BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10** **TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2025**
ĐỀ THI THAM KHẢO *(Đề thi gồm có 01 trang)*	**MÔN: TOÁN** Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và lớp chuyên Tin học *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a + b + c \leq 2\sqrt{abc}$. Chứng minh rằng, trong ba số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ không có hai số nào có tổng lớn hơn 1.

b) Một chiếc hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại, trong đó có bốn tấm thẻ ghi số 1, bốn tấm thẻ ghi số 2, ..., và bốn tấm thẻ ghi số 10. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai tấm thẻ từ hộp. Tính xác suất để hai tấm thẻ được chọn cùng ghi một số.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình: $(x+1)\left(\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{x+3}\right) + \sqrt{2x^2 + 10x + 12} = -2$.

b) Trong các bộ ba số nguyên tố có tổng bằng 242, bộ ba nào có tích lớn nhất?

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn, không cân ABC có đường tròn nội tiếp (I). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB. Gọi M và N lần lượt là trực tâm của các tam giác BDF và CDE. Chứng minh rằng

a) AI vuông góc với MN.

b) $IB.IM = IC.IN$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua hình chiếu vuông góc của A trên BC.

Câu 4 (2,0 điểm).

a) Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{c} + b^2c + c^3 \geq \frac{a^2b^2}{c} + bc^2 + c^2a.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình (với ẩn x, y): $x^2 + xy + y^2 = 2^n$,

có nghiệm hữu tỉ.

Câu 5 (1,0 điểm). Trên bàn có 1 331 viên bi. Hai người A và B tham gia một trò chơi với luật chơi như sau:

- A bắt đầu bằng cách lấy 1 viên bi.
- Hai người luân phiên nhau lấy bi. Khi đến lượt mình, mỗi người phải lấy số bi bằng hoặc nhiều hơn 1 viên so với số bi mà người kia vừa lấy.
- Người nào đến lượt mình mà không thể lấy được bi (do không còn đủ bi trên bàn) sẽ thua, và người còn lại thắng.

Chứng minh rằng người chơi A luôn có chiến lược đảm bảo thắng cuộc, bất kể người chơi B chơi như thế nào.

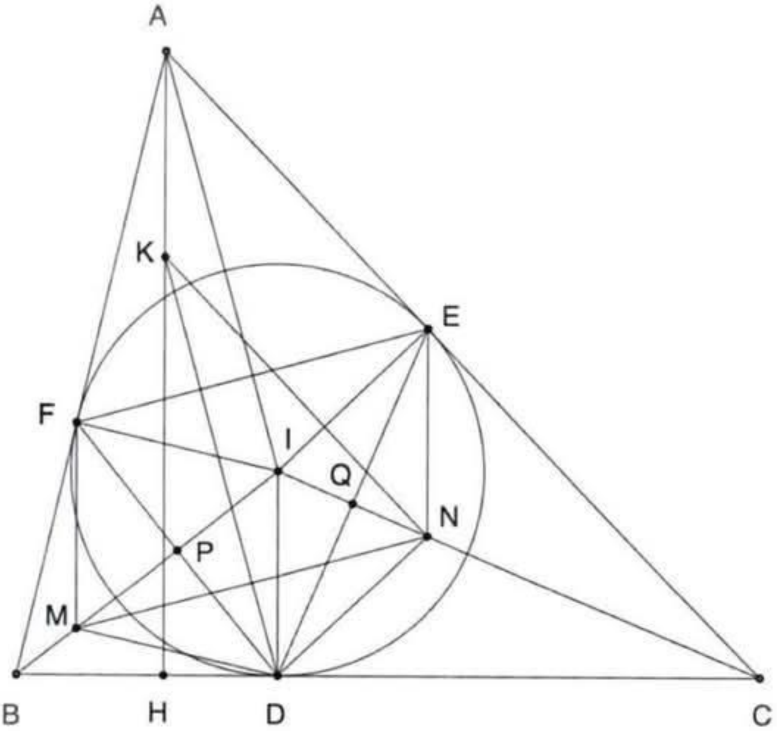
HẾT

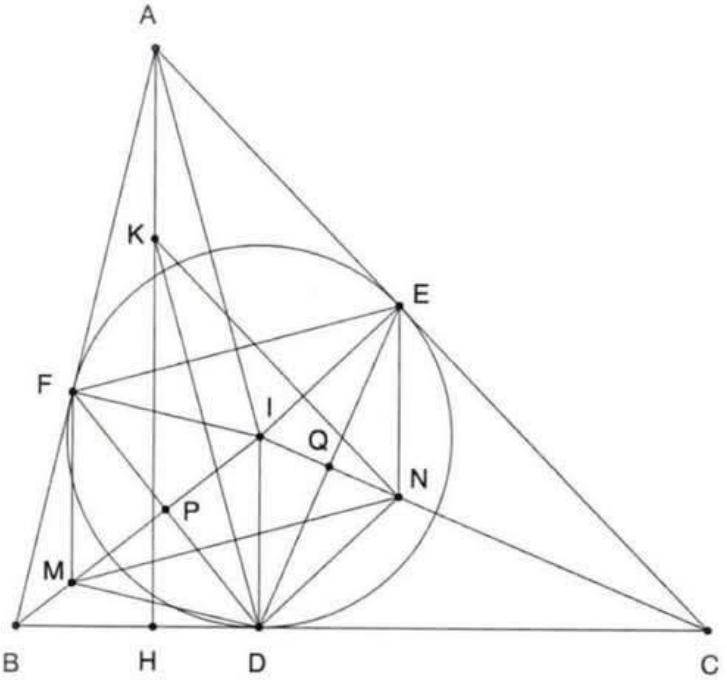
Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:.. Số báo danh: ....

