BẤT ĐẲNG THỨC

Phần 1: BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (CÔ SI)

Cho các số thực không âm a,b,c khi đó ta có:

1. $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.
2. $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Các bất đẳng thức 1, 2 gọi là bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số thực không âm. (Còn gọi là bất đẳng thức Cô si hay bất đẳng thức AM- GM)

Để vận dụng tốt bất đẳng thức Cauchy . Ta cần nắm chắc những kết quả sau:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge \frac{4}{a+b}\ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge \frac{\left(x+y\right)^2}{a+b}$

2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{a+b+c}\ge \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3) $a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge \frac{3}{4}(a+b)^2$

4) $a^2-ab+b^2=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2\ge \frac{1}{4}(a+b)^2$

5) $ab+bc+ca\le \frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\le a^2+b^2+c^2$

6) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge \frac{\left(x+y+z\right)^2}{a+b+c}$

7) $a^3+b^3\ge \frac{\left(a+b\right)^3}{4}$

8) $2(a^4+b^4) \ge \left(a^2+b^2\right)^2 \ge \left[\dfrac{\left(a+b\right)^2}{2}\right]^2 = \dfrac{(a+b)^4}{4} \Rightarrow a^4+b^4 \ge \dfrac{(a+b)^4}{8}$

9) Với $a,b \ge 0$ thì $a^{m+n}+b^{m+n} \ge \dfrac{1}{2}(a^m+b^m)$ (*)

Thật vậy BĐT cần chứng minh tương đương với

$(a^n+b^n)(a^m-b^m)(a^n-b^n) \ge 0$ điều này là hiển nhiên đúng.

(**) Tổng quát ta có $\dfrac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$

Thật vậy áp dụng (*) ta có $\dfrac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}}{2}\right) \ldots\ldots \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$

10) Với $a,b,c \ge 0$ thì $a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n} \ge \dfrac{1}{3}(a^m+b^m+c^m)(a^n+b^n+c^n)$ (*)

Thật vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(a^m-b^m)(a^n-b^n)+(b^m-c^m)(b^n-c^n)+(c^m-a^m)(c^n-a^n) \ge 0$ mà điều này là hiển nhiên đúng.

Tổng quát ta có: $\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n$. Thật vậy áp dụng (*) ta có:

$$\frac{a^n+b^n+c^n}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{3}\right) \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\left(\frac{a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}}{3}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức này ta có:

$$\frac{\sqrt[n]{a^n}+\sqrt[n]{b^n}+\sqrt[n]{b^n}}{3} \ge \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n \Leftrightarrow \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3} \le \sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}}{3} \ge \left(\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{3}\right)^n$

Do $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{9}{a+b+c}$ suy ra $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n} \ge 3\left(\dfrac{3}{a+b+c}\right)^n$.

11) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với mọi $a,b \ge 1$

Tổng quát: với $a,b\ge 1$ ta có $\dfrac{1}{(1+a)^n}+\dfrac{1}{(1+b)^n}\ge \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{ab}\right)^n}$

12) Với $0\le a,b\le 1$ thì $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\le \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Tổng quát: Với $a,b\in[0;1]$ ta có: $\dfrac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{1+b}}\le \dfrac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}$

13) Một số kết quả được suy ra từ bất đẳng thức Cô si.

+ $\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(m^3+n^3\right)\ge \left(axm+byn\right)^3$ (*)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+b^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3}\ge \frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(m^3+n^3\right)}}$$
$$\frac{b^3}{a^3+b^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3}\ge \frac{3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(m^3+n^3\right)}}$$

Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra:

$$3\ge \frac{3axm+3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(m^3+n^3\right)}}\Leftrightarrow$$

$\left(a^3+b^3\right)\left(x^3+y^3\right)\left(m^3+n^3\right)\ge \left(axm+byn\right)^3$.

+ Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được:

$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge \left(axm+byn+czp\right)^3$.

Ví dụ 1: Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

a) $a^3+b^3\ge ab(a+b)$.

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$. Với $(a,b,c>0)$

c) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

d) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

e) Cho $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh: $ab+bc+ca\le\frac{3}{4}$ (Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015)

Lời giải:

a) Ta có : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Suy ra $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2\ge 0$ suy ra đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta có: $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)$. Suy ra $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}$. Tương tự ta có: $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)};\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ra suy ra: $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

c) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

Cách 1: Ta có: $a+b\ge 2\sqrt{ab},b+c\ge 2\sqrt{bc},c+a\ge 2\sqrt{ca}\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$.

Cách 2: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc},ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow$

$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$. Suy ra

$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \geq 8abc$.

Chú ý: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ là một biến đổi được sử dụng rất nhiều trong chứng minh bất đẳng thức:

d) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Chú ý rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Áp dụng câu c ta có đpcm.

e) Ta chú ý: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. Suy ra $ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c}$.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$a+b+b+c+c+a \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3 \Rightarrow a+b+c \geq \frac{3}{2}$.Mặt khác sử dụng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$. Từ đó suy ra:

$ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} \leq \frac{1+\frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$. Dấu ‘’=’’ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2:

a) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c+ab+bc+ca=6$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \geq 6$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2013.

b) Cho các số thực dương a,b sao cho : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Chứng minh:

$Q=\frac{1}{a^4+b^2+2ab^2}+\frac{1}{b^4+a^2+2a^2b}\le\frac{1}{2}$ Trích đề tuyển sinh lớp 10 chuyên Nguyễn Trãi- Hải Dương 2013).

c) Cho các số thực dương a,b sao cho $a+b=2$. Chứng minh:

$2\left(a^2+b^2\right)-6\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+9\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\ge 10$.

d) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ac}+\sqrt{2c+ab}$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2014.

e) Cho các số thực không âm a,b sao cho $a^2+b^2=4$. Tìm GTLN của $P=\frac{ab}{a+b+2}$. Trích đề tuyển sinh lớp 10- TP Hà Nội 2015.

Lời giải:

a) Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Ta có cách giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:
$a^2+b^2\ge 2ab, b^2+c^2\ge 2bc, c^2+a^2\ge 2ac, a^2+1\ge 2a, b^2+1\ge 2b, c^2+1\ge 2c$.
Cộng 6 bất đẳng thúc cùng chiều ta suy ra
$3\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\ge 2\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)=12\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Dự đoán khi $a=b=1$ thì bất đẳng thức xảy ra dấu bằng. Từ đó ta có cách áp dụng BĐT Cô si như sau:

Ta có: $a^4+b^2\ge 2a^2b, b^4+a^2\ge 2ab^2$. Từ đó suy ra

$Q\le\frac{1}{2a^2b+2ab^2}+\frac{1}{2b^2a+2a^2b}=\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}+\frac{1}{2ab\left(a+b\right)}=\frac{1}{ab\left(a+b\right)}$. Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=2\Rightarrow a+b=2ab$ suy ra $Q\le\frac{2}{\left(a+b\right)^2}$. Do

$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Rightarrow\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2}$. Suy ra $Q\leq\frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

c) Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$2\left[(a+b)^2-2ab\right]-6\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}+9\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}\geq 10$. Hay

$8-4ab-6\frac{4-2ab}{ab}+9\frac{4-2ab}{a^2b^2}-10\geq 0\Leftrightarrow -2a^2b^2-4a^3b^3-24ab+12a^2b^2+36-18ab$

$\Leftrightarrow -2a^2b^2-4a^3b^3-24ab+12a^2b^2+36-18ab\geq 0\Leftrightarrow 4t^3-10t^2+42t-36\leq 0$

(*) với $0<t=ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=1$. Ta có (*) tương đương với:

$2t^3-5t^2+21t-18\leq 0\Leftrightarrow (t-1)\left(2t^2-3t+18\right)\leq 0$. Do $2t^2-3t+18>0$ và $t-1\leq 0$ nên $(t-1)\left(2t^2-3t+18\right)\leq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=1\Leftrightarrow a=b=1$.

d) $\sqrt{2a+bc}=\sqrt{a(a+b+c)+bc}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si $\sqrt{(a+b)(a+c)}\leq\frac{a+b+a+c}{2}$, tương tự ta có:

$\sqrt{2b+ac}=\sqrt{b(a+b+c)+ac}\leq\sqrt{(b+a)(b+c)}\leq\frac{b+a+b+c}{2}$,

$\sqrt{2c+ab}\leq\frac{c+a+c+b}{2}$. Từ đó suy ra

$P=\sqrt{2a+bc}+\sqrt{2b+ac}+\sqrt{2c+ab}\leq\frac{2a+b+c}{2}+\frac{2b+c+a}{2}+\frac{2c+a+b}{2}=2(a+b+c)$

.Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Ta viết lại $P=\frac{ab}{a+b+2}\Rightarrow$. Đặt $a+b+2=t\Rightarrow t>2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=(t-2)^2\Rightarrow 2ab=t^2-2t+2\ \ (a+b)^2=(t-2)^2$.Ta có :

$2\left(a^2+b^2\right)\geq(a+b)^2\Rightarrow(a+b)^2\leq 8\Leftrightarrow a+b\leq 2\sqrt{2}\Rightarrow 2<t\leq 2\sqrt{2}+2$. Ta sẽ

chứng minh: $P=\frac{ab}{a+b+2}=\frac{t^2-2t+2}{t}$.Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=\sqrt{2}\Rightarrow t=2\sqrt{2}+2$ nên ta chứng minh:

$P\le\frac{1}{\sqrt{2}+1}\Leftrightarrow\frac{t^2-2t+2}{t}\le\frac{1}{\sqrt{2}+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)t^2-\left(2\sqrt{2}+3\right)t+2\sqrt{2}+2\le 0$.

Hay $t^2-\left(\sqrt{2}+1\right)t+2\le 0\Leftrightarrow\left(t-2\sqrt{2}-2\right)\left(t-\sqrt{2}+1\right)\le 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng do $2<t\le 2\sqrt{2}+2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t=2\sqrt{2}+2\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$.

MỘT SỐ KỸ THUẬT VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI.

1. Dự đoán dấu bằng để phân tích số hạng và vận dụng bất đẳng thức Cô si.

Đối với các bài toán bất đẳng thức đối xứng thông thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau đây là cơ sở để ta phân tích các số hạng sao cho khi áp dụng bất đẳng thức Cô si thì dấu bằng phải đảm bảo.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $x+y=2$. Chứng minh $x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\le 2$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Chu Văn An, Hà Nội – Amsterdam 2006-2007)

Lời giải:

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$. Khi đó $xy=1$, $x^2+y^2=2$

Mặt khác để tận dụng giả thiết $x+y=2$ ta sẽ đưa về hằng đẳng thức $\left(x+y\right)^2$. Vì vậy ta phân tích bài toán như sau: $x^2y^2\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}.xy.2xy\left(x^2+y^2\right)$. Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = 1$, $2xy\left(x^2+y^2\right) \le \left(\frac{2xy+x^2+y^2}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^4}{4} = 4$. Từ đó suy ra $x^2y^2\left(x^2+y^2\right) \le 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Ngoài cách làm trên ta có thể giải bài toán bằng cách đưa về một biến: $t = x+y$ hoặc $t = xy$ với chú ý: $(x+y)^2 \ge 4xy$, $2\left(x^2+y^2\right) \ge (x+y)^2$. Thật vậy: Đặt $t = xy; (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$.

$\Rightarrow 4 = x^2+y^2+2t \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4-2t$. Do $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = 1 \Rightarrow 0 < t \le 1$. Ta cần chứng minh: $t^2(4-2t) \le 2 \Leftrightarrow t^3-2t^2+1 \ge 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-t-1\right) \le 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi giá trị $0 < t \le 1$.

Ví dụ 2:

a) Cho a,b là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2 \le 2$. Chứng minh rằng:

$a\sqrt{3a(a+2b)} + b\sqrt{3b(b+2a)} \le 6$. (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Ngoại Ngữ ĐHQGHN năm 2008-2009).

b) Với ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} + \frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}$. (Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội 2014)

Lời giải:

a) Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$. Khi đó $3a = a+2b, 3b = b+2a$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp cho biểu thức trong dấu căn.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, dễ thấy

$a\sqrt{3a\left(a+2b\right)} \le a\frac{3a+a+2b}{2} = 2a^2 + ab$,

$b\sqrt{3b\left(b+2a\right)} \le b\frac{3b+b+2a}{2} = 2b^2 + ab$.

Cộng hai bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$M = a\sqrt{3a\left(a+2b\right)} + b\sqrt{3b\left(b+2a\right)} \le 2\left(a^2+b^2\right) + 2ab = 4 + 2ab$. Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết, ta có:
$4 + 2ab \le 4 + a^2 + b^2 = 6$. Từ đó ta có ngay $M \le 6$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$.

b) Ta có: $\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}} = \frac{x\left(\sqrt{x+yz}-x\right)}{x+yz-x^2} = \frac{x\left(\sqrt{x\left(x+y+z\right)+yz}-x\right)}{x\left(x+y+z\right)+yz-x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy co hai số thực dương $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ ta có:

$\frac{x\left(\sqrt{\left(x+y\right)\left(x+z\right)}-x\right)}{xy+yz+xz} \le \frac{x+\left(\frac{x+y+x+z}{2}-x\right)}{xy+yz+xz} = \frac{xy+xz}{2\left(xy+yz+xz\right)}$. Chứng minh tương tự rồi cộng vế, ta suy ra $Q \le 1$.Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy Q lớn nhất bằng 1 khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Ví dụ 3: Cho $c > 0$ và $a, b \ge c$. Chứng minh rằng
$\sqrt{c\left(a-c\right)} + \sqrt{c\left(b-c\right)} \le \sqrt{ab}$.

Lời giải:Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = b$. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết thành:

$P=\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}.\frac{b-c}{b}}\le 1$. Sử dung bất đẳng thức Cauchy dạng:

$\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$, ta có: $P\le\frac{\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}}{2}+\frac{\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}}{2}=\frac{\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}}{2}=1$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{c}{b}=\frac{a-c}{a}\\ \frac{c}{a}=\frac{b-c}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh bài toán bằng biến đổi tương đương.

Ví dụ 4: Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\ge 1.$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng: $2ab\le a^2+b^2$, dễ thấy:

$$P=\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\ge\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2+x^2}+\frac{z^2}{z^2+x^2+y^2}=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Ví dụ 5: Cho $x,y>0$ và $x+y\le 1$. Chứng minh rằng $8\left(x^4+y^4\right)+\frac{1}{xy}\ge 5$.

Giải:

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x=y=\frac{1}{2}$. Ta đánh giá x^4+y^4 để đưa về xy.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $x^4+y^4\ge 2x^2y^2$ suy ra $8\left(x^4+y^4\right)\ge 16x^2y^2$.

Suy ra $8\left(x^4+y^4\right)+\frac{1}{xy}\ge 16x^2y^2+\frac{1}{xy}$ Để ý rằng dấu bằng xảy ra thì $16x^2y^2=1$ nên ta phân tích như sau: $16x^2y^2+\frac{1}{xy}=16x^2y^2+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{2xy}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ ta có: $16x^2y^2+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{4xy}\ge 3$,

$4xy\le\left(x+y\right)^2=1\Rightarrow xy\le\frac{1}{4}$. Suy ra $16x^2y^2+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{4xy}+\frac{1}{2xy}\ge 3+2=5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a\ge\frac{9a^2b^2c^2}{1+2a^2b^2c^2}$.

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(2+\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)\ge 9$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}\ge 9$. Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cauchy bộ ba số, ta có: $a^2b+a^2b+\frac{1}{ab^2}\ge 3\sqrt[3]{a^2b.a^2b.\frac{1}{ab^2}}=3a$,

$$b^2c+b^2c+\frac{1}{bc^2}\ge 3\sqrt[3]{b^2c.b^2c.\frac{1}{bc^2}}=3b$$

$$c^2a+c^2a+\frac{1}{ca^2}\ge 3\sqrt[3]{c^2a.c^2a.\frac{1}{ca^2}}=3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế, ta được:

$2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{bc^2}+\frac{1}{ca^2}\ge 9$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và hcir khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7) Cho $x,y>1$. Chứng minh rằng: $\frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)(y-1)}\ge 8$.

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$P=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y-1}.\frac{y^2}{x-1}}=\frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}$ (1). Mặt khác, lại để ý rằng nếu sử dụng bất đẳng thức Cauchy bộ hai số dạng $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$, thì:

$\sqrt{x-1}=\sqrt{1.(x-1)}\le\frac{2+x-1}{2}=\frac{x}{2};\sqrt{y-1}=\sqrt{1.(y-1)}\le\frac{1+y-1}{2}=\frac{y}{2}$. Nhân hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được: $\sqrt{(x-1)(y-1)}\le\frac{xy}{4}\Leftrightarrow\frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}\ge 8$ (2). Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{x^2}{y-1}=\frac{y^2}{x-1}\\ x=2,y=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2.$$

Đối với các bài toán mà dấu bằng không xảy ra khi các biến bằng nhau. Ta cần chú ý tính đối xứng của từng bộ phận , để dự đoán sau đó liên kết các dữ liệu của bài toán để tìm ra điểm rơi. Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy để thu được kết quả:

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 8: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + 2z^2$

Giải:

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = az$ và mong muốn biến đổi được : $P = x^2 + y^2 + 2z^2 \geq k(xy + yz + zx)$ để tận dụng giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và dấu bằng xảy ra khi $x = y = az$. Để có tích $x.y$ ta áp dụng $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Để tạo ra yz ta áp dụng: $y^2 + a^2z^2 \geq 2ayz$. Để tạo ra zx ta áp dụng: $a^2z^2 + x^2 \geq 2azx$.

Vì hệ số của yz, zx là a nên ta nhân a vào bất đẳng thức đầu tiên rồi cộng lại theo vế ta thu được

$$a(xy + yz + zx) \leq \frac{a\left(x^2 + y^2\right) + \left(y^2 + a^2z^2\right) + \left(a^2z^2 + x^2\right)}{2} = \frac{(a+1)\left(x^2 + y^2\right) + 2a^2z^2}{2}$$

Hay $2a \leq (a+1)(x^2 + y^2) + 2a^2z^2$. Để tạo ra $P = x^2 + y^2 + 2z^2$ ta cần có tỷ lệ: $(a+1) : 2a^2 = 1 : 2 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta tìm được: $P \geq \frac{2a}{1+a} = \sqrt{5} - 1$. Các em học sinh tự hoàn thiện lời giải.

Ví dụ 9) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của $P = x^2 + y^2 + z^3$

Lời giải:

Ta dự đoán dấu bằng có khi $x = y = a, z = b$; và $2a + b = 3$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $\begin{cases} x^2 + a^2 \geq 2ax \\ y^2 + a^2 \geq 2ay \\ z^3 + b^3 + b^3 \geq 3b^2 z \end{cases}$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta có: $x^2 + y^2 + z^3 + 2a^2 + 2b^3 \geq 2a(x + y) + 3b^2 z$.Tức là:

$x^2 + y^2 + z^3 \geq 2a(x + y) + 3b^2 z - 2a^2 - 2b^3$

Bây giờ ta cần chọn a, b sao cho $2a : 3b^2 = 1 : 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3b^2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$. Giải hệ tìm được: $x = y = a = \dfrac{19 - \sqrt{37}}{12}; z = c = \dfrac{\sqrt{37} - 1}{6}$

Từ đó bạn đọc tự hoàn thiện lời giải:

Ví dụ 10) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$.

Tìm GTNN của $P = 2a^3 + 3b^3 + 4c^3$

Lời giải:

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a = x; b = y; c = z$ với $x, y, z > 0$ và $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

Ta có: $a^3 + a^3 + x^3 \geq 3a^2 x$; $b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2 y$; $c^3 + c^3 + z^3 \geq 3c^2 z$, suy ra $2a^3 \geq 3a^2 x - x^3$

$b^3 + b^3 + y^3 \geq 3b^2 y \Leftrightarrow 3b^3 \geq \dfrac{9}{2} yb^2 - \dfrac{3}{2} y^3$,

$c^3 + c^3 + z^3 \geq 3c^2 z \Leftrightarrow 2c^3 \geq 3c^2 z - z^3 \Rightarrow 4c^3 \geq 2\left(3c^2 z - z^3\right)$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra: $P \geq 3\left(xa^2 + \dfrac{3}{2} yb^2 + 2zc^2\right) - x^3 - \dfrac{3}{2} y^3 - 2z^3$.

Ta cần chọn x,y,z để: $x:\frac{3}{2}y:2z=1:2:3$ và $x^2+2y^2+3z^2=1$. Áp dụng tính chất dãy tỷ số bằng nhau ta dễ dàng tìm được:

$x=\frac{6}{\sqrt{407}};y=\frac{8}{\sqrt{407}};z=\frac{9}{\sqrt{407}}$. Học sinh tự hoàn thiện lời giải.

Ví dụ 11) Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn: $abc+bcd+cda+dab=1$. Tìm GTNN của $P=4\left(a^3+b^3+c^3\right)+9d^3$.(Trích đề thi vào lớp 10 chuyên Trường chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2012)

Lời giải:

Biểu thức P cho ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=xd$, Để giảm ẩn trong bài toán ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cô si theo cách:

Khi đó $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$, $b^3+c^3+x^3d^3\ge 3xbcd$, $c^3+a^3+x^3d^3\ge 3xcad$, $a^3+b^3+x^3d^3\ge 3xabd$

Suy ra $\begin{cases} x\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3xabc \\ b^3+c^3+x^3d^3\ge 3xbcd \\ c^3+a^3+x^3d^3\ge 3xcad \\ a^3+b^3+x^3d^3\ge 3xabd \end{cases}$. Cộng bốn bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$(x+2)a^3+(x+2)b^3+(x+2)c^3+3x^3d^3\ge 3x(abc+bcd+cda+dab)=3x$.

Bây giờ ta chọn x sao cho $(x+2):3x^3=4:9\Leftrightarrow \frac{x+2}{3x^3}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow 4x^3-3x=6$.

Đặt $x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$ thay vào ta tìm được

$y=\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}, y=\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}\right)$. Bạn đọc tự hoàn thiện lời giải.

2. Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng để bài toán trở nên đơn giản hơn.

ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp hai dạng sau:

Dạng 1: Chứng minh $X+Y+Z \geq A+B+C$

ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $X+Y \geq 2A$. Sau đó, tương tự hóa đẻ chỉ ra $Y+Z \geq 2B$ và $Z+X \geq 2C$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

Dạng 2: Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X,Y,Z \geq 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$ và $ZX = C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có:

$XYZ = \sqrt{A^2B^2C^2} = |ABC| \geq ABC$.

Ví dụ 1. Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2} \geq \sqrt{5}$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 tỉnh Thái Bình năm 2005-2006)

Giải:

Ta cần một đánh giá dạng : $2x^2+xy+2y^2 \geq (mx+ny)^2$ sao cho dấu bằng xảy ra khi $x=y$. Để có được đánh giá này thông thường ta viết lại

$2x^2+xy+2y^2 = a(x-y)^2+b(x+y)^2 = (a+b)x^2+2(b-a)xy+(a+b)y^2$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a+b=2 \\ b-a=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Từ đó ta có:

$$2x^2+xy+2y^2=\frac{3}{4}\left(x-y\right)^2+\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2\ge\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2\Rightarrow\sqrt{2x^2+xy+2y^2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x+y\right)$$

tương tự ta có 2 bất đẳng thức và cộng lại ta
có:

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}\ge\sqrt{5}\left(x+y+z\right)=\sqrt{5}$$

dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Ta cũng có thể chứng minh trực tiếp:

$$\sqrt{2x^2+xy+2y^2}\ge\frac{\sqrt{5}\left(x+y\right)}{2}\Leftrightarrow 2x^2+xy+2y^2\ge\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)^2-3xy\ge\frac{5}{4}\left(x+y\right)^2\Leftrightarrow\frac{\left(x+y\right)^2}{4}\ge xy$$ (đúng theo Cauchy)

Ví dụ 2. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $2abc\left(a+b+c\right)\le\frac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2014).

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có:

$$\begin{cases} a^4b^2+\frac{1}{3}abc^2+\frac{1}{9}ca\ge a^2bc \\ b^4c^2+\frac{1}{3}a^2bc+\frac{1}{9}ab\ge b^2ca \\ c^4a^2+\frac{1}{3}ab^2c+\frac{1}{9}bc\ge c^2ab \end{cases}\Rightarrow\frac{2}{3}abc\left(a+b+c\right)\le a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+\frac{1}{9}\ (1).$$

Mặt khác ta cũng có:

$abc\left(a+b+c\right)=ab.ac+bc.ba+ca.cb\le\frac{1}{3}\left(ab+bc+ca\right)^2=\frac{1}{3}$. Suy ra

$\frac{4}{3}abc\left(a+b+c\right)\le\frac{4}{9}$ (2). Cộng theo vế (1) và (2) ta có đpcm.

Ví dụ 3) Cho ba số dương x, y, z thỏa $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq 2$. Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Giải:

Từ giả thiết $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\geq 2$, ta suy ra:

$$\frac{1}{1+x}\geq\left(1-\frac{1}{1+y}\right)+\left(1-\frac{1}{1+z}\right)=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}\geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\frac{1}{1+y}\geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}};\frac{1}{1+z}\geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta thu được: $\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}\geq\frac{8xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}\Rightarrow xyz=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Cho $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng $(x-2)(y-2)(z-2)\leq 1$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005-2006).

Lời giải:

Với giả thiết $x, y, z > 2$, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Đặt $x=a+2; y=b+2; z=c+2$ với $a, b, c > 0$. Bài toán quay về chứng minh $abc \leq 1$

Với $a,b,c>0$ thỏa mãn: $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$.

Ta có:

$$\frac{1}{c+2}=1-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{b+2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b+2}\right)$$

$$=\frac{a}{2(a+2)}+\frac{b}{2(b+2)}\geq\sqrt{\frac{ab}{(a+2)(b+2)}}$$

Tương tự: $\frac{1}{b+2}\geq\sqrt{\frac{ca}{(c+2)(a+2)}};\frac{1}{a+2}\geq\sqrt{\frac{bc}{(b+2)(c+2)}}$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được:

$$\frac{1}{(a+2)(b+2)(c+2)}\geq\frac{abc}{(a+2)(b+2)(c+2)}\Rightarrow abc\leq 1.$$

Ví dụ 5) Cho x,y,z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right).$$

Giải:

Ta có $P=\frac{(2x+y+z)+(2y+z+x)(2z+x+y)}{8(x+y)(y+z)(z+x)}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$2x+y+z=(x+y)(x+z)\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \quad (2)$$

$$2y+z+x=(y+z)(y+x)\geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)} \quad (3)$$

$$2z+x+y=(z+x)(z+y)\geq 2\sqrt{(z+x)(z+y)} \quad (4)$$

Nhân từng vế của (2),(3),(4) và từ (1) suy ra $P\geq 1$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2),(3),(4)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=x+z \\ y+z=y+x \\ z+x=z+y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z>0$ .Từ đó suy ra $\min P=1$.

3. Kỹ thuật cô si ngược dấu:

Ví dụ 1. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge \frac{3}{2}$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\frac{a}{b^3+ab}=\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\ge \frac{1}{b}-\frac{b}{2\sqrt{ab^2}}=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\ge \frac{1}{b}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+1\right)$. Tương tự:

$\frac{b}{c^3+bc}\ge \frac{1}{c}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+1\right);\frac{c}{a^3+ca}\ge \frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+1\right)$

Cộng ba bất đẳng thức này lại vế theo vế, ta được:

$$\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{4}$$

Bài toán được quy về chứng minh: $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{3}{4}\ge \frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+a\right)+\left(\frac{1}{b}+b\right)+\left(\frac{1}{c}+c\right)\ge 3+a+b+c=6$. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\frac{1}{a}+a\ge 2,=;\frac{1}{b}+b\ge 2;\frac{1}{c}+c\ge 2$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2) Cho $a,b,c>0, a+b+c=9$. Chứng minh:
$\frac{a^3+b^3}{ab+9}+\frac{b^3+c^3}{bc+9}+\frac{c^3+a^3}{ac+9}\geq 9$.

Ta chứng minh
được

$$a^3+b^3\geq\frac{1}{4}(a+b)^3, ab\leq\frac{1}{4}(a+b)^2\Rightarrow\frac{a^3+b^3}{ab+9}\geq\frac{\left(a+b\right)^3}{(a+b)^2+36}=a+b-\frac{36(a+b)}{(a+b)^2+36}$$

Mặt khác ta có: $(a+b)^2+36\geq 12(a+b)$. Suy ra $\frac{a^3+b^3}{ab+9}\geq a+b-3$. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.

Ví dụ 3) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{1+y^2}=x-\frac{xy^2}{1+y^2}$. Theo bất đẳng thức Cô si thì $1+y^2\geq 2y$ Suy ra $\frac{x}{1+y^2}\geq x-\frac{xy}{2}$ Tương tự, ta có: $\frac{y}{1+z^2}\geq y-\frac{yz}{2}$, $\frac{z}{1+x^2}\geq z-\frac{zx}{2}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có $P\geq\left(x+y+z\right)-\frac{1}{2}\left(xy+yz+zx\right)$.

Mặt khác theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $3\left(xy+yz+zx\right)\leq\left(x+y+z\right)^2$. Vì $x+y+z=3\Rightarrow xy+yz+zx\leq 3$. Như vậy $\min P=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$

4. **Phương pháp đặt ẩn phụ:**

Kỹ thuật đặt ẩn phụ là một kỹ thuật rất đặc biệt trong chứng minh bất đẳng thức:

Việc chọn ẩn phụ thích hợp sẽ giúp bài toán trở nên đơn giản hơn:

Một số kỹ thuật hay gặp như sau:

1. Khi có giả thiết : $a+b+c=abc$ ta có thể biến đổi thành:

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$ đặt $\frac{1}{a}=x;\frac{1}{b}=y;\frac{1}{c}=z\Rightarrow xy+yz+zx=1$.

2. Khi gặp giả thiết $a+b+c=1$ ta có thể viết thành:

$\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{bc}{a}.\frac{ba}{c}}+\sqrt{\frac{ac}{b}.\frac{cb}{a}}=1$. Đặt

$\sqrt{\frac{ab}{c}}=x,\sqrt{\frac{bc}{a}}=y,\sqrt{\frac{ca}{b}}=z\Rightarrow xy+yz+zx=1$.

3. Khi gặp giả thiết: $ab+bc+ca+abc=4$. Ta có thể viết thành:

$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$. Đặt

$x=\frac{1}{a+2};y=\frac{1}{b+2};z=\frac{1}{c+2}\Rightarrow x+y+z=1$.

4. Từ điều hiển nhiên:

+

$$\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{y+z}{x}}+\frac{1}{1+\frac{z+x}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x+y}{z}}=1$$

. Đặt $a=\frac{y+z}{x};b=\frac{z+x}{y};c=\frac{x+y}{z}$ ta suy ra

$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1\Leftrightarrow abc=a+b+c+2$. Từ đó suy ra khi gặp giả thiết: $abc=a+b+c+2$ ta có thể đặt:

$a=\frac{y+z}{x};b=\frac{z+x}{y};c=\frac{x+y}{z}$

+ Nếu đổi $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}\right)$ ta có: $abc=a+b+c+2$ tương đương với $ab+bc+ca+2abc=1$. Vì vậy khi gặp giả thiết

$ab+bc+ca+2abc=1$ ta có thể đặt $a=\frac{x}{y+z};b=\frac{y}{z+x};c=\frac{z}{x+y}$.

Một cách tổng quát: Khi gặp giả thiết: $\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}+\frac{1}{k+c}=1$ khi khai triển thu gọn ta có:

$k^3-3k^2+\left(k^2-2k\right)\left(a+b+c\right)+\left(k-1\right)\left(ab+bc+ca\right)+abc=0$. Suy ra tồn tại các số x,y,z sao cho

$\frac{1}{k+a}=\frac{x}{x+y+z};\frac{1}{k+b}=\frac{y}{x+y+z};\frac{1}{k+c}=\frac{z}{x+y+z}$. Như vậy: Với các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}+\frac{1}{k+c}=1$. Thì tồn tại các số $m,n,p>0$ sao cho:

$a=\frac{m+n+p}{m}-k;b=\frac{m+n+p}{n}-k;c=\frac{m+n+p}{p}-k$.

+ Nếu $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca+abc=4$ thì ta có thể đặt

$a=\frac{2m}{n+p};b=\frac{2n}{p+m};c=\frac{2p}{m+n}$.

+ Nếu $a,b,c>0$ và $a+b+c+1=4abc$ thì ta có thể đặt

$a=\frac{n+p}{2m};b=\frac{p+m}{2n};c=\frac{m+n}{2p}$..

5. Khi gặp giả thiết: $xyz=1$. Ta có thể chọn các phép đặt:

   $\frac{a^2}{b}=x;\frac{b^2}{c}=y;\frac{c^2}{a}=z\Rightarrow abc=1;\ \frac{a^2}{bc}=x;\frac{b^2}{ac}=y;\frac{c^2}{ab}=z$ hoặc

   $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}\ldots$

6. Đặt: $x=a+b-c;y=b+c-a;z=c+a-b$ hoặc đặt

   $x=a+b;y=b+c;z=c+a\ \ldots$

Ví dụ 1: Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Lời giải:

Từ giả thiết $x+y+z=xyz$, ta có $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$. Đặt

$a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};\text{c}=\frac{1}{z}\Rightarrow a,b,c>0$

Giả thiết trở thành: $ab+bc+ca=1$, $P=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ Để ý rằng: $a^2+1=(a+b)(a+c);b^2+1=(b+a)(b+c),c^2+1=(c+a)(c+b)$

Lúc này P có dạng

$P=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$

$=\sqrt{\frac{a}{a+b}}\sqrt{\frac{a}{a+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+b}}\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\sqrt{\frac{c}{c+b}}$. Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $P\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}\right)=\frac{3}{2}$ hay $P\le\frac{3}{2}$.

Dấu = xảy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=y=z=\sqrt{3}$. Vậy $\max P=\frac{3}{2}$. Giá trị lớn nhất đạt được khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{3}$.

Ví dụ 2) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3xyz$ .Chứng minh:

$\frac{yz}{x^3(z+2y)}+\frac{zx}{y^3(x+2z)}+\frac{xy}{z^3(y+2x)}\ge1$.

Lời Giải:

Đặt $P=\frac{yz}{x^3(z+2y)}+\frac{zx}{y^3(x+2z)}+\frac{xy}{z^3(y+2x)}$, đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}$. Từ giả thiết ta có $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=3$. Lúc này dễ thấy

$P=\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$\frac{9a^3}{b+2c}+(b+2c)a\ge6a^2$, $\frac{9b^3}{c+2a}+(c+2a)b\ge6b^2$,

$\dfrac{9c^3}{a+2b}+(a+2b)c\ge 6c^2$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta có $9P+3(ab+bc+ca)\ge 6\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Mặt khác ta có kết quả quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ kết hợp với $ab+bc+ca=3$ suy ra $P\ge 1$. Vậy $\min P=1$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng: $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$.

Lời giải:

Đặt $x=a+b-c, y=b+c-a, z=c+a-b \Rightarrow a+b+c=\dfrac{x+y+z}{2}$. Từ đó ta suy ra $a=\dfrac{z+x}{2}; b=\dfrac{x+y}{2}; c=\dfrac{y+z}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$. Đây là bất đẳng thức quen thuộc (xem ở 1).

Ví dụ 4. Cho $x,y,z>2$ và $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng $(x-2)(y-2)(z-2)\le 1$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2005-2006).

Giải:

Với giả thiết $x,y,z>2$, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn.

Đặt $x=a+2; y=b+2; z=c+2$ với $a,b,c>0$. Bài toán quay về chứng minh $abc\le 1$

Với $a,b,c>0$ thỏa mãn:

$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2}=1$.Đến đây ta đặt tiếp

$m=\frac{a}{a+2}; n=\frac{b}{b+2}; p=\frac{c}{c+2} \Rightarrow m+n+p=1$. Ta có:

$\frac{1}{m}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a}=\frac{1}{m}-1=\frac{n+p}{m} \Rightarrow a=\frac{2m}{n+p}$. Tương tự:

$b=\frac{2n}{p+m}; c=\frac{2p}{m+n}$

Do đó bất đẳng thức trở thành: $\frac{2m}{n+p}.\frac{2n}{p+m}.\frac{2p}{m+n} \le 1 \Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m) \ge 8mnp$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $(m+n)(n+p)(p+m) \ge 2\sqrt{mn}.2\sqrt{np}.2\sqrt{pm}=8mnp$.

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=3$.

Ví dụ 5. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$

Chứng minh rằng: $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \le 3$.

Lời giải:

Ta có:

$ab+bc+ca+abc=4 \Leftrightarrow abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8=12+ab+bc+ca+4$

$\Leftrightarrow (a+2)(b+2)(c+2)=(a+2)(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)$

$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$.

Suy ra tồn tại các số dương m,n,p sao cho: $a=\frac{2m}{n+p}, b=\frac{2n}{p+m}, c=\frac{2p}{m+n}$.

