

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 1 (6 điểm).

a. Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$. Rút gọn P và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1) = 18$.

Bài 2 (4 điểm).

a. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases}$$

b. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình sau:

$$x^4 + 36y^3 + 2025 = 0.$$

Bài 3 (3 điểm).

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a, b) để $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.

b. Cho S là một tập hợp có 3 phần tử là ba số tự nhiên và thỏa mãn tính chất: Tổng của hai phần tử bất kỳ thuộc tập hợp S là một số chính phương. Hỏi ba phần tử của tập hợp S đều là các số tự nhiên lẻ có được không? Giải thích.

Bài 4 (6 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < BC < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AD . Kẻ DE vuông góc với BC tại E . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC , M là trung điểm của đoạn thẳng AK . Đường thẳng qua điểm E và song song với đường thẳng AK cắt đường tròn tâm D bán kính DE tại điểm N ($N \neq E$). Đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC cắt đường tròn tâm O đường kính AD tại điểm I ($I \neq A$).

a. Chứng minh rằng $\widehat{BCD} = \widehat{CBI}$ và $CH = BE$.

b. Dựng hình thang cân $BMPC$. Chứng minh rằng ba điểm P, E, N thẳng hàng.

c. Chứng minh rằng bốn điểm B, N, C, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5 (1 điểm). Xét tất cả các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2024$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{x^4}{y^2(z+x)} + \frac{y^4}{z^2(x+y)} + \frac{z^4}{x^2(y+z)}.$$

———— Hết ————

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)