Chương I.

TỨ GIÁC

Bài 1. TỨ GIÁC

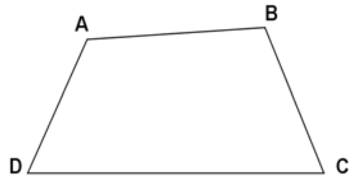
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

2. Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác. (Từ nay khi nói đến tứ giác mà không chú thích gì thêm, ta hiểu đó là tứ giác lồi).

3. Tổng các góc của một tứ giác bằng 360°

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^\circ$



B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH GÓC CỦA TỨ GIÁC

Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất về tổng các góc của tứ giác, của tam giác

Ví dụ 1. (Bài 1 SGK)

Tìm x ở hình 6 SGK

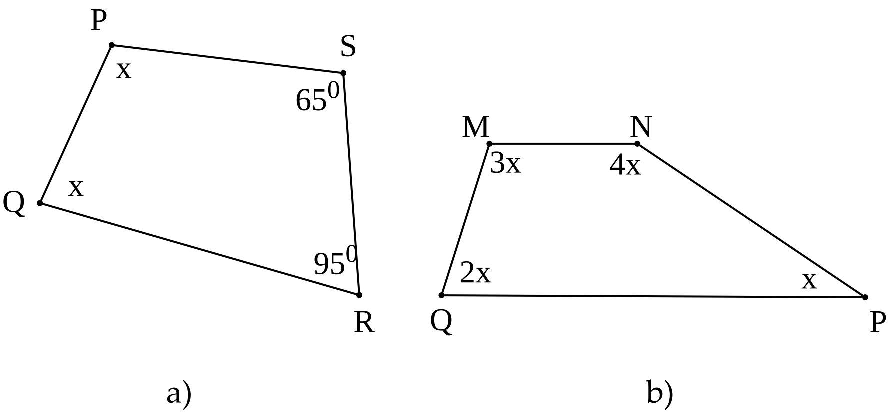
Giải

a) $\widehat{P}+\widehat{Q}+\widehat{R}+\widehat{S}=360^\circ \Rightarrow x+x+95^\circ+65^\circ=360^\circ$

$\Rightarrow 2x+160^\circ=360^\circ$

$\Rightarrow 2x=360^0-160^0=200^0 \Rightarrow x=100^0$

b) $\widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}+\widehat{Q}=360^0 \Rightarrow 3x+4x+x+2x=360^0 \Rightarrow 10x=360^0 \Rightarrow x=36^o$.



Hình 6 SGK

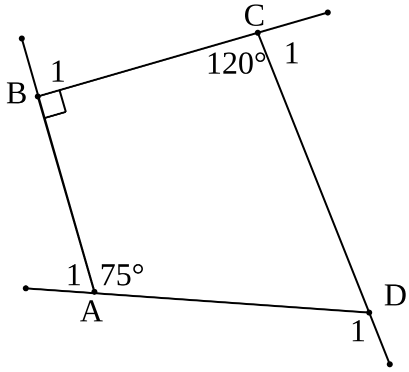
Ví dụ 2: (Bài 2 SGK)

Góc kề bù với 1 góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác

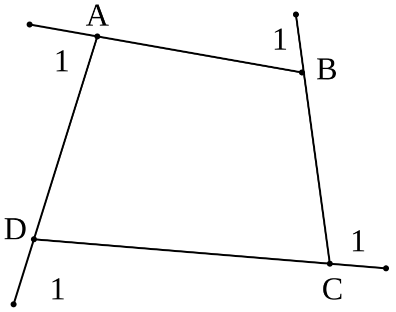
a) Tính các góc ngoài của tứ giác ở hình 7a

b) Tính tổng các góc ngoài của tứ giác ở hình 7b (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài) $\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=?$

c) Có nhận xét gì về tổng các góc ngoài tứ giác?



a)



b)

Hình 7 SGK

Giải

a) Góc trong còn lại là $\widehat{D}=360^0-\left(75^0+90^0+120^0\right)=75^0$. Do đó $\widehat{A_1}=105^0.\widehat{B_1}=90^0.\widehat{C_1}=60^0.\widehat{D_1}=105^0$.

b) Tổng các góc trong $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^0$.

$\widehat{A_1}+\widehat{B_1}+\widehat{C_1}+\widehat{D_1}=\left(180^0-\widehat{A}\right)+\left(180^0-\widehat{B}\right)+\left(180^0-\widehat{C}\right)+\left(180^0-\widehat{D}\right)$

$=720^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}\right)=720^0-360^0=360^0$.

c) Tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng 360^0.

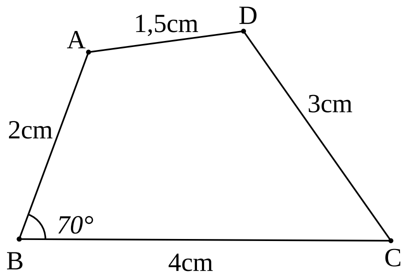
Dạng 2. VẼ TỨ GIÁC

Phương pháp giải

Thường vẽ một tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của một tứ giác, sau đó xác định đỉnh thứ 4.

Ví dụ 3: (Bài 4 SGK)

Dựa vào cách vẽ các tam giác đã học, hãy vẽ lại tứ giác ở hình 10 SGK vào vở.



Hình 10 SGK

Giải

Vẽ ΔABC biết hai cạnh và một góc xen giữa:

$AB=2cm, BC=4cm, \widehat{B}=70^0$.

Vẽ ΔADC biết ba cạnh: AC đã có, $AD=1,5cm:CD=3cm$.

Dạng 3. TÍNH ĐỘ DÀI. HỆ THỨC GIỮA CÁC ĐỘ DÀI

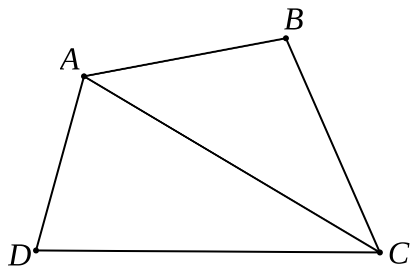
Phương pháp giải

Sử dụng các định lí có liên quan đến độ dài, như bất đẳng thức tam giác, