có $AB \parallel CD$

Xét mp(CDHG) có $CD \parallel HG$

$$\Rightarrow AB \parallel HG$$

b) Xét mp(ABGH) có BH, AG là hai đường chéo $\Rightarrow BH \cap AG$

c) AG và CE có cắt nhau vì nằm trong $(ACGE)$

d) CE và DF có cắt nhau vì cùng nằm trên mặt phẳng $(CDEF)$

e) DF và BH có cắt nhau vì cùng nằm trên $(BDHF)$

f) BH và AE không đồng phẳng vì không cùng nằm trên một mặt phẳng. (không cắt nhau)

g) Ta có $BCHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BE \\ BE \subset (ABE) \end{cases} \Rightarrow CH \parallel (ABE)$

h) $\begin{cases} BF \perp (EFGH) \\ (EGH) \subset (EFGH) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (EGH)$

i) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (ABFE) \\ AF \subset (ABFE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AF$

j) $\begin{cases} BC \perp CG \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (CDHG) \Rightarrow (BCDA) \perp (CDHG) \Rightarrow (BCDA) \perp (DHG)$

k) $S_p = 6.(\sqrt{5})^2 = 30 \text{ (cm}^2\text{)}$

$$V = \sqrt{5}.\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Xét $\triangle EFH$ có $EF \perp EH$

$$FH = \sqrt{EF^2 + EH^2} = \sqrt{5+5} = \sqrt{10} \text{ (cm)}$$

Xét $\triangle BFH$ có $BF \perp FH$ suy ra $BH = \sqrt{BF^2 + FH^2} = \sqrt{5+10} = \sqrt{15} \text{ (cm)}$

Bài 3: Gọi các kích thước của hình hộp là a, b, c

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ và $V = abc = 480\text{cm}^3$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có $k^3 = \frac{abc}{3.4.5} = \frac{480}{60} = 8 \Rightarrow k = 2$

Vậy các kích thước của hình hộp là $a = 6\text{cm}, b = 8\text{cm}, c = 10\text{cm}$.

Bài 4: Hình lập phương có 6 mặt là các hình vuông bằng nhau. Vậy diện tích một mặt hình vuông là $486 : 6 = 81\text{cm}^2$. Một cạnh hình lập phương dài bằng $a = 9\text{cm}$. Thể tích hình lập phương là $V = 9.9.9 = 729\text{cm}^3$

Bài 5: HD:

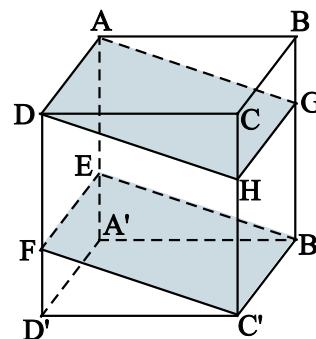
Tứ giác $BCHG$ có $BG = CH$; $BG // CH$ nên là hình bình hành, suy ra $HG // BC$.

Mặt khác $BC // B'C'$ nên $HG // B'C'$. Tứ giác $DHC'F$ có $DF // HC'$ và $DF = HC'$ nên là hình bình hành, suy ra $DH = FC'$.

Xét $mp(ADHG)$ có HG và DH cắt nhau tại H .

Xét $mp(EFC'B')$ có $B'C'$ và FC' cắt nhau tại C' .

Từ đó suy ra $mp(ADHG) // mp(EFC'B')$.



Bài 6:

a) Tứ giác $ADD'A'$ là hình chữ nhật, suy ra $AD // A'D'$ và $AD = A'D'$.

Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, suy ra $B'C' // A'D'$ và $B'C' = A'D'$.

Do đó $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$.

Vậy tứ giác $ADC'B'$ là hình bình hành.

Ta có $AD \perp DD'$ và $AD \perp DC$ nên $AD \perp mp(DCCD')$

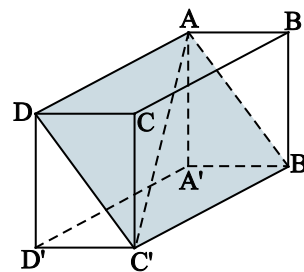
Suy ra $AD \perp DC'$

Do đó hình bình hành $ADC'B'$ là hình chữ nhật.

b) Xét $\triangle DD'C'$ vuông tại D có $DC' = \sqrt{DD'^2 + D'C'^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Xét $\triangle ADC'$ vuông tại D có $AD = \sqrt{AC'^2 - DC'^2} = \sqrt{29^2 - 20^2} = 21$.

Vậy diện tích hình chữ nhật $ADC'B'$ là: $S = DC'.AD = 20.21 = 420$ (đvdt).



Bài 7: a) Vì $DD'C'C$ là hình chữ nhật nên $DC' \perp CC$

Vì $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $D'C' \perp B'C'$

Vậy $D'C'$ vuông góc với hai đường giao nhau của $mp(CBB'C')$

do đó $D'C' \perp mp(CBB'C')$

Mặt khác, $D'C' \subset mp(DCC'D')$ nên $mp(DCC'D') \perp mp(CBB'C')$

b) Chứng minh tương tự như câu a), ta được các cặp mặt có chung một cạnh thì vuông góc với nhau. Hình hộp chữ nhật có 12 cạnh nên có 12 cặp mặt vuông góc với nhau.

Bài 8: a) Gọi độ dài các cạnh AB, BC, CC' lần lượt là a, b, c .

Ta có: $ab = 108$ (1); $bc = 72$ (2); $ca = 96$. (3)

Suy ra $ab \cdot bc \cdot ca = 108 \cdot 72 \cdot 96$ hay $(abc)^2 = 746496$.

Do đó $abc = \sqrt{746496} = 864(cm^3)$.

Vậy thể tích của hình hộp là $V = 864 (cm^3)$.

Từ (4) và (1) ta có $c = \frac{abc}{ab} = \frac{864}{108} = 8(cm)$.

Từ (4) và (2) ta có $a = \frac{abc}{bc} = \frac{864}{72} = 12(cm)$.

Từ (4) và (3) ta có $b = \frac{abc}{ac} = \frac{864}{96} = 9(cm)$.