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh ta được: $\sqrt{\frac{2m}{n+p}.\frac{2n}{p+m}}+\sqrt{\frac{2n}{p+m}.\frac{2p}{m+n}}+\sqrt{\frac{2p}{m+n}.\frac{2m}{n+p}}\le 3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}}+2\sqrt{\frac{n}{m+n}.\frac{p}{m+p}}+2\sqrt{\frac{p}{n+p}.\frac{m}{m+n}}\le 3$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta

có: $2\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}}\le\frac{m}{m+p}+\frac{n}{n+p}$ $2\sqrt{\frac{n}{m+n}.\frac{p}{m+p}}\le\frac{n}{m+n}+\frac{p}{m+p}$,

$2\sqrt{\frac{p}{n+p}.\frac{m}{m+n}}\le\frac{p}{n+p}+\frac{m}{m+n}$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được:

$$2\sqrt{\frac{m}{m+p}.\frac{n}{n+p}}+2\sqrt{\frac{n}{m+n}.\frac{p}{m+p}}+2\sqrt{\frac{p}{n+p}.\frac{m}{m+n}}\le\frac{m+n}{m+n}+\frac{n+p}{n+p}+\frac{m+p}{m+p}=3$$

BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Cho x,y,z là các số thực không âm và số thực dương t. Khi đó ta có:

$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-y)(z-x)\ge 0$ (*)

Đây là bất đẳng thức có khá nhiều ứng dụng và tương đối chặt nhiều bài toán Bđt chỉ là hệ quả của BĐT này. Việc chứng minh (*) khá đơn giản:

Giả sử:
$x\ge y\ge z\Rightarrow (*)\Leftrightarrow (x-y)\left[x^t(x-z)-y^t(y-x)\right]+z^t(z-y)(z-x)\ge 0$. Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi cả 3 số bằng nhau hoặc hai số bằng nhau, một số bằng 0.

Các bất đẳng thức suy ra từ BĐT SCHUR khi $t=1$ là:

1) $a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$.

2) $(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

3) $abc \ge (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

4) $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c} \ge 2(ab+bc+ca)$.

5) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$.

Các BĐT (4) (5) còn gọi là BĐT SCHUR dạng phân thức khi $t=1$.

Ngoài ra cần chú ý biến đổi:

$a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left[\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ca\right)\right]$.Hoặc:

$a^3+b^3+c^3-3abc=\left(a+b+c\right)\left[a^2+b^2+c^2-\left(ab+bc+ca\right)\right]$

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1) Cho a,b,c là ba số thực không âm và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $9abc \ge 4\left(ab+bc+ca\right)-1$.

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng:

$\left(a+b+c\right)^3+9abc \ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$.Thay $a+b+c=1$ ta có: $1+9abc \ge 4\left(ab+bc+ca\right)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng $\dfrac{1}{2}$ và 1 số bằng 0 hoặc $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 2) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca+abc \le 4$.

Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+a+b+c \ge 2\left(ab+bc+ca\right)$.(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Áp dụng BĐT Schur dạng phân số ta có:

$a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c} \ge 2(ab+bc+ca)$. Để chứng minh bài toán ta chỉ cần chỉ ra: $a+b+c \geq \dfrac{9abc}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 9abc$. Theo bất đẳng thức Cô si

ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 9\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$. Ta chứng minh:

$abc \leq 1$. Thật vậy từ giả thiết ta có: $ab+bc+ca+abc \leq 4$ mà

$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Đặt $t=\sqrt[3]{abc}$ ta suy ra:

$t^3+3t^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Suy ra $abc \leq 1$ hay

$\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 \geq abc$ suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3) Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \geq 1$.

Lời giải:

Ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\right]=1-3(ab+bc+ca)$$

Suy ra

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc=27abc+4-12(ab+bc+ca)$$

$\geq 3\left[4(ab+bc+ca)-1\right]+4-12(ab+bc+ca)=1$. Theo ví dụ 1 ta có:

$9abc \geq 4(ab+bc+ca)-1$. Từ đó suy ra:

$$27abc+4-12(ab+bc+ca) \geq 3\left[4(ab+bc+ca)-1\right]+4-12(ab+bc+ca)=1$$

Hay $4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có hai số bằng $\dfrac{1}{2}$ và 1 số bằng 0 hoặc $a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 4) Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq (ab+bc+ca)$ (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 Trường chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)

Lời giải:

Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x; \sqrt[3]{b^2}=y; \sqrt[3]{c^2}=z$

Suy ra: $a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3 \Rightarrow a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}$ và $x, y, z \ge 0$ .Bất đẳng thức đã cho thành:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right)$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta suy ra:

$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $xy(x+y) \ge 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3y^3}$.

Tương tự ta có: $yz(y+z) \ge 2\sqrt{y^3z^3}$, $zx(z+x) \ge 2\sqrt{z^3x^3}$ Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được:

$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \ge 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge 2\left(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}\right)$

Hay $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \ge (ab + bc + ca)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c$.

Ví dụ 5) Cho a, b, c là các số thực dương có tổng bằng 1.Chứng minh rằng $6\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 1 \ge 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Lời giải:

Ta có:

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right] = 1 - 3(ab+bc+ca)$

suy ra

$6\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 1 = 6\left[1 - 3(ab+bc+ca)\right] + 18abc + 1$

$= 1 + 18abc + 6(a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca) =$

$1 + 18abc + 5(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 - 18(ab+bc+ca)$

$= 1 + 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 18abc + (a+b+c)^2 - 8(ab+bc+ca)$

$= 5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\left[9abc + 1 - 4(ab+bc+ca)\right]$ .Theo ví dụ 1 ta có:

$9abc \geq 4(ab+bc+ca)-1 \Rightarrow 9abc+1-4(ab+bc+ca) \geq 0$. Suy ra $6(a^3+b^3+c^3)+1 \geq 5(a^2+b^2+c^2)$.

Ví dụ 6) Cho a,b,c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$(a+b+c)^2+2abc+1 \geq 4(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2abc+1 \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$, Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng phân số ta có: $a^2+b^2+c^2+\dfrac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$

Hay : $\dfrac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $2abc+1 \geq \dfrac{9abc}{a+b+c}$ hay $\left(\dfrac{9}{a+b+c}-2\right)abc \leq 1$.

Nếu $S \geq \dfrac{9}{2}$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng. Nếu $a+b+c \leq \dfrac{9}{2}$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta

được: $\left(\dfrac{9}{a+b+c}-2\right)abc \leq \dfrac{9-2s}{s}.\dfrac{s^3}{27} \leq \dfrac{1}{27}\left(\dfrac{s+s+(9-2s)}{3}\right)^3 = 1$ với $s=a+b+c$

Ví dụ 7) Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+6abc \geq a+b+c$.

Lời giải:

Ta có:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right]$

$=(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2-1\right]$. Suy ra

$a^3+b^3+c^3+6abc=9abc+(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-1\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Schur dạng: $(a+b+c)^3+9abc\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$. Ta suy ra:

$9abc+(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-1\right)\ge 4s-s^3+\left(a^2+b^2+c^2\right)s-s$

$=s\left(3-s^2+a^2+b^2+c^2\right)=s$ với $s=a+b+c$.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc có hai số bằng 1, một số bằng 0.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN CƠ BẢN

Câu 1) Cho $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}\ge 2$.

Câu 2) Chứng minh rằng với mọi số thực khác không x, y, ta có:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Câu 3). Chứng minh rằng với mọi số thực khác không x, y ta có:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Câu 4) Cho $x\ge 1, y\ge 1$. Chứng minh rằng $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}\le xy$.

Câu 5) Cho hai số thực x, y khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\ge 3.$$

Câu 6. Cho các số thực dương a, b. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$$

Câu 7) Cho các số thực dương a,b. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2ab}{a+b}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\sqrt{ab}+\frac{a+b}{2}.$$

Câu 8) Cho $a,b,c\in[-1;2]$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2\leq 6$;
b) $2abc\leq a^2+b^2+c^2\leq 2abc+2$;
c) $a^2+b^2+c^2\leq 8-abc$.

Câu 9) Cho các số thực không âm a,b,c.

Chứng minh rằng $(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$.

Câu 10) Cho $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$

Câu 11) Cho các số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng $\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 33$.

Câu 12) Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng
$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$.

Câu 13) Cho các số $x,y,z\geq 0$ và $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $x+2y+z\geq 4(1-x)(1-y)(1-z)$.

Câu 14) Cho các số thực dương a,b. Chứng minh:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2}\le\frac{3}{5}$$

Câu 15) Cho các số thực dương a,b. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{16}{a+b}\ge 5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Câu 16) Cho các số thực dương a,b. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b}\ge 2\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

Câu 17) Giả sử x,y là những số thực không âm thỏa mãn:

$x^3+y^3+xy=x^2+y^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}.$$

Câu 18) Cho a,b,c dương thỏa mãn: $6a+3b+2c=abc$.Tìm giá trị lớn nhất của $B=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{b^2+4}}+\dfrac{3}{\sqrt{c^2+9}}$.

Câu 19) Cho các số a,b,c không âm. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge(ab+bc+ca)$.Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 20) Cho các số thực dương a,b sao cho $ab+1\le b$. Tìm GTNN của

$$P=a+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI;

Câu 1) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\sqrt{3-4x}+\sqrt{1+4x}\right)^2\ge 4$$

$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{3-4x}\sqrt{1+4x}\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3-4x}\sqrt{1+4x}\geq 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 2) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\geq \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2y^2}\geq 0$$

Mà $2\left(x^2+xy+y^2\right)=x^2+y^2+\left(x+y\right)^2>0, \forall x,y\neq 0$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y\neq 0$.

Câu 3) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+4\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+2\geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2y^2}\geq 0$$

Mà $2\left(x^2-xy+y^2\right)=x^2+y^2+\left(x-y\right)^2>0$ với mọi số thực x,y khác 0 nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y\neq 0$.

Câu 4)

Đặt $a=\sqrt{x-1}, b=\sqrt{y-1}$ thì $a\geq 0, b\geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(a^2+1\right)b+\left(b^2+1\right)a\leq \left(a^2+1\right)b+\left(b^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+1\right)b+\left(b^2+1\right)-2\left(a^2+1\right)b++\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-2\left(b^2+1\right)a\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+1\right)b+\left(b^2+1\right)+\left(b^2+1\right)\left(a-1\right)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$ hay $x=y=2$.

Câu 5) Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{4x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-1+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\ge 0\Leftrightarrow \frac{4x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2y^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(x^2-y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2y^2}\ge 0\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^2.\left[\frac{1}{x^2y^2}-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^2\frac{\left(x^2-y^2\right)^2-x^2y^2}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}\ge 0\Leftrightarrow \left(x^2-y^2\right)^2\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=\pm y$.

Câu 6)

Dấu đẳng thức xảy ra với $a=b$ khi và chỉ khi: $\dfrac{a^2b}{2a^3+b^3}=\dfrac{1}{3};\dfrac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}=1$.

Ta có biến đổi sau:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3}\ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}\Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3}-\frac{1}{3}\ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^3+b^3)} \geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{2a^2+b^2}-\frac{2a-b}{3(2a^3+b^3)}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[3(2a^3+b^3)-(2a^2+b^2)(2a+b)\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0$$ (đpcm).

Câu 7) Ta có: $\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}-ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}=\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}-\frac{1}{a+b} \geq 0\right]$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[2a+2b-\sqrt{2(a^2+b^2)}-2\sqrt{ab}\right] \geq 0$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$2a+2b-\sqrt{2(a^2+b^2)}-2\sqrt{ab} \geq 0$ (*)

$$a+b-\sqrt{2(a^2+b^2)}=-\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}$$

$$a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\frac{(a-b)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}$$

Do vậy bất đẳng thức (*) tương đương với:

$$(a-b)^2\left[\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+(a+b)}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+a+b-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}-2\sqrt{ab}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\frac{2\left(a^2+b^2\right)-4ab}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\sqrt{ab}}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}+2\sqrt{ab}}\ge 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 8) Vì $a,b,c\in[-1;2]$ nên có một số bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$(a+1)(a-2)\le 0,(a+1)(b+1)(c+1)\ge 0,(a-2)(b-2)(c-2)\le 0$.

a) Do $a,b,c\in[-1;2]$ nên $(a+1)(a-2)\le 0\Leftrightarrow a^2\le a+2$.

   Tương tự ta suy ra: $a^2+b^2+c^2\le a+b+c+6=6$ (do $a+b+c=0$).

b) Vì $a,b,c\in[-1;2]$ nên $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 0$, hay

   $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1\ge 0$

   $\Leftrightarrow abc+ab+bc+ca+1\ge 0$ (do $a+b+c=0$) (1)

   Mặt khác cũng vì $a+b+c=0$ nên $(a+b+c)^2=0$, tức là

$$ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$abc-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+1\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le 2+2abc$$

Dấu đẳng thức có, chẳng hạn $a=-1,b=1,c=0$

Ta còn phải chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge 2abc$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$

Từ đó suy ra $-1\le c\le \frac{a+b+c}{3}\le 0 \Rightarrow |c|\le 1$

Sử dụng đánh giá này, ta được $2abc\le 2|a|.|b|.|c|\le 2|a|.|b|$

Suy ra $a^2+b^2+c^2-2abc\ge a^2+b^2+c^2-2|a|.|b|=\left(|a|-|b|\right)^2+c^2\ge 0$

Dấu đẳng thức có khi $a=b=c=0$.

c) Vì $a,b,c\in[-1;2]$ nên $(a-2)(b-2)(c-2)\le 0$, hay

$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8\le 0$$

$$\Leftrightarrow abc-2(ab+bc+ca)-8\le 0 \text{ (do } a+b+c=0\text{)} \quad (3)$$

Từ (3) và (2) ta có: $abc+a^2+b^2+c^2-8\le 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\le 8-abc$

Dấu đẳng thức có, chẳng hạn $a=2,b=-1,c=-1$.

Câu 12. Cho $a,b,c\in[0;2]$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $3\le a^3+b^3+c^3-3(a-1)(b-1)(c-1)\le 9$.

Giải:

Đặt $a=x+1,b=y+1,c=z+1$ thì $x,y,z\in[-1;1]$ và $x+y+z=0$

Ta có $P=a^3+b^3+c^3-3(a-1)(b-1)(c-1)$

$$=(x+1)^3+(y+1)^3+(z+1)^3-3xyz$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz+3\left(x^2+y^2+z^2\right)+3(x+y+z)+3$$

Mà $x+y+z=0$ nên

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)=0$$

Do đó $P=3\left(x^2+y^2+z^2\right)+3$

Vậy ta có $0\le x^2+y^2+z^2\le 2$ nên $3\le P\le 9$.

Câu 9)

Giải:

Ta có: $(a+b+c)^3\ge a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

Nên bất đẳng thức đã cho tương đương với: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

$$\Leftrightarrow ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2\ge 6abc$$

$$\Leftrightarrow ab^2-2abc+ac^2+bc^2-2abc+ba^2+ca^2-2abc+cb^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 10)

Ta có $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{a(a+b+c)-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b(a+b+c)-ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c(a+b+c)-ab}{(c+a)(c+b)}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^2+ab+ac-bc\right)(b+c)+\left(b^2+ba+bc-ca\right)(c+a)+$$

$$\left(c^2+ca+ca-ab\right)\left(a+b\right)\le\frac{3}{2}\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

$$\Leftrightarrow ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2\ge 6abc$$

$$\Leftrightarrow a\left(b-c\right)^2+b\left(c-a\right)^2+c\left(a-b\right)^2\ge 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Câu 11)

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}-6+\frac{9\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2}-27\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{abc}-\frac{18\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)}{a^2+b^2+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{9}{a^2+b^2+c^2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right]\left[\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-9abc\right]\ge 0$$

Do $\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)-9abc\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc+a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)-6abc\ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

$$=\frac{(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{2}\ge 0$$

Và

$$a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)-6abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 12) Giải:

Từ hằng đẳng thức:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2+2bc-ab-ac\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(b^2-c^2+2ca-bc-ba\right)^2+\frac{1}{2}\left(c^2-a^2+2ab-ca-cb\right)^2$$

Suy ra ta có điều phải chứng minh.

Câu 13)

Do $x+y+z=1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$(x+2y+z)(x+y+z)^2\ge 4(x+y)(y+z)(z+x)$$

Do vai trò của x và z trong bất đẳng thức trên là như nhau nên ta hoàn toàn có thể giả sử $x\ge z$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $(a+b)^2\ge 4ab$, ta có $(x+y+z)^2\ge 4x(y+z)$.

Sử dụng đánh giá này, dễ thấy chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$x\left(x+2y+z\right)\geq\left(x+y\right)\left(z+x\right)\Leftrightarrow y\left(x-z\right)\geq 0$, hiển nhiên đúng theo giả sử $x\geq z$.

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=z=\frac{1}{2}; y=0$.

Câu 14) Viết lại bất đẳng thức thành:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{b^2}{3a^2+2b^2}\leq\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{5}-\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{1}{5}-\frac{b^2}{3a^2+2b^2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2a^2-10ab+8b^2}{a^2+4b^2}+\frac{3a^2-3b^2}{3a^2+2b^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(a-b\right)\left(a-4b\right)}{a^2+4b^2}+\frac{3\left(a-b\right)\left(a+b\right)}{3a^2+2b^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left[2\left(a-4b\right)\left(3a^2+2b^2\right)+3\left(a+b\right)\left(a^2+4b^2\right)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(9a^3-21a^2b+16ab^2-4b^3\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\left(3a-2b\right)^2\geq 0$$

Ta có điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ hoặc $a=\frac{2}{3}b$.

Câu 15) Vì $a,b>0$ nên bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}+4\left(\frac{4}{a+b}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a-b}{b^2+}+\frac{b-a}{a^2}+4\frac{4ab-\left(a+b\right)^2}{\left(a+b\right)ab}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}-\frac{4(a-b)^2}{(a+b)ab}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[(a+b)^2-4ab\right]\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^4\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên có điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b>0$.

Câu 16) Bài toán này có chứa căn nên để xuất hiện nhân tử chung dạng $(a-b)^2$ ta cần chú ý đến phép biến đổi

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)=\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}$$

Khi đó:

$$\frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b}\geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2+2ab+3b^2}{a+b}-2(a+b)\geq 2\sqrt{2(a^2+b^2)}-2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a+b}\geq \frac{2(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)-2(a+b)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)\right]\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b}\geq 0$$ Bất đẳng thức cuối cùng đúng do a,b dương.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Câu 17)

$x^3+y^3+xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+xy=(x+y)^2-2xy$

Đặt $x+y=a; xy=b$, ta có:

$a^3-3ab+3b-a^2=0 \Leftrightarrow a^2(a-1)-3b(a-1)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^2-3b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^2=3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ (x+y)^2=3xy \end{array}\right.$

Vì $(x+y)^2 \geq 4xy; \forall x, y \neq 0$ suy ra $x=y=0$ hoặc $x+y=1$

Với $x=y=0$ thì $P=\frac{5}{2}$

Nếu x hoặc y khác 0, ta có $x+y=1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$,

$P(\min)=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}; P(\max)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy $P(\min)=\frac{4}{3}$ khi $x=0, y=1; P(\max)=4$ khi $x=1; y=0$.

Câu 18) Đặt $x=a, y=\frac{b}{2}, z=\frac{c}{3}$ thì x, y, z là các số dương và $x+y+z=xyz$.

Khi đó: $A=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\frac{xyz}{x^2(x+y+z)+xyz}}=\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{y}{2(x+y)}+\frac{z}{2(x+z)}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \leq \frac{x}{2(x+y)}+\frac{z}{2(y+z)}; \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{x}{2(x+z)}+\frac{y}{2(y+z)}$$

$\Rightarrow A \leq \frac{x+y}{2(x+y)}+\frac{x+z}{2(x+z)}+\frac{y+z}{2(y+z)}=\frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{3}$ .Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{3}{2}$ đạt được khi và chỉ khi $a=\sqrt{3}, b=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{3}$.

Câu 19) Đặt $\sqrt[3]{a^2}=x; \sqrt[3]{b^2}=y; \sqrt[3]{c^2}=z$

Suy ra: $a^2=x^3; b^2=y^3; c^2=z^3 \Rightarrow a=\sqrt{x^3}; b=\sqrt{y^3}; c=\sqrt{z^3}$ và $x, y, z \geq 0$.

Bất đẳng thức đã cho thành:

$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$ (1)

Vì vai trò của x,y,z bình đẳng nên có thể giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$

Khi đó: $x(x-y)^2+z(y-z)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z)\ge 0$

Suy ra: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $xy(x+y)\ge 2xy\sqrt{xy}=2\sqrt{x^3y^3}$ (3)

Tương tự ta có: $yz(y+z)\ge 2\sqrt{y^3z^3}$ (4)

$zx(z+x)\ge 2\sqrt{z^3x^3}$ (5). Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3),(4),(5) ta được: $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$ (6)

Từ (2) và (6) ta có: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge 2\left(\sqrt{x^3y^3}+\sqrt{y^3z^3}+\sqrt{z^3x^3}\right)$

Hay $a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{(abc)^2}\ge (ab+bc+ca)$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$.

Câu 20) Giả thiết ta suy ra $a+\frac{1}{b}\le 1$.Ta có $P=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2}+b^2\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}+2\frac{b}{a}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{a}{b}}\le\frac{a+\frac{1}{b}}{2}\le\frac{1}{2}$. Ta chứng minh: $P\ge 9$. Thật vậy ta có:

$2t+\frac{2}{t^2}-9=\frac{2t^3-9t^2+2}{t^2}=\frac{(2t-1)(t^2-4t-2)}{t^2}\ge 0$. Do $0<t\le\frac{1}{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4a\\ a+\frac{1}{b}=1\end{cases}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN NÂNG CAO

Câu 1) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}$.

Câu 2) Cho x,y,z là ba số thực dương và $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^2+z^2}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^2+x^2}}{zx}.$$

Câu 3) Cho $x\geq 2, y\geq 3, z\geq 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{xy\sqrt{z-4}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}$$

Câu 4) Cho x,y,z là các số dương sao cho $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}$.

Câu 5) Cho $x,y>0$ và thỏa mãn điều kiện $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{6}=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=27x^3+8y^3$.

Câu 6) Cho x,y,z là các số thực dương và $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$.

Câu 7) Cho x,y,z là 3 số dương và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8}-\frac{2}{27}(xy+yz+zx).$$

Câu 8) Cho x,y,z là ba số dương và $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x+1}{y^2+1}+\frac{y+1}{z^2+1}+\frac{z+1}{x^2+1}$

Câu 9) Cho x,y,z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{1+y^2}+\frac{y}{1+z^2}+\frac{z}{1+x^2}$.

Câu 10) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x+2y^3}+\dfrac{y^2}{y+2z^3}+\dfrac{z^2}{z+2x^3}$.

Câu 11) Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$.

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{x+2y}+\dfrac{y^2}{y+2z^2}+\dfrac{z^2}{z+2x^2}$.

Câu 12) Cho x, y, z là ba số thực dương và $x+y+z=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}$.

Câu 13) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{y-2}{y+1}+\dfrac{z-2}{z+1}$

Câu 14) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x^3(y+z)}+\dfrac{1}{y^3(z+1)}+\dfrac{1}{z^3(x+y)}$

Câu 15) Cho $x, y, z>0$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1+y}{1-y}+\dfrac{1+z}{1-z}-2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}\right)$.

Câu 16) Cho x, y, z là các số thực dương.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

Câu 17) Cho x,y,z là ba số dương và $xyz=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{x^5-x^2+3xy+6}}+\frac{1}{\sqrt{y^5-y^2+3yz+6}}+\frac{1}{\sqrt{z^5-z^2+3xy+6}} \qquad (1)$$

Câu 18) Cho $x,y,z\geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\left(xy+yz+zx\right).$$

Câu 19) Cho x,y,z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x^2+2y+3}+\frac{y}{y^2+2z+3}+\frac{z}{z^2+2x+3}.$$

Câu 20) Cho x,y,z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xyz=8$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{\sqrt{\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)}}+\frac{y^2}{\sqrt{\left(1+y^3\right)\left(1+z^3\right)}}+\frac{z^3}{\sqrt{\left(1+z^3\right)\left(1+x^3\right)}}$$

Câu 21) Cho x,y,z là các số thực dương..

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3\left(y+z\right)^3}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^3\left(z+x\right)^3}}+\sqrt{\frac{z^3}{z^3\left(x+y\right)^3}}.$$

Câu 22) Cho $x,y,z\geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $x+Y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{1+y^2+z^2}+\frac{y}{1+z^2+x^2}+\frac{z}{1+x^2+y^2}.$$

Câu 23) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2y^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3 + 2z^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3 + 2x^3 + 6}}.$$

Câu 24) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}.$$

Câu 25) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 6$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{\sqrt{y^3 + 1}} + \dfrac{y}{\sqrt{z^3 + 1}} + \dfrac{z}{\sqrt{x^3 + 1}}$.

Câu 26) Cho x, y, z là ba số dương và thảo mãn điều kiện $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \le 1$.

1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 8y^2 + 14xy}} + \frac{y^2}{\sqrt{3y^2 + 8z^2 + 14yz}} + \frac{z^2}{\sqrt{3z^2 + 8x^2 + 14zx}}.$$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{y+z}{y+1}} + \sqrt{\dfrac{z+x}{z+1}}$.

Câu 27) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.

Câu 28) Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $xyz = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)(y+z)(z+x)-2(x+y+z)$.

Câu 29) Cho các số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}+\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}+\frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}\le 2$

Câu 30) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P=6(ab+bc+ca)+a(a-b)^2+b(b-c)^2+c(c-a)^2$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1)

Từ điều kiện $x+y+z=1$, ta có $x+yz=x(x+y+z)+yz=(x+y)(x+z)$.

Tương tự, ta cũng có
$P=\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$P\le\frac{(x+y)(x+z)}{2}+\frac{(y+z)(y+x)}{2}+\frac{(z+x)(z+y)}{2}$ hay
$P\le 2(x+y+z)=2$

Như vậy $P\le 2$. Dấu bằng trong xảy ra khi
$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=x+z\\y+z=y+x\\z+x=z+y\\x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$. Từ đó ta có $\max P=2\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 2) Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:
$P\ge\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^2}}}{xy}+\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{y^2z^2}}}{yz}+\frac{\sqrt{3\sqrt[3]{z^2x^2}}}{zx}$

Hay $P \ge \sqrt{\dfrac{3}{xy}}+\sqrt{\dfrac{3}{yz}}+\sqrt{\dfrac{3}{zx}}$. Lại theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\sqrt{\dfrac{3}{xy}}+\sqrt{\dfrac{3}{yz}}+\sqrt{\dfrac{3}{zx}} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2y^2z^2}}}$. Do $xyz=1$, nên suy ra $P \ge 3\sqrt{3}$. Vậy $\min P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 3)

Đưa biểu thức về dạng $P=\dfrac{\sqrt{z-4}}{z}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-3}}{y}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{z-4}=\frac{1}{2}\sqrt{(z-4).4} \le \frac{1}{2}\frac{(z-4)+4}{2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-4}}{z} \le \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(x-2).2} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-2)+2}{2}=\frac{x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(y-3).3} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(y-3)+3}{2}=\frac{y}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thứctrên ta có $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Vậy $\max P=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right) \Leftrightarrow x=4, y=6, z=8$.

Câu 4)

Viết lại biểu thức trên dưới dạng: $P=x+\dfrac{1}{2}\sqrt{x.4y}+\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$P \le x + \frac{x+4y}{4} + \frac{x+4y+16z}{12}$ hay $P \le \frac{4(x+y+z)}{3}$. Từ $x+y+z=1$ và (2) suy ra $P \le \frac{4}{3}$. Vậy $\max P = \frac{4}{3}$

Câu 5) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $\frac{x^3}{8}+1+1 \ge 3\frac{x}{2}$; $\frac{y^3}{27}+1+1 \ge 3\frac{y}{3}$; $\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{27}+1 \ge 3\frac{xy}{6}$. Cộng từng vế ta có: $2\left(\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{27}\right)+5 \ge 3\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{6}\right)$.

Do $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{6}=3$, ta có: $\left(\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{27}\right) \ge 2$. Suy ra $P = 27x^3+8y^3 \ge 432$

(4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi $x=2, y=3$. Vậy $\min P = 432$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=2, y=3$.

Câu 6) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8} \ge 3\sqrt{\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}\frac{1+x}{8}\frac{1+y}{8}}$ Hay

$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8} \ge \frac{3x}{4}$. Lập luận tương tự ta có:

$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{1+z}{8}+\frac{1+x}{8} \ge \frac{3y}{4}$ $\quad \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8} \ge \frac{3z}{4}$ Cộng từng vế ta có $P+\frac{3}{4} \ge \frac{1}{2}(x+y+z)$ .Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$. Lại theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ Từ đó suy ra

$P+\frac{3}{4} \ge \frac{3}{2} \Rightarrow P \ge \frac{3}{4}$. Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$ (do $xyz=1$) . Như vậy $\min P = \frac{3}{4}$. Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 7) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $P = \frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y+2}{27}+\frac{y^2-2y+4}{27} \ge \frac{x}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{x^3}{y^3+8} \ge \dfrac{9x+y-y^2-6}{27}$ (1). Dấu bằng trong (1) xảy

$\Leftrightarrow P = \dfrac{x^3}{y^3+8} + \dfrac{y+2}{27} = \dfrac{y^2-2y+4}{27}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1; \dfrac{x^3}{y^3+8} = \dfrac{y+2}{27} \\ y=2; \dfrac{x^3}{y^3+8} = \dfrac{y+2}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ y=2; x=\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$. Lập luận tương tự ta có:

$\dfrac{y^3}{z^3+8} \ge \dfrac{9y+z-z^2-6}{27}$ (2)

$\dfrac{z^3}{x^3+8} \ge \dfrac{9z+x-x^2-6}{27}$ (3). Cộng từng vế (1),(2),(3) và có:

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \ge \frac{10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)-18}{27} \quad (4)$$

Do $x+y+z=3$ nên (4) có

$$\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \ge \frac{30-\left[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right]-18}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} - \frac{2}{27}(xy+yz+zx) \ge \frac{1}{9} \text{ hay } P \ge \frac{1}{9} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (1),(2),(3)
$\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy $\min P = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 8) Ta có: $\frac{x+1}{y^2+1}=x+1-\frac{(x+1)y^2}{y^2+1}$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$y^2+1\geq 2y$

Suy ra $\frac{x+1}{y^2+1}\geq x+1-\frac{(x+1)y^2}{2y}=x+1-\frac{xy+y}{2}$. Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{y+1}{z^2+1}\geq y+1-\frac{yz+z}{2}$; $\frac{z+1}{x^2+1}\geq z+1-\frac{zx+x}{2}$ suy ra

$P\geq 3+\frac{x+y+z-(xy+yz+zx)}{2}$

Do $9=(x+y+z)^3\geq 3(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx\leq 3$. Vậy

$\min P=3\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Câu 9) Giải:

Ta có: $\frac{x}{1+y^2}=x-\frac{xy^2}{1+y^2}$. Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $1+y^2\geq 2y$, khi đó $\frac{xy^2}{1+y^2}\leq\frac{xy^2}{2y}=\frac{xy}{2}$ suy ra: $\frac{x}{1+y^2}\geq x-\frac{xy}{2}$ Tương tự ta có:

$\frac{y}{1+z^2}\geq y-\frac{yz}{2}$; $\frac{z}{1+x^2}\geq z-\frac{zx}{2}$. Cộng từng vế ta có

$P\geq x+y+z-\frac{xy+yz+zx}{2}$

$\Leftrightarrow x=y=z=1$.Do

$x+y+z=3\Rightarrow 9=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow 9\geq (xy+yz+zx)+2(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx\leq 3$ (7). Vậy

$\min P=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 10)

Ta có: $\frac{x^2}{x+2y^3}=x-\frac{2xy^3}{x+2y^3}$. Theo bất đẳng thức Cô si, thì

$x+2y^3=x+y^3+y^3\ge 3\sqrt[3]{xy^6}=3y^2\sqrt[3]{x}$ suy ra

$\frac{x^2}{x+2y^3}\ge x-\frac{2xy^3}{2y^2\sqrt[3]{x}}=x-\frac{2}{3}y\sqrt[3]{x^2}$. Tương tự, có: $\frac{y^2}{y+2z^3}\ge y-\frac{2}{3}z\sqrt[3]{z^2}$,

$\frac{z^2}{z+2x^3}\ge z-\frac{2}{3}x\sqrt[3]{z^2}$. Cộng từng vế ta có:

$P\ge (x+y+z)-\frac{2}{3}\left(z\sqrt[3]{y^2}+x\sqrt[3]{z^2}+y\sqrt[3]{x^2}\right)$, hay

$P\ge 3-\frac{2}{3}\left(z\sqrt[3]{y^2}+x\sqrt[3]{z^2}+y\sqrt[3]{x^2}\right)$. Theo bất đẳng thức cô si ta có:

$x+xz+xz\ge 3x\sqrt[3]{z^2}$, $y+yx+yx\ge 3y\sqrt[3]{x^2}$ $z+zy+zy\ge 3z\sqrt[3]{y^2}$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$(x+y+z)+2(xy+yz+zx)\ge 3\left(x\sqrt[3]{z^2}+y\sqrt[3]{x^2}+z\sqrt[3]{y^2}\right)$ vì

$9=(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)\Rightarrow xy+yz+zx\le 3$. Do $x+y+z=3$, suy ra

$3+2.3\ge 3\left(x\sqrt[3]{z^2}+y\sqrt[3]{x^2}+z\sqrt[3]{y^2}\right)\Rightarrow x\sqrt[3]{y^2}+y\sqrt[3]{x^2}+z\sqrt[3]{y^2}\le 3\Rightarrow P\ge 1$

Vậy $\min P=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 11) Ta có: $\frac{x^2}{x+2y^2}=x-\frac{2xy^2}{x+2y^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$x+2y^2=x+y^2+y^2\ge 3\sqrt[3]{xy^4}$. Suy ra $\frac{x^2}{x+2y^2}\ge x-\frac{2xy^2}{3\sqrt[3]{xy^4}}=x-\frac{2}{3}(xy)^{\frac{2}{3}}$.

Tương tự, ta có: $\frac{y^2}{y+2z^2}\ge y-\frac{2}{3}(yz)^{\frac{2}{3}}$, $\frac{z^2}{z+2x^2}\ge z-\frac{2}{3}(zx)^{\frac{2}{3}}$. Cộng theo vế

ta có: $P\ge (x+y+z)-\frac{2}{3}\left[(xy)^{\frac{2}{3}}+(yz)^{\frac{2}{3}}+(zx)^{\frac{2}{3}}\right]$. Theo bất đẳng thức Cô si,

ta có: $x+xy+y\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2}$, $y+yz+z\ge 3\sqrt[3]{y^2z^2}$, $z+zx+x\ge 3\sqrt[3]{z^2x^2}$. Từ đó suy ra $2\left(x+y+z\right)+\left(xy+yz+zx\right)\geq 3\left[\left(xy\right)^{\frac{2}{3}}+\left(yz\right)^{\frac{2}{3}}+\left(zx\right)^{\frac{2}{3}}\right]$ (7) Dễ thấy dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$. Kết hợp với $x+y+z=1$, ta có: $6+3\geq 3\left[\left(xy\right)^{\frac{2}{3}}+\left(yz\right)^{\frac{2}{3}}+\left(zx\right)^{\frac{2}{3}}\right]\Rightarrow\left(xy\right)^{\frac{2}{3}}+\left(yz\right)^{\frac{2}{3}}+\left(zx\right)^{\frac{2}{3}}\leq 3$. Vậy $P\geq 3-\frac{2}{3}.3\Rightarrow P\geq 1$ hay $\min P=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 12) Ta có: $\frac{1}{x^2+1}=1-\frac{x^2}{x^2+1}$. Theo bất đẳng thức Cô si, thì $x^2+1\geq 2x$

$\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}\geq 1-\frac{x^2}{2x}=1-\frac{x}{2}$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2+1}\geq 1-\frac{y}{2}$, $\frac{1}{z^2+1}\geq 1-\frac{z}{2}$. Suy ra $P\geq 3-\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$ (do $x+y+z=3$).

Từ đó suy ra $\min P=3\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 13) Viết lại P dưới dạng: $P=3-3\left(\frac{1}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$. Đặt

$x=\frac{2X}{Y};y=\frac{2Y}{Z};z=\frac{2Z}{X}$

Khi đó có $X,Y,Z>0$ (vì $xyz=8$) Lúc này:

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{\frac{2X}{Y}+1}+\frac{1}{\frac{2Y}{Z}+1}+\frac{1}{\frac{2Z}{X}+1}$

$=\frac{Y}{2X+Y}+\frac{Z}{2Y+Z}+\frac{X}{2Z+X}=\frac{Y^2}{2XY+Y^2}+\frac{Z^2}{2YZ+Z^2}+\frac{X^2}{2ZX+X^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{\left(X+Y+Z\right)^2}{2XY+Y^2+2YZ+Z^2+2ZX+X^2}=\frac{\left(X+Y+Z\right)^2}{\left(X+Y+Z\right)^2}=1,$$

suy ra $P\le 0$. Vậy $\max P=0\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 14) Ta có: $P=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{x\left(y+z\right)}+\dfrac{\frac{1}{y^2}}{y\left(z+1\right)}+\dfrac{\frac{1}{z^2}}{z\left(x+y\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz $P\ge\dfrac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}{2\left(xy+yz+zx\right)}=\dfrac{\left(xy+yz+zx\right)^2}{2\left(xy+yz+zx\right)x^2y^2z^2}$. Do $xyz=1$, nên ta có: $P\ge\dfrac{xy+yz+zx}{2}$

Lại theo bất đẳng thức Cô si ta có: $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}=3$ (do $xyz=1$.

