UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2021-2022
Môn: Toán - Lớp 9
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$.

2. Cho đường thẳng $d: y=ax+b$ (a khác 0). Tìm a, b biết d đi qua $M(1;2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân, O là gốc tọa độ.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ x^3-5x^2+3x-8+2y=0\end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{10}\right|=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}}.$$

2. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O), M khác C và D. Đường thẳng MA cắt DB và DC theo thứ tự tại H và K, đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N.

a. Chứng minh rằng tứ giác $DHEM$ nội tiếp và HE là phân giác của góc MHC.

b. Gọi G là giao điểm của KF và HE. Chứng minh rằng tứ giác $GHOF$ là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.

c. Chứng minh rằng $\dfrac{HN}{HM}=\dfrac{DK}{DC}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

1. Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau; tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?

2. Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\leq\frac{3}{2}.$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn thi: TOÁN
Thời gian: 150 phút

Bài 1. a) Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0,\ x\neq 1$

b) Cho đường thẳng $(d): y=ax+b\ (a\neq 0)$. Tìm a, b biết đường thẳng (d) đi qua $M(1;2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân (O là gốc tọa độ)

Lời giải. a) Ta có $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}+1)}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$

$$=\frac{\sqrt{x}(x-2\sqrt{x})+(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+1+2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b) Vì đường thẳng (d) đi qua $M(1;2)$ nên $a+b=2$. Đường thẳng (d) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ và $B(0;b)$. Tam giác OAB cân khi $OA=OB\Rightarrow\left|\dfrac{b}{a}\right|=|b|\Leftrightarrow|a|=1$ (vì $b\neq 0$)

$\Leftrightarrow a=\pm 1$. Từ đó ta tìm được $(a;b)\in\{(-1;3);(1;1)\}$

Bài 2. a) Giải phương trình $5x^2+6x+4=3(x+1)\sqrt{3x^2+4}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ x^3-5x^2+3x-8+2y=0\end{cases}$

Lời giải. a) Phương trình tương đương $3x^2+4-3(x+1)\sqrt{3x^2+4}+2x^2+6x=0$

Đặt $t=\sqrt{3x^2+4}$ được phương trình $t^2-3(x+1)t+2x^2+6x=0$

Ta có $\Delta=9(x+1)^2-4(2x^2+6x)=(x-3)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2x\\ t=x+3\end{array}\right.$

Với $t=2x\Rightarrow\sqrt{3x^2+4}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Với $t=x+3\Rightarrow\sqrt{3x^2+4}=x+3\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ 2x^2-6x-5=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{19}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{19}}{2};2;\dfrac{3+\sqrt{19}}{2}\right\}$

b) ĐKXĐ: $y\leq\dfrac{5}{2}$. Từ phương trình $(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0$

$\Leftrightarrow(2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$ (1)

Nếu $2x>\sqrt{5-2y}\Rightarrow(2x)^3+2x>\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$

Nếu $2x<\sqrt{5-2y}\Rightarrow(2x)^3+2x<\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$

Nếu $2x=\sqrt{5-2y}\Rightarrow(2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$.

Do đó từ (1) ta có $2x=\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2y=5-4x^2\end{cases}$. Thay $2y=5-4x^2$ vào phương trình

$x^3-5x^2+3x-8+2y=0$ được $2(x-1)^3=(x+1)^3\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}-2\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}\right)^2$

Đối chiếu ĐKXĐ thì hệ phương trình có nghiệm $(x;y)\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1};\dfrac{5}{2}-2\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}\right)^2\right)$

Bài 3. a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương $(x;y)$ của phương trình

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{10}\right|=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{100}}$$

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Lời giải. a) Ta có $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{10}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{100}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{10}\right)^2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{100}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\Leftrightarrow\sqrt{x}=10-\sqrt{y}\Leftrightarrow x=y-20\sqrt{y}+100$. Vì x, y nguyên dương nên y phải là số chính phương. Lập luận tương tự ta cũng có x là số chính phương. Đặt $x=a^2;\ y=b^2$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$. Ta có $a+b=10$. Suy ra $(a;b)\in\{(1;9);(2;8);...;(9;1)\}\Rightarrow(x;y)\in\{(1;81);(4;64);...;(81;1)\}$

b) Vì $(p-5)\vdots 8\Rightarrow p=8k+5$ $(k\in N)$. Ta có $(ax^2)^{4k+2}-(by^2)^{4k+2}\vdots(ax^2-by^2)\vdots p$

$\Rightarrow\left(a^{4k+2}.x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4}\right)\vdots p$. Nhận thấy $a^{4k+2}x^{8k+4}-b^{4k+2}.y^{8k+4}$

$=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$.