Vậy đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài là:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = 17(cm)$$

Bài 9: Thể tích hình hộp chữ nhật là $V = 6 \cdot 8 \cdot 12 = 576cm^3$

Thể tích nước chứa trong hình hộp là

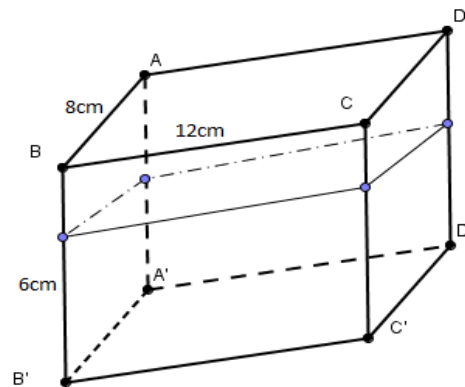
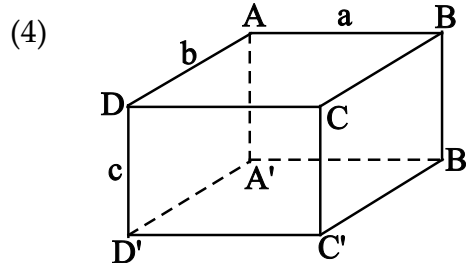
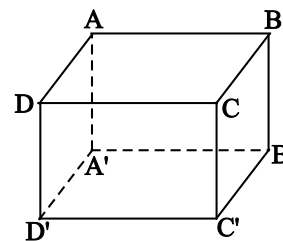
$$V_1 = 8 \cdot 12 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right) = 384cm^3$$

Nếu chọn $(ADD'A')$ làm đáy . Gọi h là chiều cao mực nước mới, ta có thể tích

$$V_1 = 12 \cdot 6 \cdot h \Rightarrow 384 = 72h \Rightarrow h = 5,3cm$$

Vậy chiều cao mực nước mới là $5,3$ cm

Bài 10: Thể tích nước có trong hình hộp là $V = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 = 120cm^3$



Gọi h là chiều cao của mực nước mới ở bình hình lập phương có cạnh là 5cm, ta có

$$h = \frac{V}{S} = \frac{120}{25} = 4,8\text{cm}$$

Bài 11: Gọi hai kích thước của hình hộp lần lượt là a, b

$$\text{Ta có } V = 4ab = 60\text{cm}^3 \Rightarrow ab = 15 \quad (1)$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2ph + 2ab$$

$$S_{tp} = 2(a + b) \cdot 4 + 2ab = 94$$

Hay $a + b = 8 \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $a = 5; b = 3$ hoặc $a = 3; b = 5$

Vậy hai kích thước của hình hộp chữ nhật là 3 cm và 5 cm

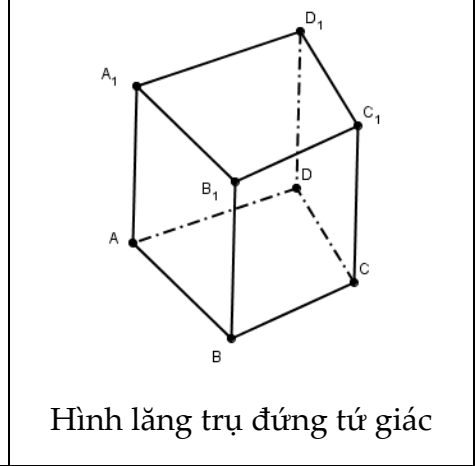
2. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

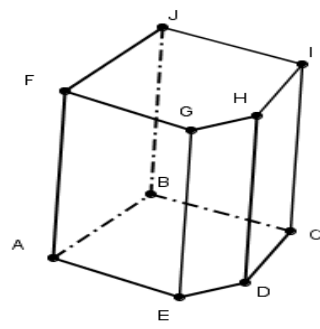
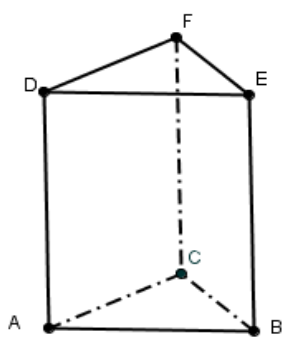
1) Hình lăng trụ đứng

Hình bên là hình lăng trụ đứng. Trong hình này:

- $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ là các đỉnh.
- Các mặt $ABB_1A_1; BCC_1B_1; \dots$ là các hình chữ nhật. Chúng được gọi là các mặt bên.
- Hai mặt $ABCD; A_1B_1C_1D_1$ là hai đáy.
- Hình lăng trụ đứng trên có hai đáy là tứ giác nên gọi là lăng trụ đứng tứ giác, kí hiệu $ABCD \cdot A_1B_1C_1D_1$



- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương cũng là những hình lăng trụ đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.
- Lăng trụ đứng có hai đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì hình lăng trụ đứng tương ứng được gọi là lăng trụ đứng tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác. (hình 1)



(hình 1)

2) Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng

- Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích các mặt bên. Ta có công thức $S_{xq} = 2ph$ (p là nửa chu vi đáy, h là chiều cao).
- Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy}$

3) Thể tích của hình lăng trụ đứng

- Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao
- Công thức $V = S.h$ (S là diện tích đáy, h là chiều cao)

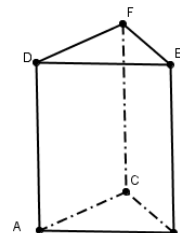
III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$.

- Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau?
- Những cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau?

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.DEF$. Trong các phát biểu sau phát biểu nào đúng ?

- Các cạnh bên AB và AD vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên BE và EF vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên AC và DF vuông góc với nhau.
- Các cạnh bên AC và DF song song với nhau.
- Hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) song song với nhau.
- Hai mặt phẳng $(ACFD)$ và $(BCFE)$ song song với nhau.
- Hai mặt phẳng $(ABED)$ và (DEF) vuông góc với nhau.



Bài 3: Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

- Những cặp mặt phẳng nào song song với nhau.
- Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với những mặt phẳng nào.

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là hai tam giác vuông tại A, A' . Chứng minh

- $AB \perp mp(AA'C'C)$
- $mp(AA'C'C) \perp mp(AA'B'B)$

Bài 5: Một khối gỗ hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có cạnh bằng a . Người ta cắt khối gỗ theo mặt $(ACC'A')$ được hai hình lăng trụ đứng bằng nhau. Tính diện tích xung quanh của mỗi hình lăng trụ đó.

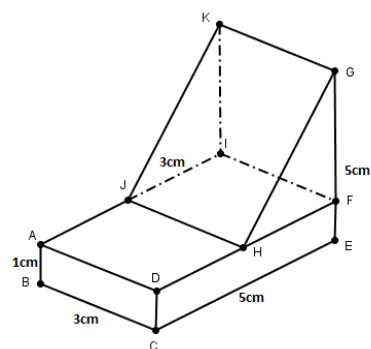
Bài 6: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác ABC cân tại C , D là trung điểm của cạnh AB . Tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Bài 7: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ hợp với đáy ABC một góc 60° . Tính thể tích lăng trụ.

Bài 8: Cho hình lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a . Tính chiều cao (theo a) của hình lăng trụ, biết diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Bài 9: Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) và thể tích của hình sau

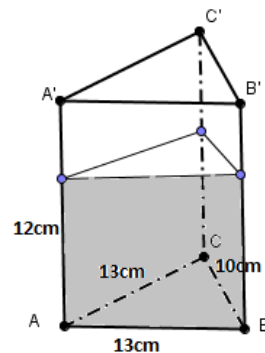
* Tính diện tích toàn phần hình lăng trụ $HFG.JIK$



Bài 10: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có các kích thước như hình vẽ. Tính thể tích của hình lăng trụ.

Bài 11: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác cân ABC có kích thước như

hình vẽ. Mực nước hiện tại trong bình bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của lăng trụ. Bây giờ ta đập bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.



Bài 12: Tính thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là các hình vuông cạnh bằng a.

Bài 13: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$

a) Chứng minh $AMNA'$ là hình chữ nhật

b) Tính diện tích hình chữ nhật $AMNA'$ biết thể tích của hình lăng trụ bằng V và $BC = a$.

Bài 14: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$, $AC = 8cm$, chiều cao $CC' = 12cm$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đập bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(ACC'A')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

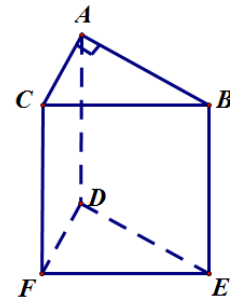
Bài 15: Một bình thủy tinh hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC có $AB = 6cm$, $BC = 10cm$, $AC = 8cm$, chiều cao $CC' = 12cm$. Mực nước trong bình hiện tại bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của hình lăng trụ. Bây giờ ta đập bình lại và lật đứng lên sao cho mặt $(BCC'B')$ là mặt đáy. Tính chiều cao của mực nước khi đó.

Bài 16: Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 17: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này.

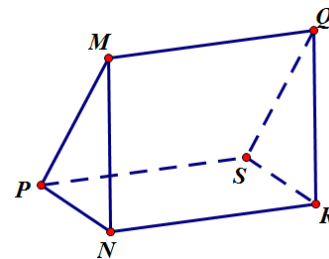
TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.DEF$ có ΔABC vuông tại A.



- a) Những cặp mặt phẳng nào song song với với nhau?
- b) Những cặp mặt phẳng nào vuông góc với nhau?
- c) Cho biết $DF = 2cm; AB = 3cm, AD = 5cm$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.
- d) Gọi M là trung điểm của EF . Tính độ dài các đoạn thẳng BM, AM

Bài 2: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $MNP.QRS$. (Mỗi câu sau đây có giả thiết riêng)



- a) Nếu ΔMPN vuông tại P có $PN = 2cm; PS = 5cm$ và thể tích $V = 15cm^3$. Tính diện tích xung quanh hình lăng trụ.
- b) Nếu ΔMPN cân ở M có $MN = 15cm; PN = 8cm; PS = 22cm$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.
- c) Nếu ΔMPN đều có cạnh là $a(cm)$. Gọi H là trung điểm của cạnh SR và $\widehat{MHQ} = 60^\circ$. Tính độ dài MQ , diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích của hình lăng trụ theo a.

Bài 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.EFGH$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B.

- a) Hãy kể tên các cạnh song song với cạnh AD, song song với cạnh AB, các đường thẳng song song với mp(EFGH); các đường thẳng song song với mp(DCGH).
- b) Cho biết $AB = AD = 4 cm; BC = 2AD$ và $\widehat{AFE} = 45^\circ$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng.

Bài 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a(cm)$ và $\widehat{ADC} = 60^\circ$ và $DD' = a(cm)$.

- a) Chứng minh $mp(CB'D') // mp(A'DB)$
- b) Chứng minh $mp(AA'C'C) // mp(DD'B'B)$.
- c) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

Bài 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = AC = 10cm$ và $BC = 12cm$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

- a) Chứng minh rằng $B'C' \perp mp(AA'M)$
- b) Cho biết $AM = 17 cm$, tính diện tích toàn phần của hình lăng trụ.

Bài 6: Một hình lăng trụ đều có tổng số mặt, số đỉnh và số cạnh là 26. Biết thể tích của hình lăng trụ là 540cm^3 , diện tích xung quanh là 360cm^2 . Tính chiều cao của hình lăng trụ đó.

Bài 7: Hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a , góc nhọn 30° . Cho biết diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng hai lần diện tích xung quanh của nó. Tính chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Bài 8: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ và chiều cao $AA' = 10\text{cm}$. Biết diện tích xung quanh của hình lăng trụ là 300cm^2 , tính thể tích của nó.

Bài 9: Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi với các đường chéo bằng 16cm và 30cm . Diện tích toàn phần của hình lăng trụ này là 2680cm^2 , tính thể tích của nó.

Bài 10: Hình lăng trụ ngũ giác đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$ có cạnh đáy bằng a . Biết hiệu giữa các diện tích xung quanh của hai hình lăng trụ đứng $ABCE.A'B'C'E'$ và $CDE.C'D'E'$ là $4a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

Bài 1: a) Những cặp mặt phẳng song song là:

$$mp(ABC) // mp(A'B'C')$$

b) Những cặp mặt phẳng vuông góc nhau là:

$$mp(ABC) \perp mp(AA'B'B)$$

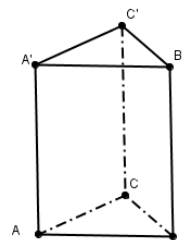
$$mp(ABC) \perp mp(BB'C'C)$$

$$mp(ABC) \perp mp(AA'C'C)$$

$$mp(A'B'C') \perp mp(BB'C'C)$$

$$mp(A'B'C') \perp mp(AA'C'C)$$

$$mp(A'B'C') \perp mp(AA'B'B)$$



Bài 2: a) Sai vì AB và AD không phải là các cạnh bên.

b) Sai vì BE và EF không phải là các cạnh bên.

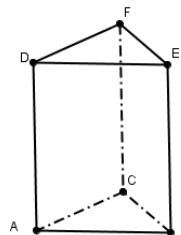
c) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

d) Sai vì AC và DF không phải là các cạnh bên.

e) Đúng

f) Sai vì Hai mặt phẳng $(ACFD)$ và $(BCFE)$ vuông góc nhau

g) Đúng



Bài 3: Bài giải

a) Những mặt phẳng song song với nhau là:

$$mp(ABCD) // mp(A'B'C'D');$$

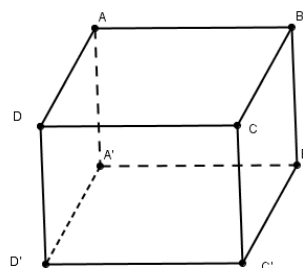
$$mp(AA'D'D) // mp(BB'C'C);$$

$$mp(DCC'D') // mp(AA'B'B)$$

b) $mp(ABCD) \perp mp(AA'B'B)$

$$mp(ABCD) \perp mp(BCC'B')$$

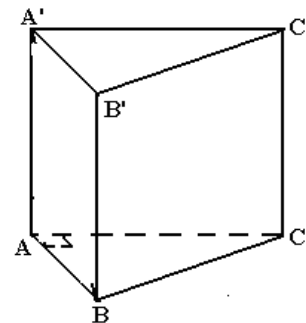
$$mp(ABCD) \perp mp(AA'D'D)$$



Bài 4: a) $AB \perp AC$ (ΔABC vuông tại A)

$AB \perp AA'$ ($AA'B'B$ là hình chữ nhật) nên AB vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và AA' của mặt phẳng $(AA'C'C)$.

