

CHUYÊN ĐỀ 3

Bài 6. PHÉP CỘNG PHÂN SỐ, TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÉP CỘNG PHÂN SỐ.

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Hiểu các quy tắc thực hiện phép toán cộng: Cộng hai phân số cùng mẫu, cộng hai phân số không cùng mẫu.
- + Nắm vững các tính chất của phép cộng phân số.

❖ Kỹ năng

- + Thực hiện được phép toán cộng đối với phân số: Cộng hai phân số cùng mẫu, cộng hai phân số khác mẫu.
- + Thành thạo quy đồng và rút gọn phân số.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Quy tắc cộng hai phân số cùng mẫu

Muốn cộng hai phân số cùng mẫu, ta cộng các tử và giữ nguyên mẫu.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

Cộng hai phân số không cùng mẫu

Muốn cộng hai phân số không cùng mẫu, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu, rồi cộng các tử và giữ nguyên mẫu.

Tính chất của phép cộng phân số

1. Tính chất giao hoán: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$

2. Tính chất kết hợp:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

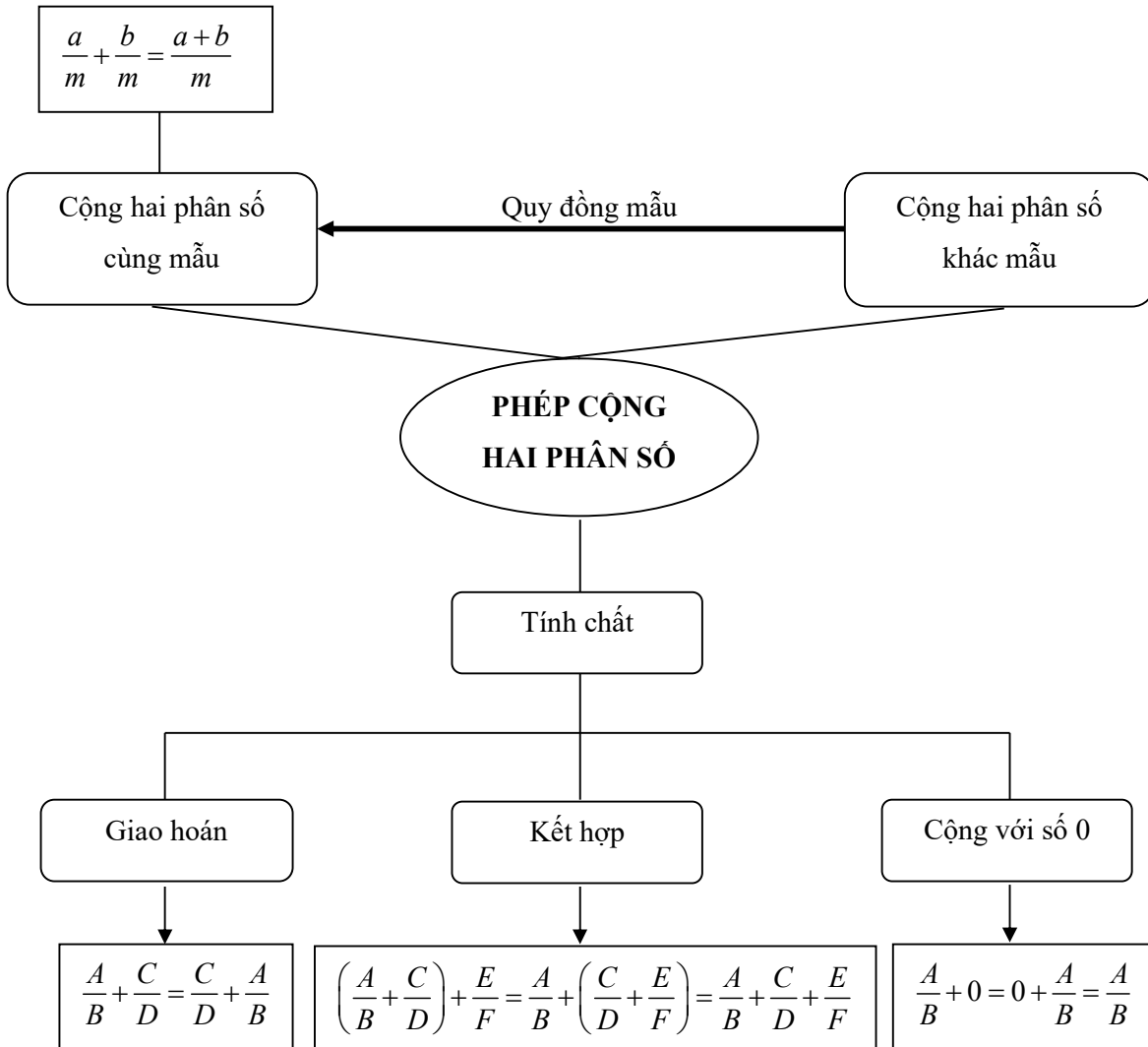
3. Cộng với số 0: $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$

$$\frac{\triangle}{\square} + \frac{\circ}{\square} = \frac{\triangle + \circ}{\square}$$

Nhắc lại: Để viết các phân số dưới dạng cùng mẫu, ta thực hiện quy đồng mẫu số.

Ví dụ: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}.$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện phép cộng các phân số

🔧 Phương pháp giải

Cộng hai phân số cùng mẫu

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$$

(Cộng các tử và giữ nguyên mẫu)

Cộng hai phân số không cùng mẫu

Bước 1: Rút gọn phân số (nếu có phân số chưa tối giản).

Bước 2: Quy đồng mẫu số các phân số.

Bước 3: Thực hiện phép cộng của hai phân số cùng mẫu.

Chú ý rút gọn kết quả.

Ví dụ 1: $\frac{2}{3} + \frac{-1}{3} = \frac{2+(-1)}{3} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: $\frac{-2}{3} + \frac{4}{15}$.

Hướng dẫn giải

$$\frac{-2}{3} = \frac{-2.5}{3.5} = \frac{-10}{15}$$

Suy ra $\frac{-2}{3} + \frac{4}{15} = \frac{-10}{15} + \frac{4}{15}$
 $= \frac{-6}{15} = \frac{-2}{5}$.

🔧 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cộng các phân số sau (rút gọn kết quả nếu có thể):

a) $\frac{-6}{25} + \frac{-9}{25}$; b) $\frac{1}{8} + \frac{-5}{8}$;

c) $\frac{7}{12} + \frac{13}{24}$; d) $\frac{1}{4} + \frac{-5}{6}$;

Hướng dẫn giải

a) $\frac{-6}{25} + \frac{-9}{25} = \frac{-6+(-9)}{25} = \frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$.

b) $\frac{1}{8} + \frac{-5}{8} = \frac{1+(-5)}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$.

c) $\frac{7}{12} + \frac{13}{24} = \frac{14}{24} + \frac{13}{24} = \frac{14+13}{24} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$.

d) $\frac{1}{4} + \frac{-5}{6} = \frac{3}{12} + \frac{-10}{12} = \frac{3+(-10)}{12} = \frac{-7}{12}$.

Ví dụ 2. Điền dấu thích hợp (>, =, <) vào ô vuông:

a) $\frac{-2}{5} + \frac{3}{-5} \square -1$;

b) $\frac{13}{30} + \frac{12}{30} \square \frac{7}{6}$;

c) $\frac{-1}{6} + \frac{-3}{4} \square \frac{-2}{3} + \frac{7}{8}$;

d) $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} \square \frac{4}{9} + \frac{1}{12}$;

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \underbrace{\frac{-2}{5} + \frac{3}{-5}}_{\frac{-5}{5} = -1} \equiv -1;$$

$$\text{b) } \underbrace{\frac{13}{30} + \frac{12}{30}}_{\frac{25}{30} = \frac{5}{6}} \leq \frac{7}{6};$$

$$\text{c) } \underbrace{\frac{-1}{6} + \frac{-3}{4}}_{\frac{-22}{24}} \leq \underbrace{\frac{-2}{3} + \frac{7}{8}}_{\frac{5}{24}};$$

$$\text{d) } \underbrace{\frac{3}{7} + \frac{1}{4}}_{\frac{19}{28}} \geq \underbrace{\frac{4}{9} + \frac{1}{12}}_{\frac{19}{36}}.$$

Ví dụ 3. Tính các tổng dưới đây sau khi đã rút gọn các phân số:

$$\text{a) } \frac{-6}{24} + \frac{9}{18};$$

$$\text{b) } \frac{13}{39} + \frac{-8}{40};$$

$$\text{c) } \frac{-18}{27} + \frac{2}{21};$$

$$\text{d) } \frac{15}{35} + \frac{-24}{48}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \frac{-6}{24} + \frac{9}{18} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{-1+2}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } \frac{13}{39} + \frac{-8}{40} = \frac{1}{3} + \frac{-1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{-3}{15} = \frac{5+(-3)}{15} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{c) } \frac{-18}{27} + \frac{2}{21} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{21} = \frac{-14}{21} + \frac{2}{21} = \frac{-12}{21} = \frac{-4}{7}.$$

$$\text{d) } \frac{15}{35} + \frac{-24}{48} = \frac{3}{7} + \frac{-1}{2} = \frac{6}{14} + \frac{-7}{14} = \frac{6+(-7)}{14} = \frac{-1}{14}.$$

Lời bình: Rút gọn phân số giúp quá trình quy đồng mẫu đơn giản hơn.

Bài toán 2. Thực hiện phép cộng nhiều phân số

🔧 Phương pháp giải

Áp dụng tính chất cơ bản của phép cộng phân số:

Tính chất giao hoán:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

Tính chất kết hợp:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

Cộng với số 0:

$$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

🔧 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính nhanh các tổng sau:

$$\text{a) } \frac{-4}{9} + \frac{7}{11} + \frac{-5}{9};$$

$$\text{b) } \frac{-1}{24} + \frac{8}{32} + \frac{-5}{24};$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{5}{9} + \frac{-5}{7}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) } \frac{-4}{9} + \frac{7}{11} + \frac{-5}{9} = \frac{-4}{9} + \frac{-5}{9} + \frac{7}{11} \quad (\text{Tính chất giao hoán})$$

$$= \left(\frac{-4}{9} + \frac{-5}{9} \right) + \frac{7}{11} \quad (\text{Tính chất kết hợp})$$

$$= \frac{-9}{9} + \frac{7}{11}$$

$$= -1 + \frac{7}{11}$$

$$= \frac{-11}{11} + \frac{7}{11}$$

$$= \frac{-4}{11}.$$

$$\text{b) } \frac{-1}{24} + \frac{8}{32} + \frac{-5}{24} = \frac{-1}{24} + \frac{-5}{24} + \frac{8}{32} \quad (\text{Tính chất giao hoán})$$

$$= \left(\frac{-1}{24} + \frac{-5}{24} \right) + \frac{1}{4} \quad (\text{Tính chất kết hợp})$$

$$= \frac{-6}{24} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 0.$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} + \frac{-2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{5}{9} + \frac{-5}{7} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{-2}{7} + \frac{-5}{7} + \frac{5}{9} \quad (\text{Tính chất giao hoán})$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{-2}{7} + \frac{-5}{7} \right) + \frac{5}{9} \quad (\text{Tính chất kết hợp})$$

$$= \frac{4}{4} + \frac{-7}{7} + \frac{5}{9}$$

$$= 1 + (-1) + \frac{5}{9}$$

$$= 0 + \frac{5}{9}$$

$$= \frac{5}{9} \quad (\text{Cộng với số } 0).$$

Ví dụ 2. Tính nhanh:

$$\text{a) } A = \frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \frac{1}{15} + \frac{4}{45} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{7}{45} + \frac{8}{45} + \frac{1}{5};$$

$$\text{b) } B = \frac{1}{28} + \frac{-1}{14} + \frac{3}{28} + \frac{1}{7} + \frac{-5}{28} + \frac{3}{14} + \frac{-1}{4}.$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \frac{3}{45} + \frac{4}{45} + \frac{5}{45} + \frac{6}{45} + \frac{7}{45} + \frac{8}{45} + \frac{9}{45} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{45} \\ &= \frac{45}{45} \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{28} + \frac{-1}{14} + \frac{3}{28} + \frac{1}{7} + \frac{-5}{28} + \frac{3}{14} + \frac{-1}{4} \\ &= \frac{1}{28} + \frac{-2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{-5}{28} + \frac{6}{28} + \frac{-7}{28} \\ &= \frac{1+(-2)+3+4+(-5)+6+(-7)}{28} \\ &= \frac{(1+3+4+6)+[(-2)+(-5)+(-7)]}{28} \\ &= \frac{14+(-14)}{28} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Ba người cùng làm một công việc. Nếu làm riêng, người thứ nhất phải mất 5 giờ, người thứ hai mất 4 giờ, người thứ ba mất 6 giờ. Hỏi:

a) Trong 1 giờ, mỗi người làm được mấy phần công việc?

b) Nếu làm chung thì mỗi giờ cả ba người làm được bao nhiêu phần công việc?