Do $\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)=(a^2)^{2k+1}+(b^2)^{2k+1}\vdots(a^2+b^2)=p$ và $b<p$ nên $\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)\vdots p$ (*)

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p. Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có $x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1$ (mod p);
$y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1$ (mod p) $\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2$ (mod p), mâu thuẫn (*).

Vậy cả hai số x, y đều chia hết cho p.

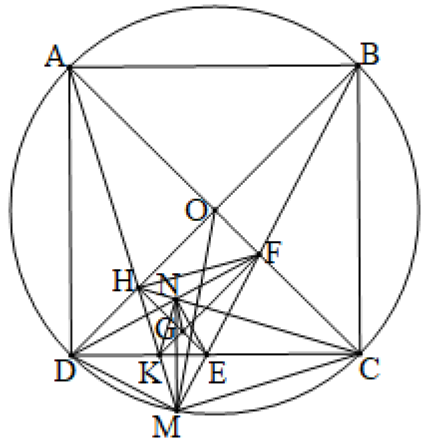
Bài 4. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ CD của đường tròn (O) (M khác C, D). Đường thẳng MA cắt DB và DC theo thứ tự tại H và K, đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F. Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác DHEM nội tiếp và HE là tia phân giác của $\widehat{MHC}$

b) Gọi G là giao điểm của KF và HE. Chứng minh rằng tứ giác GHOF là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KNE.

c) Chứng minh rằng $\dfrac{HN}{HM}=\dfrac{DK}{DC}$

Lời giải. a) Vì hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn nên O là giao điểm của hai đường chéo hình vuông ABCD. Ta có $\widehat{HDE}=\widehat{HME}=45^0$ nên tứ giác DHEM nội tiếp. Suy ra $\widehat{DHE}=\widehat{DME}=90^0$



Lại có BD là trung trực của AC, mà H thuộc BD nên tam giác AHC cân tại H.

Suy ra HB là tia phân giác của $\widehat{AHC}$.

Ta có $\widehat{OHE}=\dfrac{1}{2}\widehat{AHM}\Rightarrow\widehat{EHC}+\widehat{OHC}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{AHC}+\widehat{MHC}\right)$

Mà $\widehat{BHC}=\frac{1}{2}\widehat{AHC}\Rightarrow\widehat{EHC}=\frac{1}{2}\widehat{MHC}$.

Do đó HE là tia phân giác của $\widehat{MHC}$

b) Tam giác HDE có $\widehat{DHE}=90^0$; $\widehat{HDE}=45^0\Rightarrow\widehat{GEK}=45^0$

Ta có $\widehat{MKC}=\frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AD}+sđ\overset{\frown}{MC}\right)$; $\widehat{MFC}=\frac{1}{2}\left(sđ\overset{\frown}{AB}+sđ\overset{\frown}{MC}\right)$ mà $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}\Rightarrow\widehat{MKC}=\widehat{MFC}$

Suy ra tứ giác MKFC nội tiếp. Lại có $\widehat{KMC}=\widehat{AMC}=90^0\Rightarrow\widehat{KFC}=90^0$ hay $KF\perp AC$

Vì $\widehat{GHO}=\widehat{HOF}=\widehat{GFO}=90^0$ nên GHOF là hình chữ nhật

Ta có $\widehat{HGF}=90^0\Rightarrow\widehat{HGK}=90^0$ và $\widehat{KGE}=90^0$, suy ra tam giác KGE vuông cân tại G, nên GK = GE (1). Vì $\widehat{AMB}=\widehat{BMC}$ nên MB là phân giác của $\widehat{AMC}$. Tam giác MHC có HE là phân giác của $\widehat{MHC}$ và ME là phân giác của $\widehat{HMC}$ nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMC. Do đó EC là phân giác của $\widehat{HCM}$, suy ra $\widehat{NCD}=\widehat{MCD}$. Tương tự ta cũng có KF là phân giác của $\widehat{MFD}$

Ta cũng có $\widehat{AMD}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AD}=\frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AB}=\widehat{AMB}\Rightarrow\widehat{DMA}=\widehat{BMA}$ hay MK là tia phân giác của $\widehat{DMF}$. Do đó dẫn đến K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DMF, suy DC là phân giác của $\widehat{NDM}$

Từ đó suy ra $\widehat{NDC}=\widehat{MDC}$. Hai tam giác NCD và MCD có $\widehat{NDC}=\widehat{MDC}$; $\widehat{NCD}=\widehat{MCD}$ và DC chung nên $\Delta NCD=\Delta MCD\Rightarrow NC=MC$.

Hai tam giác NKC và MKC có NC = MC; $\widehat{NCK}=\widehat{MCK}$; KC chung nên $\Delta NKC=\Delta MKC$

Suy ra $\widehat{KNC}=\widehat{KMC}=90^0\Rightarrow\widehat{HNK}=90^0$, mà $\widehat{HGK}=90^0$ nên HNGK nội tiếp.

Lại có $\widehat{KHG}=\widehat{GHN}\Rightarrow\overset{\frown}{NG}=\overset{\frown}{KG}\Rightarrow GK=GN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra GK = GN = GE, hay G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE.

c) Vì $\widehat{KMC}=\widehat{KNC}=90^0$ nên tứ giác MKNC nội tiếp, suy ra $\widehat{HMN}=\widehat{NCH}$. Hai tam giác HMN và HCK có $\widehat{MHC}$ chung và $\widehat{HMN}=\widehat{KCH}\Rightarrow\Delta HMN\backsim\Delta HCK\Rightarrow\frac{HN}{HM}=\frac{HK}{HC}$ (3)

Vì HE là phân giác của $\widehat{KHC}$ nên $\frac{HK}{HC}=\frac{EK}{EC}$ (4). Vì ME là phân giác của $\widehat{KMC}$ nên $\frac{EK}{EC}=\frac{MK}{MC}$ (5). Lại có $\Delta DBM\backsim\Delta KCM\Rightarrow\frac{MK}{MC}=\frac{MD}{MB}$ (6)

Vì MH là phân giác của $\widehat{DMB}$ nên $\frac{HD}{HB}=\frac{MD}{MB}$ (7). Do AB // DK nên $\frac{HK}{HA}=\frac{HD}{HB}=\frac{DK}{DC}$ (8)

Từ (3), (4), (5), (6), (7), (8) suy ra $\frac{HN}{HM}=\frac{DK}{DC}$

Bài 5. a) Cho đường tròn (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau; tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?

b) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$

Chứng minh rằng $\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\le\frac{3}{2}$

Lời giải. a) Gọi S_n là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau n bước, $n\in N^*$.

Sau bước 1, trên đường tròn có 2^1 số là 1, 1 nên $S_1=1+1=2=2.3^0$

Sau bước 2, trên đường tròn có 2^2 số là 1, 2, 1, 2 nên $S_2=1+2+1+2=6=2.3^1$

Sau bước 3, trên đường tròn có 2^3 số là 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3 nên $S_3=18=2.3^2$

Dự đoán sau n bước tổng là $S_n=2.3^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $S_n=2.3^{n-1}$ (*), $\forall n\in N^*$.

Thật vậy, với n = 1 thì (*) đúng

Giả sử (*) đúng với n = k ($k \in N^*$), nghĩa là sau k bước trên đường tròn đã cho có các số với tổng là $S_k = 2.3^{k-1}$. Sang bước thứ k + 1, ta coi 2^k điểm đã ghi số là 2^k điểm chia, nên đường tròn được chia thành 2^k cung bằng nhau. Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tương ứng. Do đó $S_{k+1} = S_k + 2S_k = 3S_k = 2.3^k$

Vậy $S_n = 2.3^{n-1}$, với $\forall n \in N^*$. Do đó $S_{2021} = 2.3^{2020}$

b) Ta có $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = (a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2)+(a^2b+b^2c+c^2a)$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $(a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2) \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a)$

Do đó $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a) \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{1}{3}(a+b+c)$. Suy ra

$$(a^2b+b^2c+c^2a)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right) \le \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)$$

Ta có $1 = a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Leftrightarrow a^2+1 \ge a^2+ab+bc+ca = (a+b)(c+a)$

Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \le \frac{a}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b}.\frac{a}{c+a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}\right)$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{1.\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2}} \le \frac{1}{2}\left[1+\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2}\right] \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

Suy ra $\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a+b}+\frac{a}{c+a}+\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$ (1)

Tương tự $\frac{a+b+c}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{b^2+c^2}\right)$ (2)

$\frac{a+b+c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{b+c}+\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}\right)$

$\le \frac{1}{6}\left(3+\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}\right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. BĐT đã được chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$