SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
KIÊN GIANG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH THCS
NĂM HỌC 2020-2021

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **19/3/2021**
(Đề thi có 02 trang, gồm 05 bài)

Bài 1. (4 điểm)

Câu 1. Cho phương trình: $x^4+2\sqrt{6}mx^2+24=0$ (m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 phân biệt thỏa mãn: $x^4{}_1+x^4{}_2+x^4{}_3+x^4{}_4=144$

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x+2y=19 \\ \sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}=2 \end{cases}$ (với $x>\dfrac{3}{2}$, $y>-5$)

Bài 2. (4 điểm)

Câu 1. Cho hai số thực a,b khác 0 thỏa mãn $2a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{a^2}=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=ab+2019$.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol $(P): y=-x^2$

a) Chứng minh rằng đường thẳng $(d_1): y=2x+1$ tiếp xúc với parabol. Tìm tọa độ của tiếp điểm.

b) Xác định tiếp tuyến d_2 với parabol nói trên sao cho $d_2\perp d_1$.

c) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bài 3. (4 điểm)

Câu 1. Cho $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Xác định các số hữu tỉ a,b,c,d,e sao cho $f(x)-\mathrm{f}(x-1)=x^3$. Từ đó tính $S=1^3+2^3+3^3+...+n^3$.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương.

Bài 4. (4 điểm)

Câu 1. Cho ba số thực dương thỏa mãn tích của chúng bằng một và tổng của chúng luôn lớn hơn tổng nghịch đảo của chúng. Chứng minh rằng có một và chỉ một trong ba số lớn hơn một.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N.

a) Chứng minh tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Bài 5. (4 điểm) Cho (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O_2, R_2) tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài có BC, $\mathrm{B} \in (O_1)$, $\mathrm{C} \in (O_2)$.

a) Tính BAC.

b) Tính độ dài BC.

c) Gọi D là giao điểm của BA với (O_2). Chứng minh rằng ba điểm C, O_2, D thẳng hàng.

d) Tính độ dài BA.

--------------------HẾT--------------------

Ghi chú:

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*
- *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG -------------	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH THCS NĂM HỌC 2020-2021 -----------------------------
HƯỚNG DẪN CHẤM **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	Môn: **TOÁN** Thời gian: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **19/3/2021** *(Hướng dẫn chấm có 05 trang)*

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định;
- Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm lệch hướng dẫn chấm;
- Sau khi cộng điểm toàn bài thi vẫn giữ nguyên số điểm, không được làm tròn.

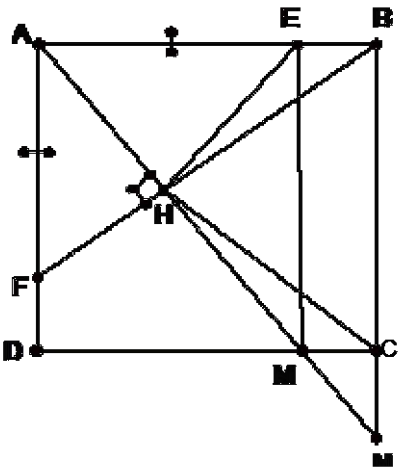
B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