Hướng dẫn giải

a) Trong 1 giờ:

Người thứ nhất làm được $\frac{1}{5}$ công việc.

Người thứ hai làm được $\frac{1}{4}$ công việc.

Người thứ ba làm được $\frac{1}{6}$ công việc.

b) Nếu làm chung thì mỗi giờ cả ba người làm được số phần công việc là:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{12}{60} + \frac{15}{60} + \frac{10}{60} = \frac{37}{60} \text{ (công việc).}$$

Ví dụ 4. Viết phân số $\frac{-11}{20}$ thành tổng của ba phân số có tử bằng -1 và mẫu khác nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{-11}{20} = \frac{(-1)+(-6)+(-4)}{20} = \frac{-1}{20} + \frac{-6}{20} + \frac{-4}{20} = \frac{-1}{20} + \frac{-3}{10} + \frac{-1}{5}$ (loại vì $\frac{-3}{10}$ có tử khác -1).

$\frac{-11}{20} = \frac{(-1)+(-2)+(-8)}{20} = \frac{-1}{20} + \frac{-2}{20} + \frac{-8}{20} = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{10} + \frac{-2}{5}$ (loại vì $\frac{-2}{5}$ có tử khác -1).

$\frac{-11}{20} = \frac{(-2)+(-4)+(-5)}{20} = \frac{-2}{20} + \frac{-4}{20} + \frac{-5}{20} = \frac{-1}{10} + \frac{-1}{5} + \frac{-1}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy $\frac{-11}{20} = \frac{-1}{10} + \frac{-1}{5} + \frac{-1}{4}$.

 **Bài tập tự luyện dạng 1**

Bài tập cơ bản

Câu 1. Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{-4}{15} + \frac{9}{15}$; b) $\frac{1}{4} + \frac{-7}{5}$; c) $-2 + \frac{5}{8}$; d) $\frac{11}{13} + \frac{-23}{39}$.

Câu 2. Thực hiện các phép tính:

a) $\frac{-5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-1}{9}$; c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5}$; d) $\frac{7}{8} + \frac{5}{16} + \frac{-3}{4}$.

Câu 3. Điền dấu thích hợp (>, =, <) vào ô vuông:

a) $\frac{-3}{11} + \frac{9}{-11} \square -1$; b) $\frac{3}{7} + \frac{-1}{6} \square \frac{1}{9}$;
c) $\frac{5}{6} + \frac{-2}{3} \square \frac{1}{12} + \frac{-4}{5}$; d) $\frac{-5}{12} + \frac{1}{-4} \square \frac{7}{18} + \frac{-11}{6}$.

Câu 4. Điền số thích hợp vào ô trống: $\frac{1}{3} + \frac{-5}{2} + \frac{-17}{6} < \square < \frac{7}{2} + \frac{-3}{5} + \frac{-59}{10}$.

Câu 5. Tính các tổng sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{3}$; b) $\frac{5}{2} + \frac{6}{11} + \frac{2}{8} + \frac{7}{2} + \frac{6}{8} + \frac{5}{11}$;
c) $\frac{-1}{8} + \frac{6}{7} + \frac{2}{14} + \frac{-7}{8} + \frac{7}{9}$; d) $\frac{-4}{12} + \frac{18}{45} + \frac{-6}{9} + \frac{-21}{35} + \frac{6}{30}$.

Câu 6. Tính nhanh:

a) $A = \frac{15}{16} + \frac{13}{33} + \frac{1}{11} + \frac{7}{33} + \frac{-15}{16} + \frac{20}{66}$;

b) $B = \frac{1}{3} + \frac{-3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{-1}{36} + \frac{1}{15} + \frac{-2}{9}$;

$$c) C = \frac{1}{2} + \frac{-2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{-4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{-5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{-3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{-1}{2}.$$

Câu 7. Một vòi nước chảy vào một cái bể. Giờ thứ nhất vòi đó chảy được $\frac{1}{5}$ bể, giờ thứ hai vòi đó chảy được $\frac{2}{7}$ bể, giờ thứ 3 vòi đó chảy được $\frac{11}{35}$ bể. Hỏi sau 3 giờ vòi đó có chảy đầy bể không?

Bài tập nâng cao

Câu 8. Viết phân số $\frac{-4}{5}$ thành tổng của ba phân số có tử số bằng -1 và mẫu số khác nhau. Tìm hai cách viết khác nhau.

Câu 9. Có 8 quả cam cần chia đều cho 15 người. Làm thế nào để không cần cắt quả cam nào thành 15 phần vẫn có thể chia đều số cam cho 15 người.

Hướng dẫn giải bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1.

$$a) \frac{-4}{15} + \frac{9}{15} = \frac{(-4)+9}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$b) \frac{1}{4} + \frac{-7}{5} = \frac{5}{20} + \frac{-28}{20} = \frac{5+(-28)}{20} = \frac{-23}{20}.$$

$$c) -2 + \frac{5}{8} = \frac{-16}{8} + \frac{5}{8} = \frac{-16+5}{8} = \frac{-11}{8}.$$

$$d) \frac{11}{13} + \frac{-23}{39} = \frac{33}{39} + \frac{-23}{39} = \frac{33+(-23)}{39} = \frac{10}{39}.$$

Câu 2.

$$a) \frac{-5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{(-5)+1+7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$b) \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{-1}{9} = \frac{18}{45} + \frac{60}{45} + \frac{-5}{45} = \frac{18+60+(-5)}{45} = \frac{73}{45}.$$

$$c) \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{35}{70} + \frac{10}{70} + \frac{14}{70} = \frac{35+10+14}{70} = \frac{59}{70}.$$

$$d) \frac{7}{8} + \frac{5}{16} + \frac{-3}{4} = \frac{14}{16} + \frac{5}{16} + \frac{-12}{16} = \frac{14+5+(-12)}{16} = \frac{7}{16}.$$

Câu 3.

$$a) \frac{-3}{11} + \frac{9}{-11} \boxed{<} \frac{-1}{11};$$

$$b) \frac{3}{7} + \frac{-1}{6} \boxed{>} \frac{1}{9};$$

$$\text{c) } \underbrace{\frac{5}{6} + \frac{-2}{3}}_{\frac{1}{6} = \frac{10}{60}} \square \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{-4}{5}}_{\frac{-43}{60}};$$

$$\text{d) } \underbrace{\frac{-5}{12} + \frac{1}{-4}}_{\frac{-2}{3} = \frac{-6}{9}} \square \underbrace{\frac{7}{18} + \frac{-11}{6}}_{\frac{-13}{9}}.$$

Câu 4.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} + \frac{-5}{2} + \frac{-17}{6} = \frac{2}{6} + \frac{-15}{6} + \frac{-17}{6} = \frac{2 + (-15) + (-17)}{6} = \frac{-30}{6} = -5.$$

$$\frac{7}{2} + \frac{-3}{5} + \frac{-59}{10} = \frac{35}{10} + \frac{-6}{10} + \frac{-59}{10} = \frac{35 + (-6) + (-59)}{10} = \frac{-30}{10} = -3.$$

Khi đó $-5 < \square < -3$. Suy ra số cần tìm là -4 .

Câu 5.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{7}{3} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{12}{3} + \frac{5}{5} \\ &= 4 + 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} + \frac{6}{11} + \frac{2}{8} + \frac{7}{2} + \frac{6}{8} + \frac{5}{11} \\ &= \left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) + \left(\frac{6}{11} + \frac{5}{11} \right) + \left(\frac{2}{8} + \frac{6}{8} \right) \\ &= \frac{12}{2} + \frac{11}{11} + \frac{8}{8} \\ &= 6 + 1 + 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{8} + \frac{6}{7} + \frac{2}{14} + \frac{-7}{8} + \frac{7}{9} \\ &= \left(\frac{-1}{8} + \frac{-7}{8} \right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{14} \right) + \frac{7}{9} \\ &= \frac{-8}{8} + \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7} \right) + \frac{7}{9} \\ &= (-1) + 1 + \frac{7}{9} \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{-4}{12} + \frac{18}{45} + \frac{-6}{9} + \frac{-21}{35} + \frac{6}{30} \\ &= \frac{-1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{-2}{3} + \frac{-3}{5} + \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{-1}{3} + \frac{-2}{3} \right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{-3}{5} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{-3}{3} + \frac{0}{5} \\ &= (-1) + 0 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Câu 6.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= \frac{15}{16} + \frac{13}{33} + \frac{1}{11} + \frac{7}{33} + \frac{-15}{16} + \frac{20}{66} \\ &= \left(\frac{15}{16} + \frac{-15}{16} \right) + \left(\frac{13}{33} + \frac{7}{33} + \frac{1}{11} + \frac{20}{66} \right) \\ &= \frac{0}{16} + \left(\frac{13}{33} + \frac{7}{33} + \frac{3}{33} + \frac{10}{33} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{33}{33} \\
&= 0 + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