Suy ra $P\ge\dfrac{3}{2}$ Vậy $\min P=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 15) Viết lại biểu thức P dưới dạng:

$$P=1+\frac{2x}{1-x}+1+\frac{2y}{1-y}+\frac{2z}{1-z}-2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=2x\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{z}\right)+2y\left(\frac{1}{1-y}-\frac{1}{x}\right)+2z\left(\frac{}{1-}\right.$$

Do $x+y+z=1$, nên ta có:

$$P=2x\left(\frac{1}{y+z}-\frac{1}{z}\right)+2y\left(\frac{1}{z+x}-\frac{1}{x}\right)+2z\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{y}\right)+3$$

$$=\frac{-2xy}{z\left(y+z\right)}-\frac{2yz}{x\left(z+x\right)}-\frac{2zx}{y\left(x+y\right)}+3=3-2\left(\frac{xy}{z\left(y+z\right)}+\frac{yz}{x\left(z+x\right)}+\frac{zx}{y\left(x+y\right)}\right)$$

. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{xy}{z(x+y)}}\sqrt{y+z}+\sqrt{\frac{yz}{x(z+x)}}\sqrt{z+x}+\sqrt{\frac{zx}{y(x+y)}}\sqrt{x+y}\right)^2$$

$$\leq\left[\frac{xy}{z(x+z)}+\frac{yz}{x(z+x)}+\frac{zx}{y(x+y)}\right]\left[(y+z)(z+x)(x+y)\right]$$

Rõ ràng, ta lại có: $\left(\sqrt{\frac{xy}{z}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}\right)^2\geq 3(x+y+z)$ .Dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ suy ra:

$3(x+y+z)\leq 2\left[\frac{xy}{z(y+z)}+\frac{yz}{x(z+x)}+\frac{zx}{y(x+y)}\right](x+y+z)$ Từ $x+y+z=1$ ta có: $2\left[\frac{xy}{z(y+z)}+\frac{yz}{x(z+x)}+\frac{zx}{y(x+y)}\right]\geq 3$ suy ra $P\leq 0$.

Vậy $\max P=0\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Câu 16)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$(x+y)(x+z)=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2\right]\geq\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}+\sqrt{y}.\sqrt{z}\right)^2$$

$\Rightarrow (x+y)(x+z)\geq\left(x+\sqrt{yz}\right)^2$. Suy ra: $\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leq\frac{x}{2x+\sqrt{yz}}$.

Tương tự, ta có: $\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}\leq\frac{y}{2y+\sqrt{zx}}$,

$\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq\frac{z}{2z+\sqrt{xy}}$. Suy ra

$P \le \dfrac{x}{2x+\sqrt{yz}}+\dfrac{y}{2y+\sqrt{zx}}+\dfrac{z}{2z+\sqrt{xy}}$

$\Rightarrow P \le \dfrac{1}{2+\sqrt{\dfrac{y}{x}}.\sqrt{\dfrac{z}{x}}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{\dfrac{z}{y}}.\sqrt{\dfrac{x}{y}}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{\dfrac{x}{z}}.\sqrt{\dfrac{y}{z}}}$. Đặt

$a=\sqrt{\dfrac{y}{x}}.\sqrt{\dfrac{z}{x}};b=\sqrt{\dfrac{z}{y}}.\sqrt{\dfrac{x}{y}};c=\sqrt{\dfrac{x}{z}}.\sqrt{\dfrac{y}{z}}$, thì $a,b,c>0$ và

$abc=1$. $P \le Q=\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}$

$=\dfrac{(2+b)(2+c)+(2+c)(2+a)+(2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)}$

$=\dfrac{12+4(a+b+c)+(ab+bc+ca)}{8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc}$

$=\dfrac{9+4(a+b+c)(ab+bc+ca)+3}{9+4(a+b+c)(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)}$. Theo bất đẳng thức Cô si

thì : $ab+bc+ca \ge 3\sqrt{(abc)^2}=3$ suy ra $P \le 1$. Vậy

$\max P=1 \Leftrightarrow x=y=z>0$.

Câu 17) Ta có: $x^5-x^2+6-(3x+3)=x^5-x^2-3x+3=x^2\left(x^2-1\right)-3(x-1)$

$=(x-1)\left[\left(x^2+x+1\right)-3\right]=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2-3\right)$

$=(x-1)\left[\left(x^4-1\right)+\left(x^3-1\right)+\left(x^2-1\right)\right]=(x-1)^2\left(x^3+2x^2+3x+3\right)$

Do $x>0 \Rightarrow x^3+2x^2+3x>0$, nên từ (2) suy ra $x^5-x^2+6 \ge 3x+3$

$$\Rightarrow x^5-x^2+6+3xy\ge 3\left(xy+x+1\right)\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^5-x^2+6+3xy}}\le \frac{1}{\sqrt{3\left(xy+x+1\right)}}\ .$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{\sqrt{y^5-y^2+3xyz+6}}\le \frac{1}{\sqrt{3\left(yz+y+1\right)}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{z^5-z^2+3xyz+6}}\le \frac{1}{\sqrt{3\left(zx+z+1\right)}}$$

Suy ra $P\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)\left(1+1+1\right)\ge \left(\frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{yz+y+1}}+\frac{1}{\sqrt{zx+z+1}}\le \sqrt{3\left(\frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}\right)}$$

$\Rightarrow P\le \frac{1}{xy+x+1}+\frac{1}{yz+y+1}+\frac{1}{zx+z+1}=1$. Vậy $\max P=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 18) Ta có: $xy+yz+zx=\frac{\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}=\frac{9-x^2-y^2-z^2}{2}$.

Vậy P có dạng:

$$P=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\frac{9-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}$$

$$\Rightarrow 2P=x^2+y^2+9+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)-9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có: $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\ge 3x \\ y^2+\sqrt{y}+\sqrt{y}\ge 3y \\ z^2+\sqrt{z}+\sqrt{z}\ge 3z \end{cases}$

Suy ra : $x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\geq 3\left(x+y+z\right)=9$ .Vậy $\min P=0 \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 19)

Vì $x^2+1\geq 2x; y^2+1\geq 2y; z^2+1\geq 2z$, nên ta có:

$P\leq \dfrac{x}{2\left(x+y+1\right)}+\dfrac{y}{2\left(y+z+1\right)}+\dfrac{z}{2\left(z+x+1\right)}$ .Ta có:

$$\frac{x}{x+y+1}+\frac{y}{y+z+1}+\frac{z}{z+x+1}=\left(1-\frac{y+1}{x+y+1}\right)+\left(1-\frac{z+1}{y+z+1}\right)+\left(1-\frac{x+1}{z+x+1}\right)$$

$$=3-\left(\frac{y+1}{x+y+1}+\frac{z+1}{y+z+1}+\frac{x+1}{z+x+1}\right)$$

$$\Rightarrow P\leq \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y+1}{x+y+1}+\frac{z+1}{y+z+1}+\frac{x+1}{z+x+1}\right)$$

$\leq \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\left(y+1\right)^2}{\left(y+1\right)\left(x+y+1\right)}+\dfrac{\left(z+1\right)^2}{\left(z+1\right)\left(y+z+1\right)}+\dfrac{\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)\left(z+x+1\right)}\right]$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz :

$$\frac{\left(y+1\right)^2}{\left(y+1\right)\left(x+y+1\right)}+\frac{\left(z+1\right)^2}{\left(z+1\right)\left(y+z+1\right)}+\frac{\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)\left(z+x+1\right)}\geq$$

$\geq \dfrac{\left(y+1+z+1+x+1\right)^2}{\left(y+1\right)\left(x+y+1\right)+\left(z+1\right)\left(y+z+1\right)+\left(x+1\right)\left(z+x+1\right)}$. Để ý rằng do: $x^2+y^2+z^2=3$, nên ta có: $\left(y+1\right)\left(x+y+1\right)\left(z+1\right)\left(y+z+1\right)+\left(x+1\right)\left(z+x+1\right)$

$$=3\left(x+y+z\right)+xy+yz+zx+x^2+y^2+z^2+3$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+9+6x+6y+6z+2xy+2yz+2zx\right)=\frac{1}{2}\left(x+y+z+3\right)^2.$$

$$\frac{(y+1)^2}{(y+1)(x+y+1)}+\frac{(z+1)^2}{(z+1)(y+z+1)}+\frac{(x+1)^2}{(x+1)(z+x+1)}\ge 2$$. Vậy $\max P=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 20) Nhận xét: $\forall a$ thì $4\left(1+a^3\right)\le\left(a^2+2\right)^2$. Thật vậy,

$\Leftrightarrow 4+4a^3\le a^4+4a^2+4\Leftrightarrow a^4-4a^3+4a^2\ge 0\Leftrightarrow a^2(a-1)^2\ge 0$. Cũng có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Cauchy:

$\left(1+a^3\right)=(1+a)\left(1-a+a^2\right)\le\left(\frac{1+a+1-a+a^2}{2}\right)^2=\frac{\left(a^2+2\right)^2}{4}$. Áp dụng vào bài toán ta có:

$$P=\frac{4x^2}{\sqrt{4\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)}}+\frac{4y^2}{\sqrt{\left(1+y^3\right)4\left(1+z^3\right)}}+\frac{4z^2}{\sqrt{4\left(1+z^3\right)\left(1+x^3\right)}}$$

$$\ge\frac{4x^2}{\left(2+x^2\right)\left(2+y^2\right)}+\frac{4y^2}{\left(2+y^2\right)\left(2+z^2\right)}+\frac{4z^2}{\left(2+z^2\right)\left(2+x^2\right)}$$. Đặt $a=\frac{x^2}{4};b=\frac{y^2}{4};c=\frac{z^2}{4}$.

Khi đó do $x,y,z>0$ và $xyz=8\Rightarrow a,b,c>0$ và $abc=1$.

Suy ra: $P\ge\frac{16a}{(2+4a)(2+4b)}+\frac{16b}{(2+4b)(2+4c)}+\frac{16c}{(2+4c)(2+4a)}$. Hay

$$P\ge 4\left[\frac{a}{(1+2a)(1+2b)}+\frac{b}{(1+ab)(1+2c)}+\frac{c}{(1+2c)(1+2a)}\right]$$

$$\Rightarrow P\ge 4\frac{a(1+2c)+b(1+2a)+c(1+2b)}{(1+2a)(1+2b)(1+2c)}\Rightarrow P\ge 4\frac{a+b+c+2(ab+bc+ca)}{1+2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)+8}$$

. Ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\Rightarrow a+b+c+2(ab+bc+ca)\ge 9=1+8abc$

$$\Rightarrow (1+8abc)+\left[2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)\right]\le 3\left[(a+b+c)+2(ab+bc+ca)\right]$$

. Suy ra $P\ge \dfrac{4}{3}$.   Vậy $\min P=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 21) Ta có nhận xét sau: với mọi x,y,z là các số thực dương, ta

có: $\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}\ge \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$ (1) . Thật vậy, (1)

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3(y+z)^3}\ge \frac{x^4}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3\left[x^4+2x^2\left(y^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)^2\right]\ge x^7+x^4(x+z)^3$$

$\Leftrightarrow 2x^2+\left(y^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)^2\ge x(y+z)^3$..Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$2x^2+2x^2\left(y^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)^2\ge 2\sqrt{2x^2\left(y^2+z^2\right)^3}$.   (3). Rõ ràng:

$2\left(y^2+z^2\right)\ge (y+z)^2$ (4)

Từ (3),(4) suy ra: $2x^2\left(y^2+z^2\right)+\left(y^2+z^2\right)^2\ge \sqrt{x^2(y+z)^6}=x(y+z)^3$ (5)

Tương tự (1), ta có: $\sqrt{\dfrac{y^3}{y^3+(z+x)^3}}\ge \dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$ (6),

$\sqrt{\dfrac{z^3}{z^3+(x+y)^3}}\ge \dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$ (7)

Cộng từng vế (1),(6),(7) và có $P\ge 1$ (8)

Vậy $\min P=1\Leftrightarrow x=y=z>0$.

Chú ý: Ta có thể chứng minh: $\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}\ge \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$ nhanh hơn bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cau chy

$\sqrt{a^3+1}=\sqrt{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}\le \frac{a^2+2}{2}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^3+1}}\ge \frac{2}{a^2+2}$ thay $a=\frac{y+z}{x}$

suy ra $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}\ge \frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2}$. Lại có $(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)$ suy ra $\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}\ge \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

Câu 22) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$\left[x\left(1+y^2+z^2\right)+y\left(1+z^2+x^2\right)+z\left(1+x^2+y^2\right)\right]\left(\frac{x}{1+y^2+z^2}+\frac{y}{1+z^2+x^2}+\frac{z}{1+x^2+y^2}\right)$$

Từ (1) và do $x+y+z=1$, ta có:

$P\ge \frac{1}{x\left(1+y^2+z^2\right)+y\left(1+z^2+x^2\right)+z\left(1+x^2+y^2\right)}$. Đặt

$Q=x\left(1+y^2+z^2\right)+y\left(1+z^2+x^2\right)+z\left(1+x^2+y^2\right)$

$=(x+y+z)+xy(x+y)+yz(z+y)+zx(z+x)$

$=1+xy(x+y)+yz(z+y)+zx(z+x)$

$=1+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$. Có thể thấy rằng:

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\le \frac{1}{4}$

Từ đó có: $Q\le \frac{5}{4}\Rightarrow P\ge \frac{4}{5}$.Vậy $\min P=\frac{4}{5}$. Giá trị nhỏ nhất đạt được khi

$x=y=\frac{1}{2};z=0$.

Câu 23) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2y^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{y^3+2z^3+6}}+\frac{1}{\sqrt{z^3+2x^3+6}}\right)\le$$
$$\sqrt{3\left(\frac{1}{x^3+2y^3+6}+\frac{1}{y^3+2z^3+6}+\frac{1}{z^3+2x^3+6}\right)}$$

Hay $P\le\sqrt{3\left(\frac{1}{x^3+2y^3+6}+\frac{1}{y^3+2z^3+6}+\frac{1}{z^3+2x^3+6}\right)}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$x^3+2y^3+6=\left(x^3+y^3+1\right)+\left(y^3+1+1\right)+3\ge 3xy+3y+3$$
$$\Rightarrow x^3+2y^3+6\ge 3\left(xy+y+1\right)$$

Tương tự, có: $y^3+2z^3+6\ge 3\left(yz+z+1\right), z^3+2x^3+6\ge 3\left(zx+x+1\right)$

Suy ra : $P\le\sqrt{\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}}$. Do $xyz=1$, nên dễ thấy $\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}=\frac{1}{xy+y+1}+\frac{xy}{xy+y+1}+\frac{y}{xy+y+1}=1$
suy ra $P\le 1$

Vậy $\max P=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 24) Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $y+z\ge 2\sqrt{yz}=2\sqrt{\frac{1}{x}}$ (do $xyz=1$)

Từ đó suy ra: $x^2\left(y+z\right)\ge 2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}\Rightarrow\frac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}\ge\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}$ (1)

Lập luận tương tự, có:
$\frac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}\ge\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}},\frac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\ge\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$. Cộng từng vế

$P \ge 2\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\right)$. Đặt

$X = x\sqrt{x}; Y = y\sqrt{y}; Z = z\sqrt{z}$ thì $X, Y, Z > 0$ và $XYZ = 1$.

Khi đó (4) có dạng $P \ge 2\left(\dfrac{X}{Y+2Z}+\dfrac{Y}{Z+2X}+\dfrac{Z}{X+2Y}\right)$

$\Rightarrow P \ge 2\left(\dfrac{X^2}{XY+2ZX}+\dfrac{Y^2}{YZ+2XY}+\dfrac{Z^2}{XZ+2YZ}\right)$. Áp dụng bất đẳng thức

Cauchy- Schwarz ta có: $P \ge 2\dfrac{(X+Y+Z)^2}{3(XY+YZ+ZX)}$ do

$(X+Y+Z)^2 \ge 3(XY+YZ+ZX) \Rightarrow P \ge 3$ và $P = 3 \Leftrightarrow X = Y = Z = 1$. Vậy $\min P = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Câu 25)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\sqrt{y^3+1} = \sqrt{(y+1)(y^2-y+1)} \le \dfrac{(y+1)+(y^2-y+1)}{2} \Rightarrow \sqrt{y^3+1} \le \dfrac{y^2+2}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{\sqrt{y^3+1}} \ge \dfrac{2x}{y^2+2}$ tương tự, ta có: $\dfrac{y}{\sqrt{z^3+1}} \ge \dfrac{2y}{z^2+2}$, $\dfrac{z}{\sqrt{x^3+1}} \ge \dfrac{2z}{x^2+2}$

$\Rightarrow P \ge 2\left(\dfrac{x}{y^2+2}+\dfrac{y}{z^2+2}+\dfrac{z}{x^2+2}\right)$. Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong $\Leftrightarrow x = y = z = 2$. Ta sẽ chứng minh

$\dfrac{2x}{y^2+2}+\dfrac{2y}{z^2+2}+\dfrac{2z}{x^2+2} \ge 2$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{2x}{y^2+2}\right)+\left(y-\dfrac{2y}{z^2+2}\right)+\left(z-\dfrac{2z}{x^2+2}\right) \le 4$ (do

$x+y+z=6$) $\Leftrightarrow \dfrac{xy^2}{y^2+2}+\dfrac{yz^2}{z^2+2}+\dfrac{zx^2}{x^2} \le 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta

có: $2y^2+4 = y^2+y^2+4 \ge 3\sqrt[3]{4y^4} = 3y\sqrt[3]{4y} \Rightarrow y^2+2 \ge \dfrac{3}{2}y\sqrt[3]{4y}$ Tương tự có: $z^2+2\ge\frac{3}{2}z\sqrt[3]{4z}$, $x^2+2\ge\frac{3}{2}x\sqrt[3]{4z}$

$\text{VT}\le\frac{xy^2}{\frac{3}{2}y\sqrt[3]{4y}}+\frac{yz^2}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{4z}}+\frac{zx^2}{\frac{3}{2}x\sqrt[3]{4x}}$.Áp dụng bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\sqrt[3]{2x.xy.xy}\le\frac{2x+xy+xy}{3}$,

$\sqrt[3]{2y.yz.yz}\le\frac{2y+yz+yz}{3}$ $\sqrt[3]{2z.zx.zx}\le\frac{2z+zx+zx}{3}$. VT

$\le\frac{1}{9}\left[2\left(x+y+z\right)+2\left(xy+yz+zx\right)\right]$

Mặt khác, ta có: $3\left(xy+yz+zx\right)\le\left(x+y+z\right)^2\Rightarrow xy+yz+zx\le 12$. Từ đó suy ra $P\ge 2$. Vậy $\min P=2\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Câu 26)

Giải:

1)Ta có theo bất đẳng thức Cô si:

$$\sqrt{3x^2+8y^2+14xy}=\sqrt{\left(x+4y\right)\left(3x+2y\right)}\le\frac{\left(x+4y\right)\left(3x+2y\right)}{2}=2x+3y$$

Như vậy suy ra $\frac{x^2}{\sqrt{3x^2+8y^2+14xy}}\ge\frac{x^2}{2x+3y}$. Tương tự ta có:

$\frac{y^2}{\sqrt{3y^2+8z^2+14yz}}\ge\frac{y^2}{2y+3z}$

$\frac{z^2}{\sqrt{3z^2+8x^2+16zx}}\ge\frac{z^2}{2z+3x}\Rightarrow$ $P\ge\frac{x^2}{2x+3y}+\frac{y^2}{2y+3z}+\frac{z^2}{2z+3x}$. Theo bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có: $\frac{x^2}{2x+3y}+\frac{y^2}{2y+3z}+\frac{z^2}{2z+3x}\ge\frac{1}{5}\left(x+y+z\right)$. Theo bất đẳng thức Cô si cơ bản, ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$. Do $0<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1$, nên có:

$x+y+z\geq 9$ vậy $P\geq\frac{9}{5}$. Vậy $\min P=\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Câu 27) Do tính bình đẳng giữa x,y,z nên có thể giả sử $x\geq y\geq z$

Kết hợp với $x+y+z=3$ suy ra $0<z\leq 1$. Ta có $P=x^2+y^2+z^2+xyz$

$$=(x+y+z)^2+xyz-2(xy+yz+zx)=9+xy(z-2)-2z(y+x)$$
$$=9+xy(z-2)-2z(3-z)\quad (1)$$

Hiển nhiên ta có: $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\left(\frac{3-z}{2}\right)^2$. Do $0<z\leq 1\Rightarrow z-2<0$, vậy từ (1) có:

$P\geq 9+(z-2)\left(\frac{3-z}{2}\right)^2-2z(3-z)$. Ta có

$$\text{VP}(2)=9+\frac{3-z}{2}\left[(z-2)\frac{3-z}{2}-4z\right]=9+\frac{3-z}{2}\left[(z-2)(3-z)-8z\right]$$

$$=9+\frac{3-z}{2}\left[-z^2-3z-6\right]=\frac{1}{4}\left(z^3-3z+18\right)=\frac{1}{4}\left[\left(z^2-3z+2\right)+16\right]$$

$=\frac{1}{4}\left[(z-1)^2(z+2)+16\right]$. Do $0<x\leq 1$ nên suy ra $\Rightarrow P\geq 4$. Vậy $\min P=4\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 28) Áp dụng đồng nhất thức

$$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\quad (*)$$

Ta có: $P=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz-2(x+y+z)$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ (do $xyz=1$).Lại có:

$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$ (do $x^2y^2z^2=1$) suy ra:

$P\ge 3\left(x+y+z\right)-1-2\left(x+y+z\right)$

$\Rightarrow P\ge \left(x+y+z\right)-1\ge 3-1=2$.

2)Trước hết ta chứng minh rằng $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge \left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)$

Thật vậy, dựa vào (*) suy ra:

$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)-xyz\ge xy+yz+zx+x+y+z+1$

$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)-2\ge xy+yz+zx+x+y+z+2$ (do $xyz=1$)

$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\ge xy+yz+zx+x+y+z+3$ Do $xyz=1\Rightarrow x+y+z\ge 3$ và $xy+yz+zx\ge 3$. Ta có

$\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)=\frac{x+y+z}{3}\left(xy+yz+zx\right)+\left(x+y+z\right)\frac{xy+yz+zx}{3}+$
$+\frac{\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)}{3}$ suy ra

$\left(x+y+z\right)\left(xy+yz+zx\right)\ge xy+yz+zx+x+y+z+3$.Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $Q\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}{\left(x+1\right)\left(y+1\right)\left(z+1\right)}}}\ge 3$. Vậy

$\min Q=3\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Câu 29) Giải:

Ta có:
$4\left(a^3+b^3\right)=a^3+b^3+3\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)\ge a^3+b^3+3\left(a+b\right)ab=\left(a+b\right)^3$

Suy ra $\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}\ge a+b\Rightarrow c+\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}\ge a+b+c$. Do đó

$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}}\le \frac{a+b}{a+b+c}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Tương tự cũng có $\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)}} \le \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)}} \le \frac{c+a}{a+b+c}$. Suy ra

$$\frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)}} + \frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4\left(c^3+a^3\right)}} \le 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Câu 30) Ta có: $0<a,b,c<1$ suy ra

$\left(a-b\right)^2 \ge a\left(a-b\right)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab+a\left(a-b\right)^2$. Tương tự 3 bất đẳng thức nữa ta có:

$P=6\left(ab+bc+ca\right)+a\left(a-b\right)^2+b\left(b-c\right)^2+c\left(c-a\right)^2$

$\le 4\left(ab+bc+ca\right)+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ hay $P\le 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

BẤT ĐẲNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG

CÔNG THỨC ABEL VÀ ỨNG DỤNG.

1. Công thức tổng Abel:

Giả sử $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,....,b_n$ là hai dãy số thực. Khi đó ta có:

$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=(b_1-b_2)S_1+(b_2-b_3)S_2+...+b_nS_n$ trong đó $S_k=a_1+a_2+...+a_k$.

Chứng minh: Thật vậy thay $a_k=S_k-S_{k-1}$ với $k=2,3,...n$ ta có vế trái bằng:

$b_1S_1+b_2(S_2-S_1)+b_3(S_3-S_2)+...+b_n(S_n-S_{n-1})=VP$.

Trường hợp $n=3$ ta có: $ax+by+cz=\left(x-y\right)a+\left(y-z\right)(a+b)+z\left(a+b+c\right)$ đây là đẳng thức quan trọng có nhiều ứng dụng trong giải toán.

2. **Bất đẳng thức Abel:**

Cho hai dãy số thực: $a_1,a_2,....,a_n$ và $b_1\ge b_2\ge b_3\ge......\ge b_n$. Đặt $S_k=a_1+a_2+...+a_k$ với $k\in\{1,2,3,...n\}$ và $m=\min\{S_1,S_2,....,S_n\},M=\max\{S_1,S_2,....,S_n\}$. Khi đó ta có:
$mb_1\le A=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\le Mb_1$,

Chứng minh:

Ta có: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=(b_1-b_2)S_1+(b_2-b_3)S_2+...+b_nS_n$ mà $b_k-b_{k+1}\ge 0$ nên

$(b_1-b_2)m+(b_2-b_3)m+...+b_nm\le A\le(b_1-b_2)M+(b_2-b_3)M+...+b_nM$ hay $mb_1\le A\le Mb_1$.

MỘT SỐ VÍ DỤ:

Ví dụ 1: Cho $x\ge y\ge z\ge 0$ thỏa mãn: $x\ge 3,x+y\ge 5,x+y+z\ge 6$. Chứng minh: $x^2+y^2+z^2\ge 14$.

Lời giải:

Ta có: $x^2+y^2+z^2-14=\left(x-3\right)\left(x+3\right)+\left(y-2\right)\left(y+1\right)+\left(z-1\right)\left(z+1\right)$. Áp dụng công thức Abel ta có:
$x^2+y^2+z^2-14=(x+3-y-2)(x-3)+(y+2-z-1)+(z+1)(x-3+y-2+z-1)$

$=\left(x-y+1\right)(x-3)+\left(y-z+1\right)(x+y-5)+\left(z+1\right)\left(x+y+z-6\right)\ge 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=3;y=2;z=1$.

Ví dụ 2) Cho các số thực dương x, y, z sao cho $x \ge 3, xy \ge 6, xyz \ge 6$.
Chứng minh: $x + y + z \ge 6$.

Lời giải:

Ta có:

$x + y + z - 6 = 3\left(\frac{x}{3} - 1\right) + 2\left(\frac{y}{2} - 1\right) + 1\left(\frac{z}{1} - 1\right) = (3-2)\left(\frac{x}{3} - 1\right) + (2-1)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) +$ $1.\left(\frac{x}{3} - 1 + \frac{y}{2} - 1 + \frac{z}{1} - 1\right) = \left(\frac{x}{3} - 1\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 2\right) + \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} - 3\right)$. Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \ge 2\sqrt{\frac{xy}{6}} \ge 2$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} \ge 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{3.2.1}} \ge 3$. Suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3, y = 2, z = 1$.

Ví dụ 5: Cho $x, y, z > 0$ sao cho $x < 2y < 3z$ và
$x \ge 1, x + y \ge 3, x + y + z \ge 6$. Chứng minh: $6(xy + yz + zx) \le 11xyz$.

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{11}{6}$ .Ta có:

$$\frac{11}{6} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3} - \frac{1}{z} = \frac{x-1}{x} + \frac{y-2}{2y} + \frac{z-3}{3z} =$$
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{3z}\right)(x + y - 3) + \frac{1}{3z}(x + y + z - 6) \ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 3, y = 2, z = 1$.

Ví dụ 3: Cho các số thực không âm x, y, z sao cho
$x \le 1, x + y \le 5, x + y + z \le 14$. Chứng minh: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le 6$.

Lời giải:

Tacó:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(x+y)+\frac{1}{3}(x+y+z)\leq$$

$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right).1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).5+\frac{1}{3}.14=1+2+3$. Ta suy ra

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\leq(1+2+3)\left(\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}\right)\leq(1+2+3)^2=36 \ .$$

Ví dụ 4: Cho các số thực dương $a\geq b\geq 1, a\leq 3, ab\leq 6, ab\leq 6c$. Chứng minh: $a+b-c\leq 4$.

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $a+b+1\leq 3+2+c$.

Ta có:

$$3+2+c=\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{c}{1}\right)+(b-1)\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\right)+(a-b)\frac{3}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{6c}{ab}}+(b-1)2\sqrt{\frac{6}{ab}}+(a-b)\frac{3}{a}$$

$\geq 3+2(b-1)+(a-b)=a+b+1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=2, c=1$.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $\begin{cases}0<a\leq b\leq c, c\geq 9\\ a+\frac{b}{4}+\frac{9}{c}\leq 3\\ \frac{b}{4}+\frac{9}{c}\leq 2\end{cases}$.

Chứng minh: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{c}$.

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{9}=1\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{b}{4}}+\sqrt{\frac{9}{c}}\right)+\left(\sqrt{c}-2\right)\sqrt{\frac{9}{c}}$

$$\le 3\left(\sqrt{\frac{a+\frac{b}{4}+\frac{9}{c}}{3}}\right)+2\sqrt{\frac{\frac{b}{4}+\frac{9}{c}}{2}}+\left(\sqrt{c}-2\right)\sqrt{\frac{9}{2}}=3+2+\sqrt{c}-2=3+\sqrt{c}\ .$$

Ví dụ 6) Cho các số thực a,b,c sao cho $\begin{cases} a\ge b\ge 1\ge c>0 \\ \frac{2}{b}+c\le 2 \\ \frac{3}{a}+\frac{2}{b}+c\le 3 \end{cases}$. Chứng minh:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\le -\frac{1}{6}$.

Lời giải:

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\le \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}$. Tacó:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}$$

$$=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\frac{3}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz. Ta có:

$\frac{1}{\frac{3}{a}}+\frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\ge \frac{9}{\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+c}\ge 3, \frac{1}{\frac{2}{b}}+\frac{1}{c}\ge \frac{4}{\frac{2}{b}+c}\ge 2$, ta có

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}\ge \frac{3}{a}+2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1.$$

Ví dụ 7) Giả sử a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $\begin{cases} a \le b \le 3 \le c \\ c \ge b+1 \\ a+b \ge c \end{cases}$.

Tìm GTNN của $Q = \dfrac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$ **.**

(Trích đề thi vào lớp 10 Trường chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội)

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{\left(abc+ab+ac+a\right)+\left(abc+bc+ba+b\right)-\left(abc+ca+cb+c\right)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-\frac{c}{1+c} \ge \frac{1}{1+1}+\frac{2}{1+2}-\frac{3}{1+3}=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{3-c}{3(1+c)}+\frac{b-2}{3(b+1)}+\frac{a-1}{2(1+a)} \ge 0$$

Hay

$$(3-c)\left(\frac{1}{4(c+1)}-\frac{1}{3(b+1)}\right)+(3+c+b-2)\left(\frac{1}{3(b+1)}-\frac{1}{2(a+1)}\right)$$

$+\left(3-c+b-2+a-1\right)\dfrac{1}{2(1+a)} \ge 0$. Rút gọn ta thu được:

$$(3-c)\frac{(3b-4c-1)}{12(b+1)(c+1)}+\left(b+1-c\right)\frac{\left(2a-3b-1\right)}{6(b+1)(a+1)}+\left(a+b-c\right)\frac{1}{2(a+1)} \ge 0 \quad .$$

Điều này là hiển nhiên đúng.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

Một số kết quả quan trọng:

Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z.

a) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$.

b) $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$.

c) $(ax+by)^2\le(a^2+b^2)(x^2+y^2)$.

d) $(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

e) $8(a+b+c)(ab+bc+ca)\le 9(a+b)(b+c)(c+a)$

f) $b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\ge abc(a+b+c)$

g) $\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}\ge\dfrac{1}{a^2+bc}$.

h) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}\ge\dfrac{(x+y)^2}{a+b}$.

i) $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$.

Chứng minh:

a) $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge 2(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a-b)^2+(b$

Bất đẳng thức này luôn đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Khai triển hai vế và thu gọn ta quy về câu a.

c) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng: $(ay-bx)^2\ge 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$.

d) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng: $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2\ge 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$. Các bất đẳng thức c, d còn được gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 số, 3 số.

e) Khai triển hai vế rồi thu gọn ta đưa bất đẳng thức về dạng: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$ bất đẳng thức này luôn đúng theo AM- GM (xem chứng minh ở phần Bất đẳng thức Cô si).

f) Theo bất đẳng thức Cô si thì: $b^2c^2+a^2c^2\ge 2abc^2$ Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại suy ra đpcm.

g) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 số ta có:

$$(a+b)^2=\left(a+\sqrt{bc}.\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\le\left(a^2+bc\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)=\left(a^2+bc\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)$$ suy ra

$\dfrac{1}{(a+b)^2}\ge\dfrac{c}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}$. Tương tự $\dfrac{1}{(a+c)^2}\ge\dfrac{b}{\left(a^2+bc\right)(b+c)}$. Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra đpcm.

h) Quy đồng và rút gọn đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng: $(ay-bx)^2\ge 0$.

i) Áp dụng bất đẳng thức h) ta có:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}.$$

Bất đẳng thức này còn được gọi là bất đẳng thức Cauchy-Chwarz.

1. Những kỹ năng vận dụng cơ bản:

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ac}+\frac{c}{c+2ab}\ge 1.$$

Giải:

$$\frac{a}{a+2bc}=\frac{a^2}{a^2+2abc}\Rightarrow\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ac}+\frac{c}{c+2ab}=\frac{a^2}{a^2+2abc}+\frac{b^2}{b^2+2abc}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz ta có:

$\dfrac{a^2}{a^2+2abc}+\dfrac{b^2}{b^2+2abc}+\dfrac{c^2}{c^2+2abc}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}$. Ta cần chứng minh: $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}\ge 1$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 3abc\Leftrightarrow(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}, ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ nhân 2 vế các bất đẳng thức dương cùng chiều ta có đpcm. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{a^3}{a+2b}=\frac{a^4}{a^2+2ab}\Rightarrow VT=\frac{a^4}{a^2+2ab}+\frac{b^4}{b^2+2bc}+\frac{c^4}{c^2+2ca}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}.$$

Ta cần chứng minh: $\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$. Điều này là hiển nhiên.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 3\left(a+b+c\right)^2.$$

Giải:

Ta có: $\left(a+b+c\right)^2=\left[a+\sqrt{2}.\left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\right]^2\le\left(a^2+2\right)\left[1+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]$ .Suy ra:

$3\left(a+b+c\right)^2\le 3\left(a^2+2\right)\left[1+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]$. Ta cần chứng minh:

$3\left(a^2+2\right)\left[1+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]\le\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$ hay

$3\left[1+\frac{\left(b+c\right)^2}{2}\right]\le\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)$. Sau khi khai triển và thu gọn ta được:

$\frac{b^2+c^2}{2}+b^2c^2-3bc+1\ge 0$. Để ý rằng: $\frac{b^2+c^2}{2}\ge bc$ nên bất đẳng thức trở thành: $b^2c^2-2bc+1\ge 0 \Leftrightarrow (bc-1)^2\ge 0$.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

Giải:

Ta mong muốn xuất hiện lượng: $a+b+c$

Ta có:

$(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)=(a^2+b^2+a^2)(a^2+a^2+c^2)\ge(a^2+ab+ac)^2=a^2(a+b+c)^2$

Từ đó suy ra: $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}\le\frac{a}{(a+b+c)^2}$. Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca+abc\le 4$.

Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge 2(ab+bc+ca)$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Ta viết lại giả thiết bài toán thành:

$12+(ab+bc+ca)+4(a+b+c)\ge 8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc$

hay $(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(c+2)(a+2)\ge(a+2)(b+2)(c+2)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\ge 1$ Ta có:

$\frac{1}{a+2}=\frac{a+b^2+c^2}{(a+1+1)(a+b^2+c^2)}\le\frac{a+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$, Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b+2}\le\dfrac{b+c^2+a^2}{(a+b+c)^2};\dfrac{1}{c+2}\le\dfrac{a+a^2+b^2}{(a+b+c)^2}$. Suy ra

$1\le\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}\le\dfrac{a+b+c+2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$

$\Leftrightarrow a+b+c+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)^2$ hay

$a^2+b^2+c^2+a+b+c\ge2(ab+bc+ca)$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 6) Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $2abc(a+b+c)\le\dfrac{5}{9}+a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10- Trường Chuyên KHTN- ĐHQG Hà Nội 2014).

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$. Ta có:

$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge a^2b.b^2c+b^2c.c^2a+c^2a.a^2b=abc\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$.

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức: Cauchy- Shwarz và giá thiết $ab+bc+ca=1$ ta có:

$ab^2+bc^2+ca^2=\dfrac{b^2}{\frac{1}{a}}+\dfrac{c^2}{\frac{1}{b}}+\dfrac{a^2}{\frac{1}{c}}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=abc(a+b+c)^2$. Từ đó suy ra

$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2\ge\left[abc(a+b+c)\right]^2$. Bây giờ ta sẽ chứng minh:

$\left[abc(a+b+c)\right]^2-2abc(a+b+c)+\dfrac{5}{9}\ge0\Leftrightarrow t^2-6t+5\ge0\Leftrightarrow(t-1)(t-5)\ge0$

với $t=abc(a+b+c)$. Mặt khác ta có:

$abc(a+b+c)=ab.ac+bc.ba+ca.cb\le\dfrac{1}{3}(ab+bc+ca)^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow0<t\le1$.

Suy ra đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+ab+bc}+\frac{1}{b^2+bc+ca}+\frac{1}{c^2+ca+ab}\le\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2$$

Lời giải:

Ta muốn làm xuất hiện: $ab+bc+ca$

Ta có: $\frac{1}{a^2+ab+bc}=\frac{c^2+ab+bc}{\left(a^2+ab+bc\right)\left(c^2+ab+bc\right)}\le\frac{c^2+ab+bc}{\left(ac+ab+bc\right)^2}$. Tương tự với 2 số hạng còn lại ta có:

$$\sum\frac{1}{a^2+ab+bc}\le\sum\frac{c^2+ab+bc}{\left(ac+ab+bc\right)^2}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(ac+ab+bc\right)^2}$$

Ví dụ 8: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca}+\frac{bc}{b^2+ca+ab}+\frac{ca}{c^2+ab+bc}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Giải:

Ta muốn làm xuất hiện: $ab+bc+ca$

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca}=\frac{ab(b^2+bc+ca)}{\left(a^2+bc+ca\right)\left(b^2+bc+ca\right)}\le\frac{ab(b^2+bc+ca)}{\left(ab+bc+ca\right)^2}$$

Từ đó suy ra: $VT\le\frac{ab(b^2+bc+ca)}{\left(ab+bc+ca\right)^2}+\frac{bc(c^2+ca+ab)}{\left(ab+bc+ca\right)^2}+\frac{ca(a^2+ab+bc)}{\left(ab+bc+ca\right)^2}$.

Ta chỉ cần chứng minh:

$$ab(b^2+bc+ca)+bc(c^2+ca+ab)+ca(a^2+ab+bc)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

$\Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a\ge abc(a+b+c)\Leftrightarrow\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\ge a+b+c$. Nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy- Shwarz

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le 1$

Giải:

Ta muốn làm xuất hiện $a+b+c$.

$\frac{a}{a^3+b^2+c}=\frac{a\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}{\left(a^3+b^2+c\right)\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}\le\frac{a\left(\frac{1}{a}+1+c\right)}{\left(a+b+c\right)^2}=\frac{1+a+ca}{9}$. Từ đó suy ra: $\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le\frac{1+a+ca}{9}+\frac{1+b+ab}{9}+\frac{1+c+bc}{9}$

Ta cần chứng minh: $\frac{1+a+ca}{9}+\frac{1+b+ab}{9}+\frac{1+c+bc}{9}\le 1\Leftrightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do: $ab+bc+ca\le\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}=3$

Ví dụ 10: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a+b^2}+\frac{1}{1+b+c^2}+\frac{1}{1+c+a^2}\le 1$

Giải:

Ta đặt $a=x^3,b=y^3,c=z^3,xyz=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{1+x^3+y^6}+\frac{1}{1+y^3+z^6}+\frac{1}{1+z^3+x^6}\le 1$.

Ta có:

$$\frac{1}{1+x^3+y^6}=\frac{\left(z^4+x+\frac{1}{y^2}\right)}{\left(1+x^3+y^6\right)\left(z^4+x+\frac{1}{y^2}\right)}\le\frac{z^4+x+\frac{1}{y^2}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{z^4+x^2yz+z^2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Ta cần chứng minh:

$\sum\left(z^4+x^2yz+z^2x^2\right)\le\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge xyz(x+y+z)$.

Điều này là hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Ví dụ 11: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}.$$

Do bất đẳng thức thuần nhất nên ta chuẩn hóa: $abc=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1$.

Ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)}{\left(a^3+b^3+1\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)}\le\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+c^2\right)}{(a+b+c)^2}=\frac{bc+ca+c^2}{(a+b+c)^2}=\frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự với 2 số hạng còn lại và cộng ba bất đẳng thức cùng chiều suy ra đpcm.

Ví dụ 12) Với ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q=\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}+\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}}+\frac{z}{z+\sqrt{z+xy}}$.(Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội – 2014)

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{x+yz}=\sqrt{x(x+y+z)+yz}=\sqrt{(x+y)(x+z)}$. Chú ý rằng: Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì:

$(x+y)(x+z)\ge\left(\sqrt{x}.\sqrt{y}+\sqrt{z}.\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{(x+y)(x+z)}\ge\sqrt{x}.\sqrt{y}+\sqrt{z}.\sqrt{x}$.

Từ đó suy ra: $\frac{x}{x+\sqrt{x+yz}}\le\frac{x}{x+\sqrt{x}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. Tương tự ta có: $\frac{y}{y+\sqrt{y+zx}} \le \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}; \frac{z}{z+\sqrt{z+xy}} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$. Cộng 3 bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra $Q \le 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Ví dụ 13) Cho các số thực không âm a,b,c sao cho $a>0, b+c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh: $\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3+c^3}{a^2} \ge \sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a^4}{a\left(b^2-bc+c^2\right)}+\frac{b^4}{a^2b}+\frac{c^4}{a^2c} \ge \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a\left(b^2-bc+c^2\right)+a^2b+a^2c} = \frac{1}{a\left[b^2-bc+c^2+a\left(b+c\right)\right]}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a\left(b+c\right) \le \frac{a^2+\left(b+c\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a\left[b^2-bc+c^2+a\left(b+c\right)\right]} \ge \frac{1}{a\left[b^2-bc+c^2+\frac{a^2+\left(b+c\right)^2}{2}\right]}$$

$= \frac{2}{a\left(a^2+3b^2+3c^2\right)} = \frac{2}{a\left(3-2a^2\right)}$. Bây giờ ta chứng minh :

$\frac{2}{a\left(3-2a^2\right)} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow a\left(3-2a^2\right) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a^3+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \ge 3a$. Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số ta có: $2a^3+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} \ge 3a$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=0$. Ta cũng có thể chứng minh:

$a\left(3-2a^2\right)\le\sqrt{2}\Leftrightarrow 2a^3-3a+\sqrt{2}\ge 0\Leftrightarrow\left(2a-\sqrt{2}\right)^2\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ge 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng.

Ví dụ 14) Cho các số thực x,y sao cho $x^2y^2+2y+1=0$. Tìm GTNN, GTLN của $P=\frac{xy}{3y+1}$ (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Trường chuyên – KHTN- ĐHQG Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $y\ne 0$.

$x^2y^2+2y+1=0\Rightarrow x^2+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}=1\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{1}{y}+1\right)^2=1$. Đặt $a=\frac{1}{y}+1$. Ta được $x^2+a^2=1$. Ta có:

$P=\frac{x}{3+\frac{1}{y}}=\frac{x}{a+2}\Rightarrow 2P=x-Pa\Rightarrow 4P^2=\left(x-Pa\right)^2$. Theo bất đẳng thức

Bunhiacopxki ta có: $\left(x-Pa\right)^2\le\left(1+P^2\right)\left(x^2+a^2\right)=1+a^2$. Suy ra

$4P^2\le 1+P^2\Leftrightarrow 3P^2\le 1\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}\le P\le\frac{\sqrt{3}}{3}$. Với $x=\frac{\sqrt{3}}{2};y=\frac{2}{3}\Rightarrow P=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{-\sqrt{3}}{2};y=-\frac{2}{3}\Rightarrow P=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy GTLN của P là $\frac{\sqrt{3}}{3}$, GTNN của P là $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Kỹ thuật tách ghép

Để giải quyết những bài toán dạng này người giải cần linh hoạt trong việc tách các nhóm số hạng sao cho đảm bảo dấu bằng và tạo ra các bất đẳng thức phụ quen thuộc.

Ta cần chú ý các bất đẳng thức quen thuộc sau: $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ và

$\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b} \le \frac{a+b+c}{4}$$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{4}\frac{4}{(a+b)+(a+c)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)$

Từ đó suy ra: $\sum \frac{bc}{2a+b+c} \le \frac{1}{4}\sum\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right) = \frac{1}{4}(a+b+c)$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+b(c+a)}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c(a+b)} \le 3$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{b(b+a)+c(c+a)} \le \frac{b^2}{b(b+a)}+\frac{c^2}{c(c+a)} = \frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}.$$

Từ đó suy ra $\sum \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+a(b+c)} \le \sum\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right) = 3$

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{4b^2+c^2+a^2}+\frac{1}{4c^2+a^2+b^2} \le \frac{1}{2}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{9}{4a^2+b^2+c^2}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}\le\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{(a^2+c^2)}$$

Suy ra $\sum\frac{9}{4a^2+b^2+c^2}\le\sum\left[\frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{(a^2+c^2)}\right]=\frac{9}{2}$

Ví dụ 4: Cho các số thực a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le\frac{3}{4}$$

Giải:

Ta có: $\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le\frac{1}{4}\left[\frac{\left(b+c\right)^2}{a^2+1}+\frac{\left(c+a\right)^2}{b^2+1}+\frac{\left(a+b\right)^2}{c^2+1}\right]$

Mặt khác ta có:

$\frac{\left(b+c\right)^2}{a^2+a^2+b^2+c^2}=\frac{\left(b+c\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)}\le\frac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{\left(a^2+c^2\right)}$. Từ đó suy ra

$\sum\frac{\left(b+c\right)^2}{a^2+1}\le\sum\left[\frac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{\left(a^2+c^2\right)}\right]=3$. Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5:

Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ac}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{\left(b+c\right)^2}{\left(a^2+bc\right)\left(b+c\right)}=\frac{\left(b+c\right)^2}{c\left(a^2+b^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)}\le\frac{b^2}{c\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(a^2+c^2\right)}$$

. Từ đó suy ra :

$$\sum\frac{b+c}{a^2+bc}\le\sum\left[\frac{b^2}{c\left(a^2+b^2\right)}+\frac{c^2}{b\left(a^2+c^2\right)}\right]=\sum\left[\frac{b^2}{c\left(a^2+b^2\right)}+\frac{a^2}{c\left(a^2+b^2\right)}\right]=\sum\frac{1}{c}$$

Chú ý: Nếu ta thay $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ thì thu được bất đẳng thức mới là:

$$\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^2(a+b)}{c^2+ab}\le a+b+c$$

Nếu phân tích: $\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}=b+c-\frac{bc(b+c)}{a^2+bc}$ thì thu được bất đẳng thức mới:

$\frac{bc(b+c)}{a^2+bc}+\frac{ca(c+a)}{b^2+ca}+\frac{ab(a+b)}{c^2+ab}\ge a+b+c$. Đây là các bất đẳng thức đẹp và khó.

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

Giải: Ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab}=1$$

Thay $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ ta thu được kết quả:

$$\frac{bc}{bc+2a^2}+\frac{ca}{ca+2b^2}+\frac{ab}{ab+2c^2}\ge 1$$

Mặt khác ta có: $\frac{bc}{bc+2a^2}=1-\frac{2a^2}{2a^2+bc}$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành:

$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\le 1$. Thay $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ ta lại thu được:

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{ab}{c^2+2ab}\le 1$$

Những bất đẳng thức này có ứng dụng rất quan trọng.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$$

Giải:

Ta có

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}=\frac{a^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc}=\frac{1}{9}\frac{(2a+a)^2}{2a(a+b+c)+2a^2+bc}\le\frac{1}{9}\left[\frac{4a^2}{2a(a+b+\right.$$

Từ đó suy ra:

$$\sum\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\le\frac{1}{9}\sum\left(\frac{4a^2}{2a(a+b+c)}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right)=\frac{1}{9}\sum\left[\frac{2a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right]$$

. Áp dụng kết quả của VD 6 ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 8: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}$ nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\le\frac{3}{2}.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3a^2+3}+\dfrac{b^2}{3b^2+3}+\dfrac{c^2}{3c^2+3}\le \dfrac{1}{2}$. Ta có:

$$\frac{4a^2}{3a^2+3}=\frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca}=\frac{\left(a+a\right)^2}{a(a+b+c)+2a^2+bc}\le \frac{a^2}{a(a+b+c)}+\frac{a^2}{2a^2+bc}$$

$=\dfrac{a}{(a+b+c)}+\dfrac{a^2}{2a^2+bc}$ Tương tự với 2 số hạng còn lại ta có:

$$\sum \frac{a^2}{3a^2+3}\le \frac{1}{4}\sum\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{a^2}{2a^2+bc}\right)\le \frac{1}{2}$$

Ở đây ta đã sử dụng kết quả: $\sum \dfrac{a^2}{2a^2+bc}\le 1$

Ví dụ 9: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le \frac{1}{3}$$

Giải:

Ta có:

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}=\frac{9a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(2a^2+bc)}=\frac{\left(a+2a\right)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(2a^2+bc)}$$

$$\le \frac{a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{4a^2}{2(2a^2+bc)}=\frac{a^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}$$

Từ đó suy ra: $\sum \dfrac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}\le \dfrac{1}{9}\sum\left[\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2a^2}{2a^2+bc}\right]\le \dfrac{1}{3}$

Ví dụ 10: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=1$. Chứng minh: $\dfrac{ab}{3ab+2b+c}+\dfrac{bc}{3bc+2c+a}+\dfrac{ca}{3ca+2a+b}\le \dfrac{1}{4}$

Giải:

Ta có:

$$3ab+2b+c=3ab+2b+c(a+b+c)=\left(ab+bc+ca\right)+\left(c^2+2ab\right)+2b$$

Từ đó ta có: $\dfrac{\left(1+1+2\right)^2}{\left(ab+bc+ca\right)+\left(c^2+2ab\right)+2b}\le\dfrac{1}{ab+bc+ca}+\dfrac{1}{c^2+2ab}+\dfrac{1}{2b}$

Như vậy:

$$\frac{ab}{3ab+2b+c}\le\frac{1}{16}\left[\frac{ab}{ab+bc+ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}+\frac{ab}{2b}\right]=\frac{1}{16}\left[\frac{ab}{ab+bc+ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}+\frac{a}{2}\right]$$

Từ đó suy ra: $\sum\dfrac{ab}{3ab+2b+c}\le\sum\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{ab}{ab+bc+ca}+\dfrac{ab}{c^2+2ab}+\dfrac{a}{2}\right]\le\dfrac{1}{4}$.

3. Kỹ thuật thêm bớt.

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3$$

Phân tích: Nếu ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức:

$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}\ge\dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{a+b+c}$ thì phần sau sẽ bị ngược dấu. Để khắc phục ta thêm bớt như sau:

Xét $\dfrac{1}{2-a}-m=\dfrac{1-2m+ma}{2-a}$ ta chọn m sao cho $1-2m+ma>0$ và $1-2m+ma$ chỉ còn đơn giản một số hạng. Điều này làm ta nghỉ đến $m=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó ta có cách chứng minh như sau:

$$\frac{1}{2-a}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2-b}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2-c}-\frac{1}{2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge 3$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2a-a^2}+\dfrac{b^2}{2b-b^2}+\dfrac{c^2}{2c-c^2}\geq 3$.Áp dụng bất đẳng thức:

$\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}\geq \dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{A+B+C}$ ta có: $VT\geq \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{2(a+b+c)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{2(a+b+c)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}\geq 3\Leftrightarrow \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{2(a+b+c)-3}\geq 3$

$\Leftrightarrow \left(a+b+c\right)^2-6(a+b+c)+9\geq 0\Leftrightarrow \left(a+b+c-3\right)^2\geq 0$

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2+2}+\dfrac{1}{b^2+2}+\dfrac{1}{c^2+2}\leq 1$

Phân tích:

Xét: $\dfrac{1}{a^2+2}-m=\dfrac{1-2m-ma^2}{a^2+2}$ ta nghỉ đến chọn $m=\dfrac{1}{2}$. Khi đó ta có:

$\dfrac{1}{a^2+2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b^2+2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{c^2+2}-\dfrac{1}{2}\leq -\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a^2+2}+\dfrac{b^2}{b^2+2}+\dfrac{c^2}{c^2+2}\geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức: $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}\geq \dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{A+B+C}$ ta có:

$\dfrac{a^2}{a^2+2}+\dfrac{b^2}{b^2+2}+\dfrac{c^2}{c^2+2}\geq \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+6}$. Ta cần chứng minh:

$\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+6}\geq 1\Leftrightarrow \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}\geq 1$. Nhưng đây là một đẳng thức. Suy ra điều phải chứng minh.

Ngoài ra ta có thể giải bằng cách khác như sau:

$$\frac{1}{a^2+2}=\frac{1+\frac{(b+c)^2}{2}}{(a^2+2)\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right]}\le\frac{1+\frac{(b+c)^2}{2}}{(a+b+c)^2}$$. Từ đó cộng các bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra điều phải chứng minh:

Chú ý: Với các giả thiết a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác ta cần chú ý biến đổi để sử dụng điều kiện: $a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0$

Ví dụ 3: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\ge 1$$

Phân tích:

Ta viết lại: $\frac{a}{3a-b+c}-m=\frac{a-m(3a-b+c)}{3a-b+c}$. Ta chọn $m=\frac{1}{4}$ khi đó:

$\frac{a}{3a-b+c}-\frac{1}{4}=\frac{a+b-c}{4(3a-b+c)}$. Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$\frac{a}{3a-b+c}-\frac{1}{4}+\frac{b}{3b-c+a}-\frac{1}{4}+\frac{c}{3c-a+b}-\frac{1}{4}\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c}+\frac{b+c-a}{3b-c+a}+\frac{c+a-b}{3c-a+b}\ge 1.$$

Ta có

$$VT\ge\frac{(a+b-c+b+c-a+a+c-b)^2}{\sum(a+b-c)(3a-b+c)}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1$$

Đối với các bất đẳng thức dạng $f(a)+f(b)+f(c)\le M$. Ta thường thêm bớt vào một số m để tử số có dạng bình phương.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$.Chứng minh rằng:
$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$.

Phân tích:

Ta lấy $\frac{1}{a^2-a+1}-m=\frac{1-m-ma^2+ma}{a^2-a+1}$ để $1-m-ma^2+ma$ phân tích được thành: $(xa+y)^2$ thì $1-m-ma^2+ma=0$ có nghiệm kép. Hay $\Delta=m^2+4m(1-m)=0\Leftrightarrow m\left(4-3m\right)=0\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}$. Ta viết lại bất đẳng thức thành: $\frac{1}{a^2-a+1}-\frac{4}{3}+\frac{1}{b^2-b+1}-\frac{4}{3}+\frac{1}{c^2-c+1}-\frac{4}{3}\le -1$ hay
$\frac{(2a-1)^2}{a^2-a+1}+\frac{(2b-1)^2}{b^2-b+1}+\frac{(2c-1)^2}{c^2-c+1}\ge 3$. Áp dụng bất đẳng thức:
$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{A+B+C}$ ta thu được:
$VT\ge\frac{\left[2(a+b+c)-3\right]^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)+3}$. Ta cần chứng minh:
$\left[2(a+b+c)-3\right]^2\ge 3\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-(a+b+c)+3\right]$ hay
$\left(a+b+c\right)^2+6(ab+bc+ca)\ge 9\left(a+b+c\right)$

Ta có: $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$
$\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab+2abc(a+b+c)=3abc(a+b+c)=3(a+b+c)$. Ta quy bài toán về chứng minh: $\left(a+b+c\right)^2+6\sqrt{3(a+b+c)}\ge 9\left(a+b+c\right)$. Đặt $t=\sqrt{3(a+b+c)}\Rightarrow t\ge 3$. Ta có bất đẳng thức trở thành:
$\frac{t^4}{9}+6t\ge 3t^2\Leftrightarrow t^4-27t^2+54t\ge 0\Leftrightarrow t\left(t^3-27t+54\right)=t(t-3)^2(t+6)\ge 0$.
Điều này là hiển nhiên. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3}\le\frac{1}{2}.$$

Một số cách thêm bớt không mẫu mực:

Ví dụ 5: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$.

Chứng minh: $\dfrac{a^2}{3a+1}+\dfrac{b^2}{3b+1}+\dfrac{c^2}{3c+1}\le\dfrac{1}{18(ab+bc+ca)}$

Giải:

Ta có: $\dfrac{a^2}{3a+1}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{3a+1}=\dfrac{1}{3}\left(a-\dfrac{a}{3a+1}\right)$. Vì vậy ta quy bài toán về chứng minh: $\dfrac{a}{3a+1}+\dfrac{b}{3b+1}+\dfrac{c}{3c+1}+\dfrac{1}{6(ab+bc+ca)}\ge 1$

Ta có: $\sum\dfrac{a}{3a+1}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a(3a+1)+b(3b+1)+c(3c+1)}=\dfrac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+1}$

Suy ra $VT\ge\dfrac{1}{3\left(a^2+b^2+c^2\right)+1}+\dfrac{1}{6(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{4}{3(a+b+c)^2+1}=1$

Ví dụ 6: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

Giải:

Do $\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{2a}{b+c}+1$ nên ta viết lại bất đẳng thức thành:

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\ge\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3}{2}$. Lại có: $\dfrac{a}{c}-\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{ab}{c(b+c)}$ nên ta sẽ chứng minh: $\sum \frac{ab}{c(b+c)} \ge \frac{3}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Shwarz ta có:

$$\sum \frac{ab}{c(b+c)} = \sum \frac{a^2b^2}{abc(b+c)} \ge \frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2abc\left(a+b+c\right)}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{2abc\left(a+b+c\right)} \ge \frac{3}{2}$ nhưng đây là bài toán quen thuộc.

Ví dụ 7: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh: $a+b+c+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải:

Nhân 2 vế với $a+b+c$ và chú ý: $\frac{ab}{b+c}\left(a+b+c\right) = ab + \frac{a^2b}{b+c}$. Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh thành:

$$\left(a+b+c\right)^2 + 1 + \frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{c+a} + \frac{c^2a}{a+b} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a+b+c\right)$$

Ta có: $\frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{c+a} + \frac{c^2a}{a+b} \ge \frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{b(b+c)+c(c+a)+a(a+b)} = \frac{1}{\left(a+b+c\right)^2-1}$.

Cuối cùng ta chứng minh: $\left(a+b+c\right)^2 + 1 + \frac{1}{\left(a+b+c\right)^2-1} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a+b+c\right)$.

Nhưng $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a+b+c\right) \le \frac{3}{4}\left[\left(a+b+c\right)^2+3\right]$ nên ta quy về:

$\left(a+b+c\right)^2 + 1 + \frac{1}{\left(a+b+c\right)^2-1} \ge \frac{3}{4}\left[\left(a+b+c\right)^2+3\right]$. Dành cho học sinh.

4). PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

Tùy theo bài toán ta có thể chọn một trong các cách đặt ẩn phụ sau:

1). $(a,b,c)\to\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$

2). $(a,b,c)\to\left(\frac{ka}{b},\frac{kb}{c},\frac{kc}{a}\right)$

3). $(a,b,c)\to\left(\frac{kb}{a},\frac{kc}{b},\frac{ka}{c}\right)$

4). $(a,b,c)\to\left(\frac{ka^2}{bc},\frac{kb^2}{ac},\frac{kc^2}{ab}\right)$

5). $(a,b,c)\to\left(\frac{kbc}{a^2},\frac{kca}{b^2},\frac{kab}{c^2}\right)$

Ví dụ 1: Cho các số thực dương x,y,z sao cho $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1.$$

Phân tích: Nếu áp dụng trực tiếp bất đẳng thức:

$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}\ge\frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$ thì bất đẳng thức tiếp theo bị ngược dấu.

Để không bị ngược dấu ta thay $(x,y,z)\to\left(\frac{bc}{a^2},\frac{ca}{b^2},\frac{ab}{c^2}\right)$ thì bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ac+a^2c^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}\ge 1.\quad (*)$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức: $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}+\frac{Z^2}{C}\ge\frac{(X+Y+Z)^2}{A+B+C}$ ta có:

$VT \ge \dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+a^2bc+b^2c^2+b^4+b^2ac+a^2c^2+c^4+c^2ab+a^2b^2}$. Ta cần chứng minh:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^4+a^2bc+b^2c^2+b^4+b^2ac+a^2c^2+c^4+c^2ab+a^2b^2} \ge 1$$

$\Leftrightarrow b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2 \ge abc(a+b+c)$. Nhưng đây là kết quả quen thuộc.

Ví dụ 2: Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(y+1)(y+2)}+\frac{1}{(z+1)(z+2)} \ge \frac{1}{2}.$$

Phân tích:

Đặt $x = \dfrac{bc}{a^2}; y = \dfrac{ac}{b^2}; z = \dfrac{ab}{c^2}$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$\sum \dfrac{a^4}{(2a^2+bc)(a^2+bc)} \ge \dfrac{1}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức:

$\dfrac{X^2}{A}+\dfrac{Y^2}{B}+\dfrac{Z^2}{C} \ge \dfrac{\left(X+Y+Z\right)^2}{A+B+C}$ ta có:

$VT \ge \dfrac{\sum\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum(2a^2+bc)(a^2+bc)}$. Ta cần chứng minh:

$$2\sum\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge \sum(2a^2+bc)(a^2+bc)$$

$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$. Đây là kết quả quen thuộc.

Ví dụ 3: Cho 3 số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}}+\sqrt{\frac{2y}{y+z}}+\sqrt{\frac{2z}{z+x}} \le 3$$

Giải:

Đặt $x=\frac{a}{b}; y=\frac{b}{c}; z=\frac{c}{a}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sum\left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+ac}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+ab}}\right)^2\le\left(\sum\frac{a}{(a+b)(a+c)}\right)\left(\sum\frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\right)$$

Mặt khác ta có: $8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\le9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$**.** Mặt khác ta có: $\sum\frac{a}{(a+b)(a+c)}=\frac{2\left(ab+bc+ca\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{9}{4(a+b+c)}$. Ta quy bài toán về chứng minh: $\sum\frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\le2\left(a+b+c\right)$. Mặt khác ta có: $\frac{a(a+b)(a+c)}{a^2+bc}=a+\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}$ **.** Ta quy bài toán về chứng minh:

$$\sum\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}\le a+b+c$$

KỸ THUẬT ĐỐI XỨNG HÓA.

Ví dụ 1: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le3$$

Giải:

Ta có: $\sqrt{\dfrac{2a}{a+b}}=\dfrac{\sqrt{2a\left(a+c\right)}}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}\Rightarrow\left(\sum\dfrac{\sqrt{2a\left(a+c\right)}}{\sqrt{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}}\right)^2\le$

$$2(a+b+c)\left[2.\frac{a}{\left(a+b\right)(a+c)}+\frac{b}{\left(b+c\right)(b+a)}+\frac{c}{\left(c+a\right)(c+b)}\right]$$
$$=\frac{8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$$

Bây giờ ta cần chứng minh:

$$\frac{8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\le 9\Leftrightarrow 8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)\le 9\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Nhưng đây là kết quả quen thuộc:

Ví dụ 2: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c+2a}}+\sqrt{\frac{c}{c+a+2b}}\le\frac{3}{2}$$

Giải:

Ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}}=\frac{\sqrt{a\left(a+2b+c\right)}}{\sqrt{\left(a+b+2c\right)\left(a+2b+c\right)}}\Rightarrow\left(\sum\frac{\sqrt{a\left(a+2b+c\right)}}{\sqrt{\left(a+b+2c\right)\left(a+2b+c\right)}}\right)^2\le$$

$$\left[\sum a\left(a+2b+c\right)\right]\left[\sum\frac{1}{\left(a+b+2c\right)\left(a+2b+c\right)}\right]=\frac{4\left(\sum a^2+3\sum ab\right)\left(\sum a\right)}{\left(a+b+2c\right)\left(a+2b+c\right)(b+2a+c)}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{4\left(\sum a^2+3\sum ab\right)\left(\sum a\right)}{\left(a+b+2c\right)\left(a+2b+c\right)(b+2a+c)}\le\dfrac{9}{4}$. Sau khi khai triển và thu gọn thì được: $2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$.

Đây là bài toán quen thuộc.

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$

Chứng minh: $\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

Giải:

Ta có: $\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}=\sqrt{\frac{a^2b}{a+c}}=\sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}}$ suy ra

$$\left(\sum\sqrt{\frac{a^2b(a+b)}{(a+c)(a+b)}}\right)^2\le\left[\sum(a+b)\right]\left[\sum\frac{a^2b}{(a+c)(a+b)}\right]=\frac{2\left(\sum a\right)\left[\sum a^2b^2+abc\sum a\right]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh:

$\frac{2\left(\sum a\right)\left[\sum a^2b^2+abc\sum a\right]}{(a+b)(b+c)(c+a)}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\left(\sum a\right)\left[\sum a^2b^2+abc\sum a\right]$

$\le(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)$**.** Khai triển và thu gọn ta quy về:

$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$. Nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng theo BĐT cô si:

BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

1) $\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

2) $\frac{a}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{b^2+bc+c^2}+\frac{c}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$

3) $\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\ge 4(a+b+c+1)^2$

4) $\frac{a^3b}{1+ab^2}+\frac{b^3c}{1+bc^2}+\frac{c^3a}{1+ca^2}\ge\frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$

5) $\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$ với $a+b+c=3$

6) $\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{1}{6}(a+b+c)$

7) $\dfrac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+\dfrac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+\dfrac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\le\dfrac{a+b+c}{4}$

8) $\dfrac{1}{2ab^2+1}+\dfrac{1}{2bc^2+1}+\dfrac{1}{2ca^2+1}\ge 1$ với $a+b+c=3$.

9) $\dfrac{3a+b}{2a+c}+\dfrac{3b+c}{2b+a}+\dfrac{3c+a}{2c+b}\ge 4$. Với a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác

10) 10)$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\dfrac{5}{2}$. Với a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác

11) $\sqrt{\dfrac{ab}{a^2+b^2}}+\sqrt{\dfrac{bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\dfrac{ca}{c^2+a^2}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ biết $a,b,c\ge 0$ sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 và $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

12) $\dfrac{a}{\sqrt{4a+3bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{4b+3ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{4c+3ab}}\le 1$ biết $a,b,c\ge 0$ sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 và $a+b+c=2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

1) $\dfrac{a}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{b}{c^2+ca+a^2}+\dfrac{c}{c^2+ca+a^2}\ge\dfrac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

Ta có: $\dfrac{a}{b^2+bc+c^2}=\dfrac{a^2}{ab^2+abc+ac^2}$. Suy ra

$$\sum\frac{a^2}{ab^2+abc+ac^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc}\ge\dfrac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

$\Leftrightarrow(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+3abc$ (Nhưng đây là hằng đẳng thức)

2) Ta có: $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$

Suy ra $\dfrac{a}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{b}{c^2+ca+a^2}+\dfrac{c}{c^2+ca+a^2}\geq\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$

3) $(a+b+c+1)^2=\left[a+\sqrt{3}\left(\dfrac{b+c+1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2\leq\left(a^2+3\right)\left[1+\dfrac{(b+c+1)^2}{3}\right]$

Từ đó suy ra $4(a+b+c+1)^2\leq 4\left(a^2+3\right)\left[1+\dfrac{(b+c+1)^2}{3}\right]$. Ta chứng minh:

$4\left(a^2+3\right)\left[1+\dfrac{(b+c+1)^2}{3}\right]\leq\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\Leftrightarrow 4\left[3+(b+c+1)^2\right]\leq 3\left(b^2+3\right)($

Bất đẳng thức này tương đương với:

$4\left[3+(b+c+1)^2\right]\leq 3\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right)\Leftrightarrow 4\left[4+b^2+c^2+2bc+2b+2c\right]\leq 9b^2+9c^2+3b$

$\Leftrightarrow 5\left(b^2+c^2\right)+3b^2c^2-8(b+c)-8bc+13\geq 0$. Ta viết lại bất đẳng thức trên thành: $5\left(b^2+c^2\right)-2bc-8(b+c)+8+3(bc-1)^2\geq 0$.

Ta có $b^2+c^2\geq 2bc,\ 2\left(b^2+c^2\right)\geq(b+c)^2\Rightarrow 4\left(b^2+c^2\right)\geq 2(b+c)^2$. Nên

$5\left(b^2+c^2\right)-2bc-8(b+c)+8+3(bc-1)^2\geq 2(b+c)^2-8(b+c)+8+2bc-2bc+3(bc-$

$=2(b+c-2)^2+3(bc-1)^2\geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

4) $\dfrac{a^3b}{1+ab^2}+\dfrac{b^3c}{1+bc^2}+\dfrac{c^3a}{1+ca^2}\geq\dfrac{abc(a+b+c)}{1+abc}$

Ta có: $\dfrac{a^3b}{1+ab^2}=\dfrac{a^4b^2c^2}{abc^2+a^2b^3c^2}$ Suy ra

$$\sum\frac{a^3b}{1+ab^2}=\sum\frac{a^4b^2c^2}{abc^2+a^2b^3c^2}\ge\frac{\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2}$$
$$=\frac{a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)^2}{abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2}\ge\frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

$\left(1+abc\right)abc(a+b+c)\ge abc^2+a^2b^3c^2+bca^2+b^2c^3a^2+cab^2+c^2a^3b^2$. Đây là đẳng thức.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

5) $\dfrac{a^2}{a+2b^2}=\dfrac{a^4}{a^2+2a^2b^2}$.

Suy ra $\sum\dfrac{a^2}{a+2b^2}=\sum\dfrac{a^4}{a^3+2a^2b^2}\ge\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2}$. Ta chứng minh:

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2}\ge1$$

Hay $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{\sum a^3+2\sum a^2b^2}\ge1\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$

Ta cần chứng minh: $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$ với $a+b+c=3$. Ta chứng minh:

$3\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b+c\right)\Leftrightarrow2\left(a^4+b^4+c^4\right)\ge ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right.$

Để ý rằng:

$2\left(a^4+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)\ge2ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)$

. Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều ta suy ra điều phải chứng minh:

6) Ta có:

$$\frac{1}{a+3b+2c}=\frac{1}{(a+c)+(b+c)+2b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right)\Rightarrow\frac{ab}{a+3b+2c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+b}+\right.$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng lại thì thu được:

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{1}{2}a+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{1}{2}b+\frac{c}{c-}\right.$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b}\le\frac{1}{6}(a+b+c)$$

7) Ta có $\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{bc^2}{b^2+2c^2+a^2}+\frac{ca^2}{c^2+2a^2+b^2}\le\frac{a+b+c}{4}$

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}\le\frac{b}{4}\left[\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+b^2+c^2}\right]\le\frac{b}{4}\left[\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right]$$

Suy ra

$$VT\le\frac{b}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)+\frac{c}{4}\left(\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)+\frac{a}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)=\frac{a+b+c}{4}$$

8) $\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1}\ge 1$

Ta có: $\frac{1}{2ab^2+1}=\frac{c^2}{2ab^2c^2+c^2}$ suy ra

$VT\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c+2a^2bc^2+2ab^2c^2}$. Ta chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2a^2b^2c+2a^2bc^2+2ab^2c^2}\ge 1\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge abc(a+b+c)\Leftrightarrow abc\le 1$. Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3\Rightarrow abc\le 1$ là điều phải chứng minh.

9) Ta xét: $\dfrac{3a+b}{2a+c}-m=\dfrac{a(3-2m)+b-mc}{2a+c}$

Chọn $m=1$ để xuất hiện: $\dfrac{3a+b}{2a+c}-1=\dfrac{a+b-c}{2a+c}$

Khi đó ta có: Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng:
$\dfrac{a+b-c}{2a+c}+\dfrac{b+c-a}{2b+a}+\dfrac{c+a-b}{2c+b}\ge 1$

Suy ra $VT\ge \dfrac{\left(a+b-c+b+c-a+c+a-b\right)^2}{\sum(a+b-c)(2a+c)}=\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{\left(a+b+c\right)^2}=1$. Đpcm

10) Ta viết lại bất đẳng thức thành:

$$1-\frac{a}{b+c}+1-\frac{b}{c+a}+1-\frac{c}{a+b}\ge \frac{1}{2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c}+\frac{a+c-b}{c+a}+\frac{a+b-c}{a+b}\ge \frac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Ta có $VT\ge \dfrac{4\left(a+b+c\right)^2}{\sum\left(b+c-a\right)\left(b+c\right)}=\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

11) Ta có: $\sqrt{\dfrac{ab}{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{ab}\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}\ge \dfrac{\sqrt{2}ab}{a^2+b^2}$.

Ta quy bài toán về chứng minh: $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}+\dfrac{2bc}{b^2+c^2}+\dfrac{2ca}{c^2+a^2}\ge 1$. Hay
$\dfrac{\left(a+b\right)^2}{a^2+b^2}+\dfrac{\left(b+c\right)^2}{b^2+c^2}+\dfrac{\left(c+a\right)^2}{c^2+a^2}\ge 4$. Thật vậy ta có:

$VT \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)+2ab+2bc+2ca} = 4$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị.

12) Ta có: $VT^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab}\right)$

$=2\left(\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab}\right)$. Ta chứng minh:

$\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}-\frac{a}{4a+3bc}+\frac{1}{4}-\frac{b}{4b+3ca}+\frac{1}{4}-\frac{c}{4c+3ab} \geq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{bc}{4a+3bc}+\frac{ca}{4b+3ca}+\frac{ab}{4c+3ab} \geq \frac{1}{3}$.

Ta có:

$$VT \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4abc)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c))} = \frac{1}{3}$$