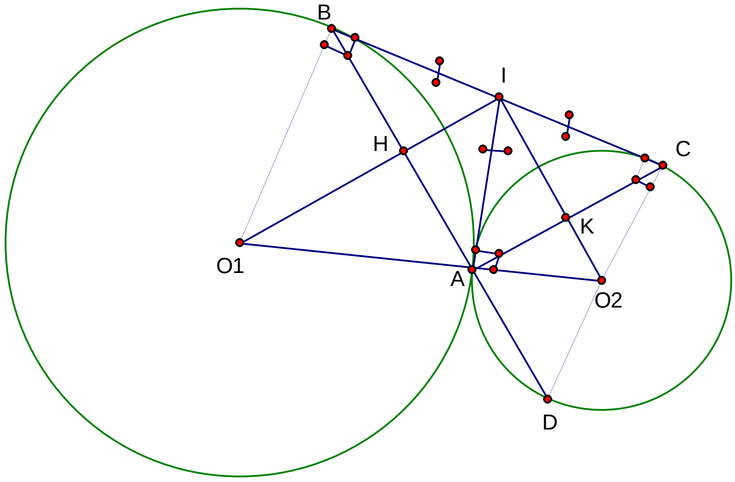
Bài	Câu	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1. **(4 điểm)**	1	Cho phương trình: $x^4+2\sqrt{6}mx^2+24=0$ (m là tham số). Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 phân biệt thỏa mãn: $x^4{}_1+x^4{}_2+x^4{}_3+x^4{}_4=144$	
		Ta có: $x^4+2\sqrt{6}mx^2+24=0$ Đặt: $t=x^2$, $t\ge 0$, phương trình trở thành: $t^2+2\sqrt{6}mt+24=0(1)$	0.25
		Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt $0<t_1<t_2$.	0.25
		Khi đó: $\begin{cases}\Delta' =6m^2-24>0\\ t_1.t_2=24>0\\ t_1+t_2=-2\sqrt{6}m>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2>4\\ m<0\end{cases} \Leftrightarrow m<-2$	0.5
		Với t_1,t_2 là hai nghiệm của (1) thì $x_1=-\sqrt{t_1},x_2=\sqrt{t_1},x_3=-\sqrt{t_2},x_4=\sqrt{t_2}$ nên ta có:	0.25
		$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4=2\left(t_1^2+t_2^2\right)=2\left[\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1.t_2\right]$	0.25
		$=2(24m^2-48)=144 \Leftrightarrow m^2=5 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$	0.25
		Từ đó suy ra $m=-\sqrt{5}$	0.25
	2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x+2y=19\\ \sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}+\sqrt{\dfrac{y+5}{2x-3}}=2\end{cases}$ (với $x>\dfrac{3}{2}, y>-5$)	
		Đặt $\sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}=m>0 \Rightarrow m+\dfrac{1}{m}=2$ $\Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$ (nhận).	0,5 0,25 0,5

		$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{2x-3}{y+5}}=1 \Leftrightarrow 2x-3=y+5 \Leftrightarrow 2x-y=8$ Giải hệ $\begin{cases}3x+2y=19\\2x-y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=19\\4x-2y=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$	0,75
Bài 2. **(4 điểm)**	1	Cho hai số thực a,b khác 0 thỏa mãn $2a^2+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{a^2}=4$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S=ab+2019$.	
		Ta có: $4=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2+a^2+\dfrac{b^2}{4}-ab+ab+2$ $=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+ab+2\ge ab+2$ Do đó: $ab\le 2\Rightarrow S\le 2021$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a-\dfrac{1}{a}=0\\a-\dfrac{b}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1,b=-2\\a=1,b=2\end{array}\right.$ Vì vậy giá trị lớn nhất của S là 2021, đạt được khi $(a,b)\in\{(-1;-2);(1;2)\}$ Mặt khác ta cũng có: $4=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2+a^2+\dfrac{b^2}{4}+ab-ab+2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2-ab+2\ge -ab+2$ Suy ra $ab\ge -2\Rightarrow S\ge 2017$ $S=2017$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a-\dfrac{1}{a}=0\\a+\dfrac{b}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1,b=-2\\a=-1,b=2\end{array}\right.$ Vì vậy giá trị nhỏ nhất của S là 2017, đạt được khi $(a,b)\in\{(1;-2);(-1;2)\}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	2	Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol $(P): y=-x^2$ a) Chứng minh rằng đường thẳng $y=2x+1 (d_1)$ tiếp xúc với parabol. Tìm tọa độ của tiếp điểm. b) Xác định tiếp tuyến d_2 với parabol nói trên sao cho $d_2\perp d_1$. c) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.	
		a) Parabol $(P): y=-x^2$ và đường thẳng $y=2x+1(d_1)$ tiếp xúc Khi phương trình $-x^2=2x+1$ có nghiệm kép $-x^2=2x+1\Leftrightarrow -x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x^2+2x+1=0$ $\Delta=4-4=0$ phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-1$. Tọa độ của tiếp điểm là $(-1;-1)$	0,25 0,25 0,25
		b) Gọi đường thẳng d_2 là $y=mx+n$	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Từ điều kiện $d_2 \perp d_1$ ta có $2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + n (d_2)$
Từ điều kiện d_2 tiếp xúc với $y = -x^2$ hay $\Rightarrow -x^2 = -\frac{1}{2}x + n$ có nghiệm kép, $\Delta = 1 - 16n$ để có nghiệm kép $1 - 16n = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{16}$
Vậy đường thẳng d_2 có phương trình dạng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$</td><td>0,25
0,25
0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>c) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.
Ta có $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bài 3.
(4 điểm)</td><td rowspan="2">1</td><td>Cho $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Xác định các số hữu tỉ a, b, c, d, e sao cho $f(x) - \mathrm{f}(x-1) = x^3$. Từ đó tính $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (1)$
$f(x-1) = a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e (2)$
Trừ từng vế (1) và (2) ta được:
$f(x) - \mathrm{f(x-1)} = 4ax^3 + (-6a + 3b)x^2 + (4a - 3b + 2c)x - a + b - c + d = 0$
Ta lại có: $f(x) - \mathrm{f}(x-1) = x^3$
Đồng nhất $f(x) - \mathrm{f(x-1)}$ với x^3 ta sẽ được:
$\begin{cases} 4a = 1 \\ -6a + 3b = 0 \\ 4a - 3b + 2c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \\ d = 0 \end{cases}$
Vậy $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + e$, với e bất kì.
Tính $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.
Trong đẳng thức $f(x) - f(x-1) = x^3$, lần lượt cho x bằng 1, 2, 3, …, n ta được:
$f(1) - f(0) = 1^3$
$f(2) - f(1) = 2^3$
…
$f(\mathrm{n}) - f(\mathrm{n}-1) = n^3$
Cộng từng vế n đẳng thức trên rồi rút gọn ta được:
$f(\mathrm{n}) - f(0) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$</td><td>0.25
0.25
0.25
0.25
0.25
0.25</td></tr>
</table>

		$\Rightarrow (\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2+e)$ - e = $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ $\Rightarrow S=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$	0.25 0,25
	2	Chứng minh rằng với mọi $x,y\in\mathbb{Z}$ thì $A=(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$ là số chính phương.	
	2	$A=[(x+y)(x+4y)][(x+2y)(x+3y)]+y^4$ $A=(x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+6y^2)+y^4$ $A=(x^2+5xy+4y^2)[(x^2+5xy+4y^2)+2y^2]+y^4$ $A=(x^2+5xy+4y^2)(x^2+5xy+4y^2)+2y^2(x^2+5xy+4y^2)+y^4$ $A=(x^2+5xy+4y^2)^2+2y^2(x^2+5xy+4y^2)+y^4$ $A=[(x^2+5xy+4y^2)+y^2]^2=(x^2+5xy+5y^2)^2$	0,25 0,25 0,5 0,25 0,5 0,25
Bài 4. **(4 điểm)**	1	Cho ba số thực dương thỏa mãn tích của chúng bằng một và tổng của chúng luôn lớn hơn tổng nghịch đảo của chúng. Chứng minh rằng có một và chỉ một trong ba số lớn hơn một.	
	1	Gọi x,y,z là ba số thỏa mãn điều kiện đề bài ta có: $x.y.z=1;\ x+y+z>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ Ta xét các trường hợp: Trường hợp 1: Nếu x,y,z đều nhỏ hơn 1 hoặc đều lơn hơn 1 thì trái với giả thiết. Trường hợp 2: Giả sử 2 trong ba số lớn hơn 1. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $x>1,\ y>1$. Vì $x.y.z=1$ nên $z<1$, do đó: $(x-1)(y-1)(z-1)<0$ $\Leftrightarrow xyz+x+y+z-xy-xz-yz-1<0$ $\Leftrightarrow x+y+z<xy+yz+zx$ $\Leftrightarrow x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ đều này trái với giả thiết. Vậy có một và chỉ một trong ba số lớn hơn một.	0,25 0,5 0,25 0,25 0,25
	2	Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE=AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại hai điểm M, N. a) Chứng minh rằng tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật. b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}$	

			
		a) Ta có $DAM = ABF$ (cùng phụ BAH) $AB = AD(gt)$ $BAF = ADM = 90^0$ (Tứ giác $ABCD$ là hình vuông) $\Rightarrow \Delta ADM = \Delta BAF(\text{g.c.g})$ $\Rightarrow DM = AF$, mà $AF = AE(gt)$ nên $AE = DM$ Lại có $AE//DM$ (vì $AB//DC$) Suy ra tứ giác $AEMD$ là hình bình hành, mặt khác $DAE = 90^0(gt)$ Vậy tứ giác $AEMD$ là hình chữ nhật.	0,5 0,5
		b) Do $AD//CN(gt)$, áp dụng hệ quả định lí Ta-lét ta có: $\Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$ (1) Do $MC//AB(gt)$, áp dụng hệ quả định lí Ta-lét ta có: $\Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{MC}{MN}$ hay $\frac{AD}{AN} = \frac{MC}{MN}$ (2) ($AB = AD$) Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = \left(\frac{CN}{MN}\right)^2 + \left(\frac{CM}{MN}\right)^2 = \frac{CN^2 + CM^2}{MN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$ (Pytago) $\Rightarrow \left(\frac{AD}{AM}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AN}\right)^2 = 1$ Chia hai vế cho AD^2 $\Rightarrow \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$ (đpcm)	0,25 0,25 0,5 0,25 0,25
Bài 5. **(4 điểm)**		Cho (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O_2, R_2) tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài có BC, $B \in (O_1)$, $C \in (O_2)$. a) Tính BAC. b) Tính độ dài BC. c) Gọi D là giao điểm của BA với (O_2). Chứng minh rằng C, O_2, D thẳng hàng. d) Tính độ dài BA.	

			
	5a	a) Kẻ tiếp tuyến chung tại A, cắt BC tại I Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì $IA = IB = IC$ Nên $BAC = 90^0$	0,25 0,5 0,25
	5b	b) Vì $IA = IB = IC$ và $O_1A = O_1B; O_2A = O_2C$ Nên IO_1 và IO_2 lần lượt là trung trực của AB và AC Do đó $IO_1 \perp AB$, $IO_2 \perp AC$, suy ra tứ giác $AHIK$ là hình chữ nhật vì có ba góc vuông, nên $HIK = 90^0$ hay ΔO_1IO_2 vuông tại I. Áp dụng hệ thức về đường cao $h^2 = b'c'$, ta được $IA^2 = O_1A.AO_2$ hay $IA^2 = R_1.R_2 \Leftrightarrow IA = \sqrt{R_1.R_2}$ Vậy $BC = 2IA = 2\sqrt{R_1.R_2}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	5c	c) Vì CAD kề bù với $BAC = 90^0$ nên $CAD = 90^0$ Ta có ΔCAD vuông tại A nội tiếp (O_2) nên CD là đường kính. Vậy C, O_2, D thẳng hàng.	0,25 0,5 0,25
	5d	d) Áp dụng Pytago vào ΔBCD vuông tại C, ta có $BD^2 = DC^2 + CB^2$ hay $BD^2 = 4R_2^2 + 4R_1R_2 \Leftrightarrow BD = \sqrt{4R_2^2 + 4R_1R_2}$ Áp dụng hệ thức về cạnh $c^2 = a.c'$ ta được $BC^2 = BA.BD$ hay $4R_1R_2 = BA.2\sqrt{R_2^2 + R_1R_2} \Leftrightarrow BA = \frac{2R_1R_2}{\sqrt{R_2^2 + R_1R_2}} = \frac{2R_1\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}}$	0,25 0,25 0,25 0,25

--------------------HẾT--------------------