b) Ta có: $B = \frac{1}{3} + \frac{-3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{-1}{36} + \frac{1}{15} + \frac{-2}{9}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \right) + \left(\frac{-3}{4} + \frac{-1}{36} + \frac{-2}{9} \right) \\
&= \left(\frac{5}{15} + \frac{9}{15} + \frac{1}{15} \right) + \left(\frac{-27}{36} + \frac{-1}{36} + \frac{-8}{36} \right) \\
&= \frac{15}{15} + \frac{-36}{36} \\
&= 1 + (-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c) Ta có: $C = \frac{1}{2} + \frac{-2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{-4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{-5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{-3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{-1}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} \right) + \left(\frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{-3}{4} \right) + \left(\frac{-4}{5} + \frac{4}{5} \right) + \left(\frac{5}{6} + \frac{-5}{6} \right) \\
&= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Câu 7.

Sau 3 giờ vòi đó chảy được số phần bể là:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{7} + \frac{11}{35} = \frac{7}{35} + \frac{10}{35} + \frac{11}{35} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5} \text{ bể.}$$

Vậy sau 3 giờ vòi đó không chảy đầy bể.

Bài tập nâng cao

Câu 8.

Ta có: $\frac{-4}{5} = \frac{-8}{10} = \frac{(-5)+(-2)+(-1)}{10} = \frac{-5}{10} + \frac{-2}{10} + \frac{-1}{10} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{5} + \frac{-1}{10}.$

$$\frac{-4}{5} = \frac{-16}{20} = \frac{(-10)+(-5)+(-1)}{20} = \frac{-10}{20} + \frac{-5}{20} + \frac{-1}{20} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{4} + \frac{-1}{20}.$$

Câu 9.

Với 8 quả cam chia đều cho 15 người thì mỗi người sẽ được $\frac{8}{15}$ quả cam.

Ta thấy $\frac{8}{15} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}.$

Như vậy, mỗi người sẽ được $\frac{1}{5}$ quả cam và $\frac{1}{3}$ quả cam.

Vậy ta cắt 3 quả cam, mỗi quả thành 5 phần bằng nhau; cắt 5 quả còn lại, mỗi quả thành 3 phần bằng nhau.

Dạng 2. So sánh tổng với một số

🔧 Phương pháp giải

Đánh giá các số hạng của tổng đều lớn hơn hoặc nhỏ hơn một số nào đó.

Đếm số số hạng của tổng. Từ đó suy ra kết luận.

Ví dụ: Chứng minh $S = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40} > \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $\frac{1}{20} > \frac{1}{40}; \frac{1}{21} > \frac{1}{40}; \dots; \frac{1}{39} > \frac{1}{40}$.

S có 20 số hạng.

Suy ra $S > \underbrace{\frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{40}}_{20 \text{ số hạng}} = 20 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{2}$.

Vậy $S > \frac{1}{2}$.

🔧 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $S = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}$.

Không tính tổng, hãy so sánh S và $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy: $\frac{1}{11} > \frac{1}{20}; \frac{1}{12} > \frac{1}{20}; \dots; \frac{1}{19} > \frac{1}{20}$.

Suy ra $S > \underbrace{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{20}}_{10 \text{ số hạng}} = 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$.

Vậy $S > \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2. Cho $S = \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12} + \frac{3}{13} + \frac{3}{14}$. Chứng minh rằng $1 < S < 2$, từ đó

suy ra S không phải là số tự nhiên.

Hướng dẫn giải

Ta thấy $S > \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} + \frac{3}{15} = 5 \cdot \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = 1$.

$S < \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 5 \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{10} < \frac{20}{10} = 2$.

Nhận thấy tổng S có 10 số hạng và các số hạng giảm dần từ $\frac{1}{11}$ đến $\frac{1}{20}$.

Tức là, mỗi phân số $\frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \dots; \frac{1}{19}$ đều lớn

hơn $\frac{1}{20}$; hoặc mỗi phân

số $\frac{1}{12}; \frac{1}{13}; \dots; \frac{1}{20}$ đều nhỏ

hơn $\frac{1}{11}$.

Lại có: $10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$ nên

định hướng chứng minh

$S > \frac{1}{2}$.