Suy ra $AB \perp mp(AA'C'C)$



b) $mp(AA'B'B)$ chứa AB , mà AB vuông góc với $mp(AA'C'C)$ nên $mp(AA'C'C) \perp mp(AA'B'B)$

Bài 5: HD:

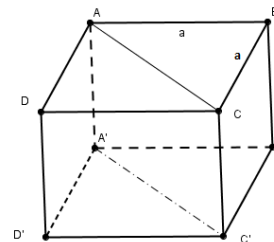
Ta có $AC = \sqrt{a+a^2} = a\sqrt{2}cm$

Chu vi đáy hình lăng trụ

$$a + a + a\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})a$$

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ

$$S_{xq} = 2ph = \frac{2(2 + \sqrt{2})a \cdot a}{2} = (2 + \sqrt{2})a^2 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Bài 6:

D là trung điểm AB, suy ra CD là chiều cao tam giác đáy

Vậy nên $DB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3cm$

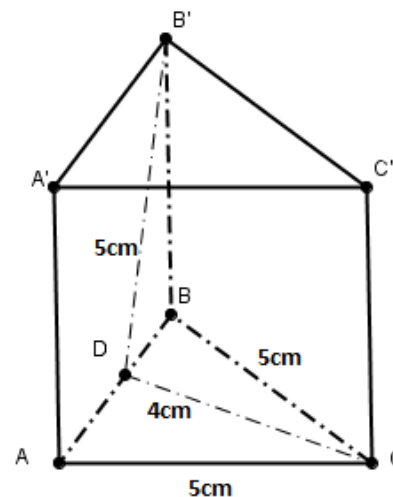
$BB' \perp AB$, áp dụng định lí py-ta-go, ta có

$$BB' = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4cm$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (5 + 5 + 6) \cdot 4 + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \right)$$

$$S_{tp} = 64 + 24 = 88 \text{ cm}^2$$



Bài 7:

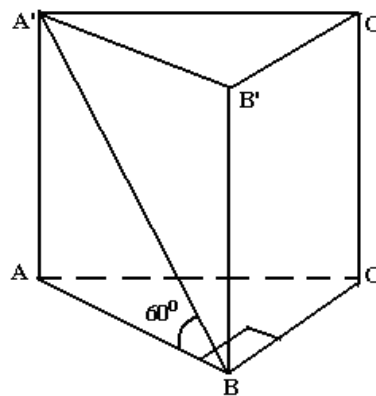
Ta có $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp AB$ và AB là hình chiếu của $A'B$ trên đáy ABC và $\widehat{ABA'} = 60^\circ$

Trong $\triangle ABA'$ ta có

$$\Rightarrow AA' = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$$



Bài 8:

Diện tích xung quanh hình trụ

$$S_{xq} = 2(a + a) \cdot h \text{ (cm)}$$

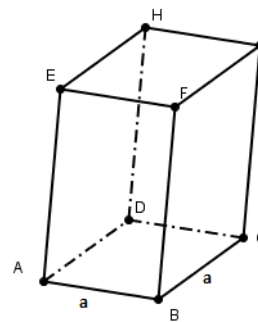
Diện tích toàn phần của hình trụ

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2(a + a) \cdot h + 2a \cdot a \Rightarrow S_{tp} = 4ah + 2a^2 = 2a(2h + a)$$

Theo đề ta có $S_{xq} = \frac{1}{2} S_{tp}$

$$\text{Hay } 4ah = \frac{1}{2} 2a(a + 2h) \Rightarrow 4h = a + 2h \Rightarrow 2h = a \Rightarrow h = \frac{a}{2}$$

Vậy chiều cao của hình trụ là $\frac{a}{2}$ (cm)



Bài 9: Độ dài đường chéo của tam giác đáy là $JK = HG = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

$$\text{Diện tích tam giác đáy } S_{\Delta HFG} = S_{\Delta TIK} = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6 \text{ cm}^2$$

Diện tích toàn phần hình lăng trụ HFG.JIK

$$S_{tp1} = S_{xq} + 2S_{day} = 2 \left(\frac{3 + 4 + 5}{2} \right) \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$$

* Tính diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật ABCD.EFII' (I' là điểm phía dưới)

$$S_{tp2} = S_{xq} + 2S_d = 2(1 + 3) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 46 \text{ cm}^2$$

$$* S_{JFH} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$$

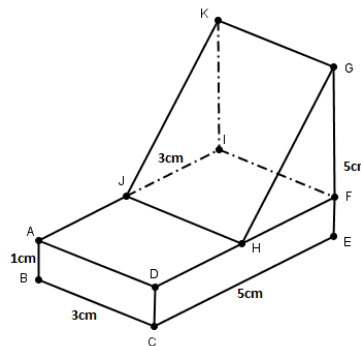
* Diện tích toàn phần của hình đã cho là

$$S_{tp} = S_{tp1} + S_{tp2} - S_{MFH} = 48 + 46 - 9 = 85 \text{ cm}^2$$

$$\text{Thể tích hình lăng trụ } V_1 = S_d \cdot h = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích hình hộp chữ nhật } V_2 = S_d \cdot h = 3 \cdot 5 = 15 \text{ cm}^3$$

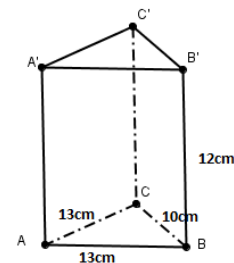
$$\text{Thể tích của hình đã cho là } V = V_1 + V_2 = 18 + 15 = 33 \text{ cm}^3$$



Bài 10: _Chiều cao của tam giác đáy

$$h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow h' = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Diện tích tam giác ABC là } S = \frac{1}{2} h' \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^2$$



Thể tích của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_d \cdot h = 60 \cdot 12 = 720 \text{ cm}^3$

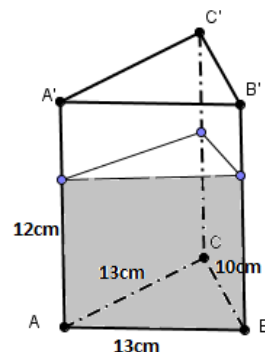
Bài 11: Chiều cao của tam giác đáy $h' = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} \Rightarrow h' = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} h' \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60 \text{ cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 480 \text{ cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(BCC'B')$ thì $S_d = 10 \cdot 12 = 120 \text{ cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{480}{120} \Rightarrow h' = 4 \text{ cm}$



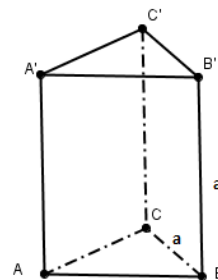
Vậy chiều cao mực nước mới là 4cm.