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI**	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10** **TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2025**
ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM ĐỀ THI THAM KHẢO *(Đáp án - Thang điểm gồm có 04 trang)*	**MÔN THI: TOÁN** Dùng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và lớp chuyên Tin học

Câu		Đáp án	Điểm
Câu 1 **(2 điểm)**	**a)**	**Nhận xét.** $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ với mọi $x, y \geq 0$. Áp dụng **Nhận xét.**, $$a+b+c \leq 2\sqrt{abc} \leq a+bc.$$ Do đó $b+c \leq bc$ hay $$\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq 1.$$ Chứng minh tương tự $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 1, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c} \leq 1.$$	**1,0 đ**
	b)	Phép thử ngẫu nhiên là lấy ra đồng thời 2 tấm thẻ từ hộp. Không gian mẫu Ω gồm các kết quả là các cặp tấm thẻ lấy từ hộp. Số phần tử của không gian mẫu: $$\frac{39 \times 40}{2} = 780.$$	**0,25 đ**
		Gọi A là biến cố: "hai tấm thẻ được chọn cùng ghi một số". Mỗi kết quả thuận lợi của A là một cặp tấm thẻ ghi cùng một số. Mỗi nhóm gồm 4 tấm thẻ ghi cùng số: số cách chọn ra hai tấm thẻ từ 4 tấm này là 6. Có 10 nhóm nên tổng số cách chọn là 60 cách. Vậy số kết quả thuận lợi cho biến cố A là 60. Xác suất của biến cố A là $$\frac{60}{780} = \frac{1}{13}.$$	**0,75 đ**
Câu 2 **(2 điểm)**	**a)**	Điều kiện: $x \geq -2$. Đặt $a = \sqrt{2x+4}$, $b = \sqrt{x+3}$. Ta có $a, b \geq 0$. Phương trình trở thành: $$(a^2-b^2)(a-2b)+ab = a^2-2b^2.$$ Do đó $$(a+b)(a-2b)(a-b-1) = 0.$$	**0,25 đ**

		Trường hợp 1. $a+b=0$ thì $a=b=0$: loại. **Trường hợp 2.** $a-2b=0$ thì $\sqrt{2x+4}=2\sqrt{x+3}$ $x=-4$ (loại).	0,25 đ
		Trường hợp 3. $a-b=1$ thì $\sqrt{2x+4}=1+\sqrt{x+3}$ $2x+4=x+4+2\sqrt{x+3}$ $x=2\sqrt{x+3}$ $x^2=4x+12$ (với $x\geq 0$). $x^2-4x-12=0.$ Do đó $x=6$ hoặc $x=-2$ (loại). Vậy $x=6$.	0,5 đ
	b)	Gọi các số nguyên tố là p,q,r. Theo giả thiết $p+q+r=242$. Vì mỗi số nguyên tố lớn hơn 2 đều là số lẻ, nên trong các số p,q,r phải có một số chẵn. Do đó trong các số p,q,r phải có số bằng 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $p=2$. Do đó $q+r=240$.	0,25 đ
		Giả sử $q\leq r$. Ta đặt $q=120-m, r=120+m$ với $m\in\mathbb{N}$. Tích các số bằng $2(120^2-m^2)$.	0,25 đ
		Với $m\in\{0,1,\dots,6\}$ thì q hoặc r không là số nguyên tố. Vậy $m\geq 7$. Từ đó tích không vượt quá $2(120^2-7^2)=28\,702$. Dấu bằng xảy ra khi $m=7$ hay $q=113, r=127$ đều là các số nguyên tố. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $28\,702$.	0,5 đ
Câu 3 **(3 điểm)**	**a)**	Ta có $FM\perp BC, ID\perp BC$ nên $FM//ID$. Mặt khác $IF//DM$ (cùng vuông góc với AB). Vậy $DMFI$ là hình bình hành. Tương tự $DNEI$ là hình bình hành. 	0,5 đ
		Thành thử $FM//EN$ và $FM=EN$. Vậy tứ giác $EFMN$ là hình bình hành. Suy ra $EF//MN$. Do $AI\perp EF$ nên $AI\perp MN$.	0,5 đ
	b)	Gọi P là giao điểm BI và DF; Q là giao điểm CI và DE. Theo câu **a)** tứ giác $DMFI$ là hình bình hành. Vậy, P là trung điểm IM. Ta có $IB.IM=2\,IB.IP=2ID^2.$	1,0 đ

		Tương tự $IC.IN = 2ID^2$. Vậy $IB.IM = IC.IN$.  	
	c)	Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Dựng hình bình hành $AIDK$. Ta có $AK // ID$ và $AK = ID$. Từ đó suy ra $AK // EN$ và $AK = EN$. Vậy, $AENK$ là hình bình hành. Suy ra $KN // AE$. Vậy $KN \perp DN$. Chứng minh tương tự $KM \perp DM$. Vậy các điểm K, M, N, D, H cùng nằm trên đường tròn đường kính KD. Đặc biệt suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.	**1,0 đ**
Câu 4 (2 điểm)	a)	Ta cần chứng minh $$\frac{a^2b}{c}(a-b) + bc(b-c) + c^2(c-a) \geq 0.$$ Để ý $c - a = -(a-b) - (b-c)$, và do $a \geq b \geq c$ nên $$\begin{aligned} & \frac{a^2b}{c}(a-b) + bc(b-c) + c^2(c-a) \\ = \quad & (a-b)\left(\frac{a^2b}{c} - c^2\right) + c(b-c)^2 \\ \geq \quad & 0. \end{aligned}$$	**1,0 đ**
	b)	Với $n = 2k$, thì ta chọn $y = 0$ và $x = 2^k$, ta được $$x^2 + xy + y^2 = 2^n.$$	**0,25 đ**
		Giả sử n là số lẻ và $$x^2 + xy + y^2 = 2^n.$$ Viết $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ trong đó a, b, c nguyên, $(a, b, c) = 1$ và $c \neq 0$. Khi đó	**0,25 đ**

		$a^2 + ab + b^2 = 2^n c^2.$ Suy ra $(2a+b)^2 + 3b^2 = 2^{n+2}c^2$. Nếu b lẻ thì $2a+b$ lẻ do đó $(2a+b)^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod 8$. Do đó $(2a+b)^2 + 3b^2 \equiv 4 \pmod 8$, mâu thuẫn.	
		Vậy b chẵn và do đó a chẵn. Viết $a = 2a_1, b = 2b_1$ ta được $4(a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2) = 2^n c^2.$ Với $n = 1$, ta suy ra c chẵn, do đó $(a,b,c) \geq 2$, mâu thuẫn. Vậy $n \geq 3$. Ta có $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = 2^{n-2}c^2.$ Ta thu được phương trình với n thay bởi $n-2$, là số nguyên dương lẻ. Cứ tiếp tục làm như vậy đến lúc nào đó ta đưa về phương trình với $n = 1$, thành thử c chẵn, mâu thuẫn!	0,5 đ
		Vậy n là số chẵn.	
Câu 5 **(1 điểm)**		Ta cần đưa ra cách chơi để A chiến thắng. Gọi b_n là số bi B cần lấy ở lượt chơi thứ n của B. Do bước thứ 1 của A lấy 1 bi nên $b_1 = 1$ hoặc $b_1 = 2$. Bước thứ hai của A sẽ lấy 2 bi, do đó $b_2 = 2$ hoặc $b_2 = 3$. Bước thứ ba của A sẽ lấy 3 bi, do đó $b_3 = 3$ hoặc $b_3 = 4$. Cứ thế, cứ thế: Bước thứ n của A lấy n bi, do đó $b_n = n$ hoặc $b_n = n+1$.	0,5 đ
		Gọi S_n là tổng số bi cả hai đã lấy ngay sau bước thứ n của A. Ngay sau bước lấy bi thứ n của A: tổng số bi mà A đã lấy là $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$ Khi đó tổng số bi đã lấy của B là (B chưa thực hiện lượt chơi thứ n) là $b_1 + \cdots + b_{n-1}.$ Ta có $1 + \cdots + (n-1) \leq b_1 + \cdots + b_{n-1} \leq 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$ Do đó tổng số bi cả hai đã lấy là S_n thoả mãn $n(n+1) - n \leq S_n \leq n(n+1) - 1.$ Nếu A chỉ chơi được tối đa 35 lượt thì $S_{35} + b_{35} > 1331 - 36$ hay $b_{35} > 1331 - 36 - 35^2 - 34 = 36$ mâu thuẫn! Vậy A có thể chơi tới 36 lượt. Vì $S_{36} \geq 36^2$ nên số bi còn lại sau lượt chơi thứ 36 của A không lớn hơn $1331 - 36^2 = 35.$ Suy ra $b_{36} \leq 35$, mâu thuẫn vì $b_{36} = 36$ hoặc $b_{36} = 37$.	0,5 đ

Lưu ý: Thí sinh giải theo cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa.

---HẾT---