Chú ý: Với những bài

Suy ra $1 < S < 2$. Vậy S không phải là số tự nhiên.

toán yêu cầu chứng minh số A không là số tự nhiên ta sẽ chứng minh A bị kẹp giữa hai số tự nhiên liên tiếp $n < A < n+1$.

Ví dụ 3. Cho tổng $S = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17}$, Chứng tỏ rằng $S < 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } S = \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)}_{S_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{17}\right)}_{S_2}$$

Ta sẽ chứng minh $S_1 < 1$ và $S_2 < 1$.

Ta thấy tổng S_1 gồm 5 số hạng nên ta cần chỉ ra mỗi số hạng của S_1 nhỏ hơn $\frac{1}{5}$.

$$S_1 < \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1. \text{ Suy ra } S_1 < 1.$$

$$\text{Tương tự: } S_2 < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1. \text{ Suy ra } S_2 < 1.$$

$$\text{Do đó } S = S_1 + S_2 < 1 + 1 = 2$$

Vậy $S < 2$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Bài tập cơ bản

Câu 1. Cho tổng $S = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \frac{1}{29} + \frac{1}{30}$.

Không tính tổng, hãy so sánh S với $\frac{1}{3}$.

Bài tập nâng cao

Câu 2. Chứng tỏ rằng tổng của các phân số sau lớn hơn $\frac{1}{2}$: $S = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}$.

Câu 3. Cho tổng $A = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$. Chứng tỏ rằng $A > 1$.

Hướng dẫn giải bài tập tự luyện dạng

Bài tập cơ bản

Câu 1.

Mỗi phân số $\frac{1}{21}; \frac{1}{22}; \dots; \frac{1}{29}$ đều lớn hơn $\frac{1}{30}$ và tổng S có 10 số hạng nên:

$$S > \underbrace{\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{30}}_{10 \text{ số hạng}} = 10 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{3}.$$

Bài tập nâng cao

Câu 2.

Mỗi phân số trong tổng đã cho đều lớn hơn $\frac{1}{100}$, tất cả có 50 phân số. Vậy:

$$S > \underbrace{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100}}_{50 \text{ số hạng}} = 50 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $S > \frac{1}{2}$.

Câu 3:

Ta có: $A = \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) > \frac{1}{10} + \underbrace{\left(\frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right)}_{90 \text{ số hạng}} = \frac{1}{10} + 90 \cdot \frac{1}{100} = 1.$

Vậy $A > 1$.

Dạng 3. Tìm số chưa biết trong một đẳng thức

📌 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm x biết:

a) $x = \frac{1}{4} + \frac{-2}{5};$

b) $\frac{2}{x} = \frac{5}{9} + \frac{-1}{2};$

c) $|x| = 2 + \frac{-3}{7}.$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{1}{4} + \frac{-2}{5} = \frac{5}{20} + \frac{-8}{20} = \frac{-3}{20}$. Vậy $x = \frac{-3}{20}$.

b) Ta có $\frac{5}{9} + \frac{-1}{2} = \frac{10}{18} + \frac{-9}{18} = \frac{1}{18}$. Suy ra $\frac{2}{x} = \frac{1}{18}$, do đó $x = 2 \cdot 18 = 36$.

Vậy $x = 36$.

c) Ta có: $2 + \frac{-3}{7} = \frac{14}{7} + \frac{-3}{7} = \frac{11}{7}$. Suy ra $|x| = \frac{11}{7}$, do đó $x = \pm \frac{11}{7}$.

Vậy $x = \frac{11}{7}$ hoặc $x = -\frac{11}{7}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn: $\frac{1}{6} + \frac{-5}{2} + \frac{-2}{3} \leq x \leq \frac{-1}{3} + \frac{8}{5} + \frac{11}{15}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{6} + \frac{-5}{2} + \frac{-2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{-15}{6} + \frac{-4}{6} = \frac{-18}{6} = -3.$$

$$\frac{-1}{3} + \frac{8}{5} + \frac{11}{15} = \frac{-5}{15} + \frac{24}{15} + \frac{11}{15} = \frac{30}{15} = 2.$$

Suy ra $-3 \leq x \leq 2$. Mà x nguyên nên $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1. Tìm x biết

a) $x = \frac{1}{5} + \frac{2}{11}$;

b) $\frac{x}{15} = \frac{3}{5} + \frac{-2}{3}$;

c) $\frac{11}{8} + \frac{13}{6} = \frac{85}{x}$.

Câu 2. Tìm x biết

a) $x = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{-2}{9}$;

b) $x - \frac{7}{12} = \frac{3}{4}$;

c) $|x| = \frac{1}{5} + \frac{3}{4}$.

Bài tập nâng cao

Câu 3. Tìm các số nguyên x biết:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{15}{4} + \frac{18}{8}$;

b) $\frac{1}{2} + \frac{-3}{5} + \frac{1}{10} \leq x \leq \frac{9}{4} + \frac{1}{3} + \frac{41}{12}$;

c) $\frac{5}{4} + \frac{-7}{3} + \frac{-11}{12} \leq x \leq \frac{7}{9} + \frac{-1}{6} + \frac{61}{18}$.

Câu 4. Tìm x biết:

a) $\frac{3}{4} + \frac{-2}{3} < \frac{x}{12} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ và $x \in \mathbb{Z}$;

b) $\frac{x+2}{4} + \frac{x-6}{12}$ là số nguyên (với $x \in \mathbb{Z}$).

Hướng dẫn giải bài tập tự luyện dạng 3

Bài tập cơ bản

Câu 1.

a) Ta có: $\frac{1}{5} + \frac{2}{11} = \frac{11}{55} + \frac{10}{55} = \frac{11+10}{55} = \frac{21}{55}$.

Vậy $x = \frac{21}{11}$.

b) Ta có: $\frac{3}{5} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{-10}{15} = \frac{9+(-10)}{15} = \frac{-1}{15}$.

Suy ra $\frac{x}{15} = \frac{-1}{15}$ do đó $x = -1$.

Vậy $x = -1$.

c) Ta có: $\frac{11}{8} + \frac{13}{6} = \frac{33}{24} + \frac{52}{24} = \frac{33+52}{24} = \frac{85}{24}$.

Suy ra $\frac{85}{24} = \frac{85}{x}$ do đó $x = 24$.

Vậy $x = 24$.

Câu 2.

a) Ta có: $\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{-2}{9} = \frac{3}{36} + \frac{27}{36} + \frac{-8}{36} = \frac{3+27+(-8)}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

Vậy $x = \frac{11}{18}$.

b) Ta có $x - \frac{7}{12} = \frac{3}{4}$ suy ra $x = \frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{9}{12} = \frac{7+9}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

Vậy $x = \frac{4}{3}$.

c) Ta có $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{15}{20} = \frac{4+15}{20} = \frac{19}{20}$.

Suy ra $|x| = \frac{19}{20}$ do đó $x = \pm \frac{19}{20}$.

Vậy $x = \frac{19}{20}$ hoặc $x = -\frac{19}{20}$.

Bài tập nâng cao

Câu 3.

a) Ta có $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

$$\frac{15}{4} + \frac{18}{8} = \frac{30}{8} + \frac{18}{8} = \frac{30+18}{8} = \frac{48}{8} = 6.$$

Khi đó $1 \leq x \leq 6$ và $x \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) Ta có $\frac{1}{2} + \frac{-3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} + \frac{-6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5+(-6)+1}{10} = \frac{0}{10} = 0$.

$$\frac{9}{4} + \frac{1}{3} + \frac{41}{12} = \frac{27}{12} + \frac{4}{12} + \frac{41}{12} = \frac{72}{12} = 6.$$

Khi đó $0 \leq x \leq 6$ và $x \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

c) Ta có $\frac{5}{4} + \frac{-7}{3} + \frac{-11}{12} = \frac{15}{12} + \frac{-28}{12} + \frac{-11}{12} = \frac{15+(-28)+(-11)}{12} = \frac{-24}{12} = -2$.

$$\frac{7}{9} + \frac{-1}{6} + \frac{61}{18} = \frac{14}{18} + \frac{-3}{18} + \frac{61}{18} = \frac{13+(-3)+61}{18} = \frac{72}{18} = 4.$$

Khi đó $-2 \leq x \leq 4$ và $x \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 4.

a) Ta có: $\frac{3}{4} + \frac{-2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{-8}{12} = \frac{9+(-8)}{12} = \frac{1}{12}$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Khi đó $\frac{1}{12} < \frac{x}{12} < \frac{7}{12}$ và $x \in \mathbb{Z}$, suy ra $x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy $x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) Ta có

$$\frac{x+2}{4} + \frac{x-6}{12} = \frac{3 \cdot (x+2)}{12} + \frac{x-6}{12} = \frac{3x+6+x-6}{12} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$$
 là số nguyên khi $x : 3$ hay $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vậy các số nguyên có dạng $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) là các giá trị cần tìm.