Bài 12: Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh a , đường cao tam giác đáy là

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích hình lăng trụ là $V = S \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$



Bài 13: a) Ta có $A'N \parallel AM$ và $A'N = AM$ nên $A'NMA$ là hình bình hành.

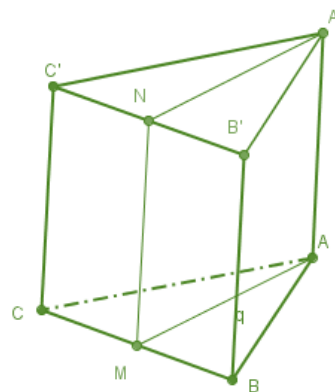
Mặt khác $A'N \perp mp(CC'B'B)$ nên $A'N \perp NM$

Vậy $AMNA'$ là hình chữ nhật

b) $V = S_d \cdot h = \frac{1}{2} AMBC \cdot AA'$

mà $AA' = MN$ nên diện tích hình chữ nhật $AMNA'$ là

$$S = \frac{1}{2} AM \cdot AA' = \frac{V}{a} \text{ (cm}^2\text{)}$$



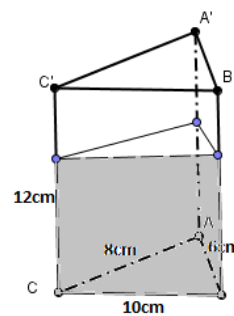
Bài 14: Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24\text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192\text{cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(ACC'A')$ thì $S_d = 8 \cdot 12 = 96\text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{96} \Rightarrow h' = 2\text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2cm.



Bài 15:

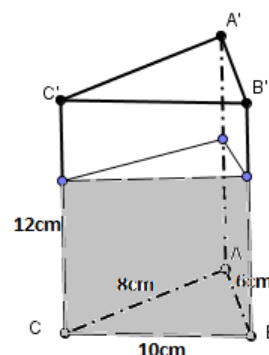
Diện tích tam giác đáy là $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24\text{cm}^2$

Thể tích nước hiện tại trong hình lăng trụ là $V = 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 192\text{cm}^3$

Nếu chọn đáy là $(BCC'B')$ thì $S_d = 6 \cdot 12 = 72\text{cm}^2$

Chiều cao mực nước mới là $h' = \frac{V}{S_d} = \frac{192}{72} \Rightarrow h' \approx 2,7\text{cm}$

Vậy chiều cao mực nước mới là 2,7cm.



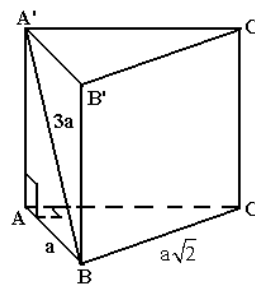
Bài 16: Ta có ΔABC vuông cân tại A nên $AB = AC = a$

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

$$\Delta AA'B \Rightarrow AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$$

$$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } V = B \cdot h = S_{ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{2}$$



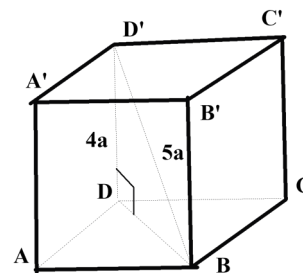
Bài 17: $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ đứng nên

$$BD^2 = BD'^2 - DD'^2 = 9a^2 \Rightarrow BD = 3a$$

$$ABCD \text{ là hình vuông } \Rightarrow AB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } B = S_{ABCD} = \frac{9a^2}{4}$$

$$\text{Vậy } V = B \cdot h = S_{ABCD} \cdot AA' = 9a^3$$

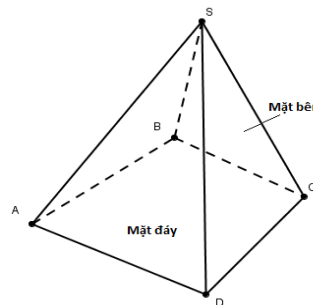


3. HÌNH CHÓP ĐỀU. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

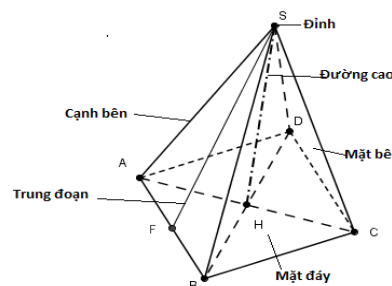
• Hình chóp có:

- Đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh.
- Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao.
- Trong hình trên: hình chóp $S.ABCD$ có đỉnh là S , đáy là tứ giác $ABCD$, ta gọi đó là hình chóp tứ giác.



• Hình chóp đều

Hình chóp $S.ABCD$ trên có đáy là hình vuông $ABCD$, các mặt bên SAB , SBC , SCD và SDA là những tam giác cân bằng nhau. Ta gọi $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều



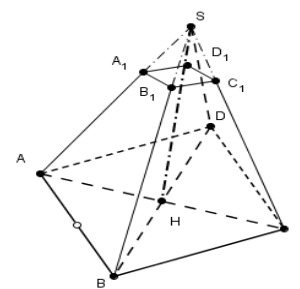
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

- Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.
- Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều được gọi là **trung đoạn** của hình chóp đó.

• Hình chóp cụt đều

Hình chóp cụt đều là phần hình chóp đều nằm giữa mặt phẳng đáy của hình chóp và mặt phẳng song song với đáy và cắt hình chóp.

- Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.



• Diện tích xung quanh của hình chóp đều.

- Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng nửa tích của chu vi đáy với trung đoạn. $S_{xq} = pd$ (p là nửa chu vi đáy; d là trung đoạn của hình chóp)

- Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy.
 $S_{tp} = S_{xq} + S$ (S : diện tích đáy)

• Thể tích của hình chóp đều

- Thể tích của hình chóp bằng một phần ba của diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h \quad (S: \text{diện tích đáy, } h: \text{chiều cao})$$

III. BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp tam giác đều $A.BCD$. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh:

- a) CD vuông góc với mặt phẳng (AHB)
- b) $AC \perp BD$

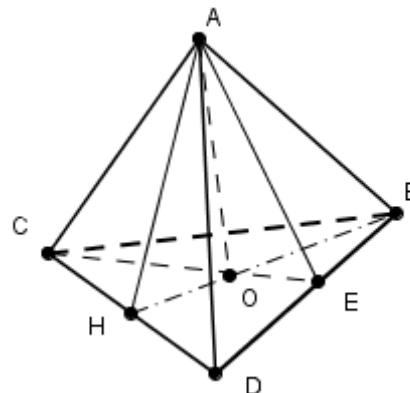
a) Hình chóp $A.BCD$ là hình chóp tam giác đều nên tam giác CBD là tam giác đều các tam ACB, ACD, ADB là các tam giác cân tại A. H là trung điểm CD suy ra $HB \perp CD; AH \perp CD$

Vậy CD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AHB) nên $CD \perp mp(AHB)$

- b) Gọi E là trung điểm BD ta có $AE \perp BD; CE \perp BD$

Vậy BD vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (AEC) nên $BD \perp mp(AEC)$ suy ra BD vuông góc với mọi đường thẳng thuộc $mp(AEC)$

Hay $AC \perp BD$



Bài 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh

- a) SO vuông góc với $mp(ABCD)$
- b) $mp(SAC)$ vuông góc với $mp(ABCD)$

HD:a) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên có $ABCD$ là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau.

