

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2} - x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$, với $x > y > 0$.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn: $|a+b+c-2020| + \sqrt{2020(ab+bc+ca)-abc} = 0$.

Tính $P = \frac{1}{a^{2021}} + \frac{1}{b^{2021}} + \frac{1}{c^{2021}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{3x^2-17x+27}{4x-9} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}-1}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1 + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = \frac{9}{x^2} \\ x^2 + xy - 4 = \frac{4y}{x} \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 3 = 0$.

2. Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn: $(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c$.

Chứng minh $a+b+c$ chia hết cho 27.

Câu 4. (3,0 điểm)

1. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Qua A lần lượt kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm). Lấy điểm D thuộc đường tròn $(O; R)$ sao cho BD song song với AO , đường thẳng AD cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là E . Gọi M là trung điểm của AC .

a. Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$.

b. Từ D kẻ tiếp tuyến với đường tròn $(O; R)$, tiếp tuyến này cắt ME tại T . Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp của $\triangle OME, \triangle OTE, \triangle OMT$. Chứng minh khi A thay đổi thì $r_1 + r_2 + r_3$ luôn không đổi.

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $2xy + 5yz + 6zx = 18xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = \frac{16xy}{y+2x} + \frac{25yz}{4z+y} + \frac{81zx}{x+4z}$.

----- HẾT -----