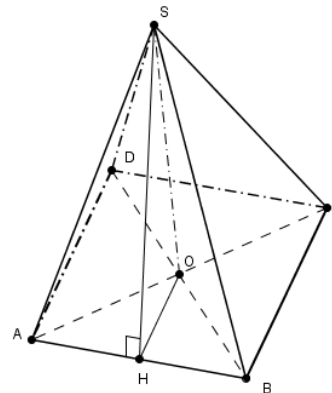
Ta có ΔSBD là tam giác cân tại S có $SD = SB$ nên SO là đường cao của tam giác hay $SO \perp BD$

Tương tự, ta có $SO \perp AC$

SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc $mp(ABCD)$ nên $SO \perp mp(ABCD)$

b) Ta có $AC \in mp(SAC)$; $BD \in mp(SBD)$

Mà $BD \perp AC$ nên $mp(SAC) \perp mp(SBD)$



Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2cm$, $SA = 4cm$. Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp đều này.

HD: Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = 2cm$, $SA = 4cm$, nên $ABCD$ là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau.

Ta có $AC = BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $AO = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SOA vuông tại O , theo Pytago ta có

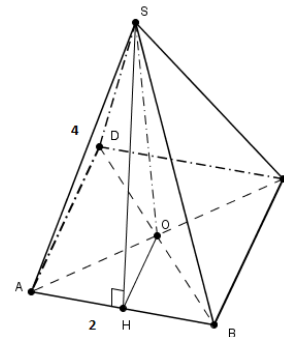
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Vậy chiều cao hình chóp là $3\sqrt{2}cm$

Gọi H là trung điểm AB , ta có SH là trung đoạn của hình chóp

Trong tam giác SBH vuông tại H , theo Pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

Vậy độ dài trung đoạn là $\sqrt{15}cm$



Bài 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = 3cm$, cạnh bên $SA = 4cm$. Tính chiều cao của hình chóp.

Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ nên ABC là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm AB , O là trọng tâm tam giác ABC

Ta có CH là đường cao tam giác ABC

Trong tam giác CHB vuông tại H ta có

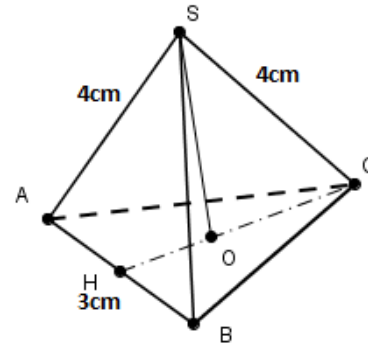
$$HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$OC = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông SOC vuông tại O ta có

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$$

Vậy chiều cao của hình chóp là $\sqrt{13}$ cm



Bài 5: Một hình chóp cụt đều có đáy lớn bằng 12cm , đáy bé bằng 8cm và cạnh bên bằng $\sqrt{13}$ cm $\sqrt{13}$ cm . Tính độ dài trung đoạn và chiều cao của hình chóp cụt đó.

HD: Hình chóp cụt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân AA'D'D . Vẽ đường cao A'E và D'F , ta có

$$A'E = D'F = \frac{AD - A'D'}{2} = \frac{12 - 8}{2} = 2$$

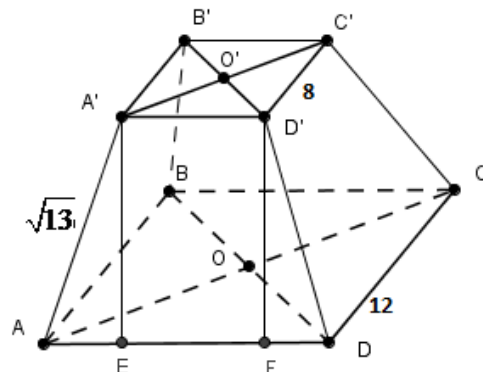
Vậy độ dài trung đoạn là 2 cm

Khai triển hình chóp cụt đều ta thấy

Trong hình thang vuông OBB'O' vẽ đường cao B'I ta có

$$OB = \frac{BD}{2} = 6\sqrt{2}; O'B' = 4\sqrt{2}; BI = OB - O'B' = 2\sqrt{2}$$

Vậy đường cao hình chóp cụt đều là $B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2} = \sqrt{13 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$



Bài 6: Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng 8cm và độ dài cạnh bên bằng 5cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

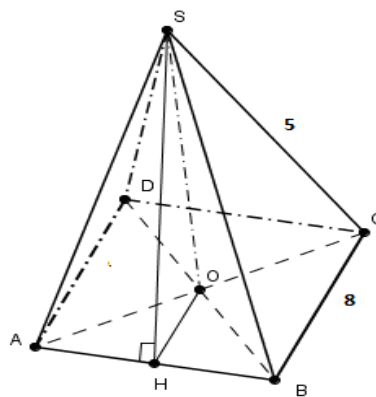
HD: Trong tam giác vuông SHB, theo pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Diện tích đáy là $S_d = 8.8 = 64(\text{cm}^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là
 $S_{xq} = pd = (8+8).3 = 48(\text{cm}^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 64 + 48 = 112(\text{cm}^2)$$



Bài 7: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ biết $BD = 12\sqrt{2}\text{cm}$, $SC = 10\text{cm}$

HD: Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông nên $AD = AB$, ta có $BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB = 12$

Trong tam giác vuông SHB , theo pytago ta có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

Trong tam giác SOB vuông tại O, theo Pytago ta có

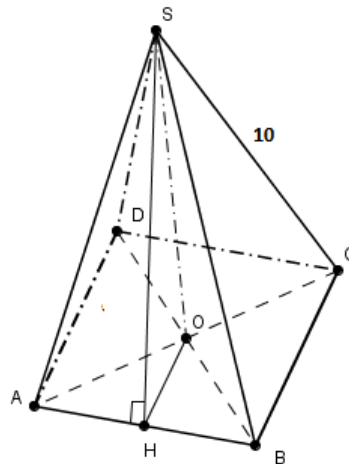
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - (6\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

Diện tích đáy là $S_d = 12.12 = 144(\text{cm}^2)$

Diện tích xung quanh hình chóp là
 $S_{xq} = pd = (12+12).8 = 192(\text{cm}^2)$

Diện tích toàn phần hình chóp

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 144 + 192 = 336(\text{cm}^2)$$



Bài 8: Tính diện tích toàn phần của hình chóp tam giác biết cạnh đáy bằng 10cm, cạnh bên bằng 13cm.

Bài giải

Tam giác BCA cân tại S có $SI \perp AB$ tại I, theo Pytago ta có

$$SI = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Tam giác ABC là tam giác đều có cạnh là $a = 10\text{cm}$ nên chiều cao tam giác đều là

$$h = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

$S.ABC$ là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung

tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI = \frac{2}{3}.5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

đều

Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí Pytago ta có

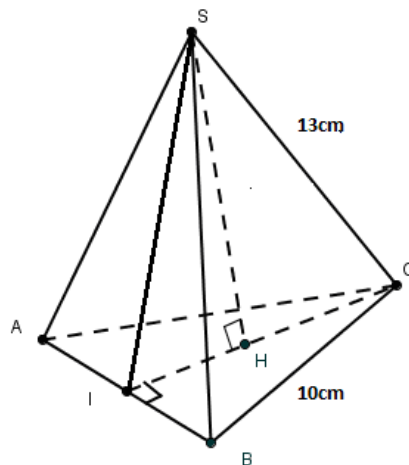
$$HS = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 11,6$$

Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2}CIAB = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3} (\text{cm}^2)$

$$S_{xq} = pd = \left(\frac{10+10+10}{2}\right) \cdot 12 = 180 (\text{cm}^2)$$

Vậy diện tích toàn phần của hình chóp là

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = 11,6 + 180 = 191,6 (\text{cm}^2)$$



Bài 9: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 6cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{43}$ cm

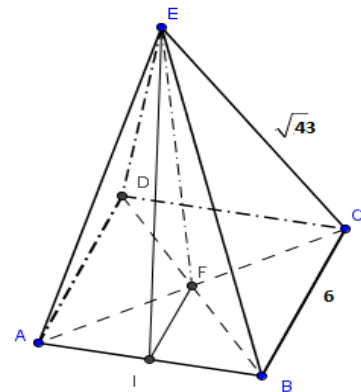
Ta có $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ cm. Suy ra $FC = 3\sqrt{2}$ cm

Áp dụng định lí pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{43}^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{43 - 18} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Diện tích tứ giác đáy $S = 6 \cdot 6 = 36$ cm

Thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}36 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3$



Bài 10: Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết chiều cao bằng $\sqrt{12}$ cm và cạnh bên bằng 4cm.

$S.ABC$ là hình chóp đều nên chân đường cao H trùng với giao điểm ba đường trung tuyến của tam giác, ta có $SH \perp CI$ và $HC = \frac{2}{3}CI$

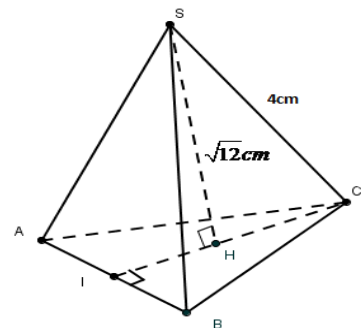
Trong tam giác SHC vuông tại H, theo định lí pytago ta có

$$HC = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{4^2 - \sqrt{12}^2} = 2$$

Suy ra $CI = 3$ cm

Tam giác ABC là tam giác đều, giả sử có cạnh là a nên chiều cao tam giác đều là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà CI là chiều cao tam giác ABC

nên cạnh tam giác đều là $\frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ hay $AB = 2\sqrt{3}$ cm



Diện tích đáy là $S = \frac{1}{2} CI.AB = \frac{1}{2}.3.2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}3\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6 \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 11: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều biết độ dài cạnh đáy bằng 4cm và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{24}cm$

Bài giải

$E.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có đáy $ABCD$ là hình vuông, có cạnh $AB = 4cm$

Ta có $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}cm$

Suy ra $FC = 2\sqrt{2}cm$

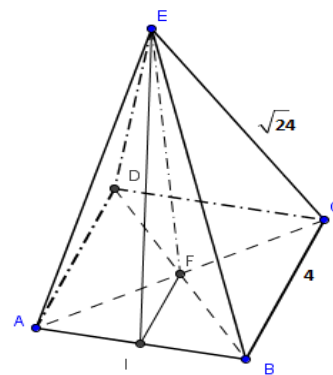
Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông EFC ta có

$EF = \sqrt{EC^2 - FC^2} = \sqrt{\sqrt{24}^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{24 - 8} = \sqrt{16} = 4cm$

Chiều cao hình chóp là 4cm

Diện tích tứ giác đáy $S = 4.4 = 16cm^2$

Thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}16.4 \approx 21,3cm^3$



Bài 12: Tính thể tích hình chóp tam giác đều biết độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{6}cm$ và cạnh bên đáy 3cm.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , HC cắt AB tại D, ta có $AD = DB = \frac{3}{2}$

Tam giác CDB vuông tại D, theo định lí Pytago, ta có

$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ và

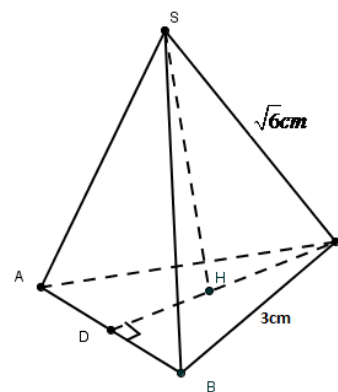
$HC = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Tam giác SHC vuông tại H, ta có

$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

Thể tích của hình chóp đều là

$V = \frac{1}{3}S_d h = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} DC.AB \right) .SH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{2} .3 \right) \sqrt{3} = \frac{9}{4} cm^3$



Bài 13: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều có trung đoạn bằng 5cm và diện tích xung quanh bằng 80cm^2 .

HD: Diện tích xung quanh hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a cm, trung đoạn là 5cm:

$$S_{xq} = p \cdot d = 2a \cdot 5 = 80\text{cm}^2 \quad \text{Hay } a = 8\text{cm}$$

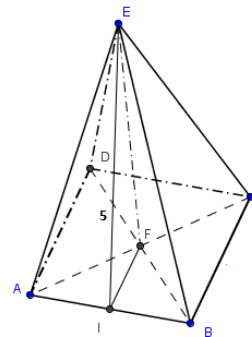
$$\text{Ta có } AC = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}\text{cm} \Rightarrow BF = 4\sqrt{2}\text{cm}$$

Ta có $FI = 4\text{cm}$ (vì FI là đường trung bình của tam giác ABC , tam giác ABC có cạnh $AB = a = 8\text{cm}$)

Áp dụng định lý pytago trong tam giác vuông EFI ta có

$$EF = \sqrt{EI^2 - FI^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$$

$$\text{Thể tích hình chóp } V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} 8^2 \cdot 3 = 64\text{cm}^3$$



Bài 14: Một hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đáy bằng a và $2a$, đường cao của mặt bên bằng a .

- a) Tính diện tích xung quanh
- b) Tính cạnh bên, đường cao của hình chóp cụt đều.

Bài giải

a) Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều

$$S_{xq} = \frac{1}{2} (p + p) \cdot d = \frac{1}{2} (4 \cdot 2a + 4a) a = 6a^2$$

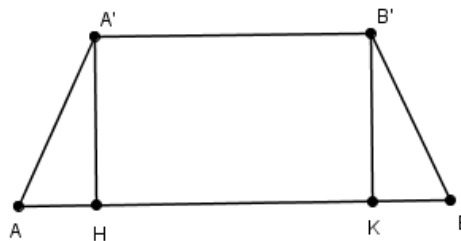
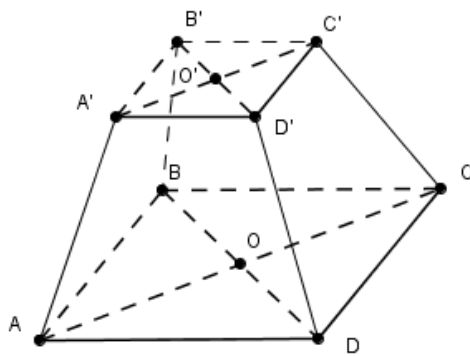
b) Khai triển hình chóp cụt đều ta thấy mặt bên là hình thang cân $ABA'B'$. Vẽ đường cao $A'H$ và $B'K$, ta có

$$AH = BK = \frac{AB - A'B'}{2} = \frac{a}{2}$$

Trong hình thang vuông $OBB'O'$ vẽ đường cao $B'I$ ta có

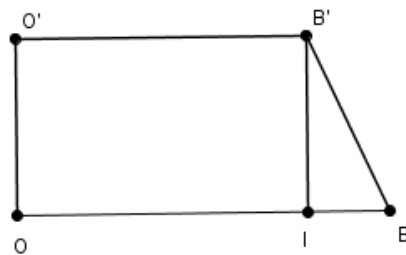
$$OB = \frac{BD}{2} = a\sqrt{2}; O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BI = OB - O'B' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Vậy đường cao hình chóp cắt đều là

$$B'I = \sqrt{B'B^2 - BI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Bài 15: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Chứng minh $ABC.MNP$ là hình chóp cắt tam giác đều.

Ta có $AB \parallel MN$; $BC \parallel NP$ nên $mp(MNP) \parallel mp(ABC)$.

Mặt khác, $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SA = SB = SC$

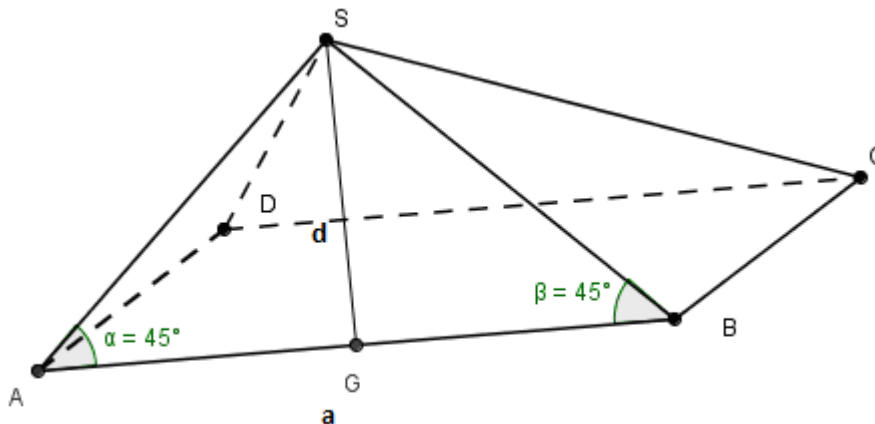
Suy ra $\widehat{SAB} = \widehat{SBC}$, do đó $AMNB$ là hình thang cân.

Tương tự $BNPC$; $AMPC$ là các hình thang cân

Vậy $ABC.MNP$ là hình chóp cắt tam giác đều.

Bài 15: Cho hình chóp tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần.

Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông cân.



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, các cạnh bên là các tam giác cân tại S (1)

Gọi a là độ dài cạnh đáy, d là trung đoạn của hình chóp

Ta có $S_{xq} = pd = 2ad$; $S_{tp} = S_{xq} + S_d = 2ad + a^2$

Mặt khác $S_{xq} = \frac{1}{2}S_{tp} \Leftrightarrow 2ad = \frac{1}{2}(2ad + a^2) \Leftrightarrow ad - \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow a\left(d - \frac{1}{2}a\right) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}a$

Gọi G là trung điểm AB suy ra $GB = \frac{1}{2}a$

Ta có SG là trung đoạn hình chóp $SG = \frac{1}{2}a$

Vậy trong tam giác SGB có $GB = SG = \frac{1}{2}a$ và $\widehat{G} = 90^\circ$ nên ΔSGB là tam giác vuông cân tại G $\Rightarrow \widehat{GSB} = 45^\circ$ (2)

Tương tự, ta có $\widehat{GSA} = 45^\circ$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\widehat{BSA} = 90^\circ$ (4)

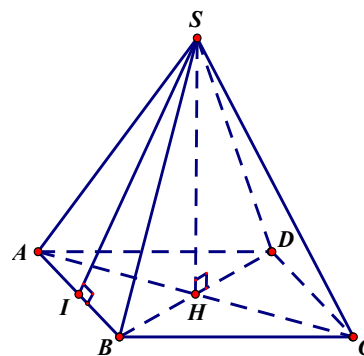
Từ (1), (4) suy ra ΔASB vuông cân tại S

Tương tự ta chứng minh được các cạnh bên của hình chóp là tam giác vuông cân.

TỰ LUYỆN

Bài 1: Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

- Biết $AB = 6\text{cm}$, $SI = 5\text{cm}$.
- Biết $SH = 4\text{cm}$, $SB = 5\text{cm}$.
- Biết $AB = 5\text{cm}$, $SB = 5\text{cm}$.



Bài 2: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC và D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , BC , CA .

- Chứng minh $\widehat{SDO} = \widehat{SEO} = \widehat{SFO}$.
- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.
 - Nếu biết $SO = 12\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$.
 - Nếu biết các mặt bên là các tam giác đều, $OA = \sqrt{3}\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$
 - Nếu biết $OC = 2\sqrt{3}\text{cm}$ và $\widehat{SDO} = 60^\circ$

Bài 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Có $SH = 15\text{cm}$, $AB = 16\text{cm}$

- Tính trung đoạn, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.
- Gọi H' là trung điểm của SH. Cắt hình chóp bởi 1 mặt phẳng đi qua H' và song song với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ ta được hình chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp cắt. (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

KẾT QUẢ - ĐÁP SỐ

III. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3:

Bài 4:

Bài 5:

Bài 8:

IV. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM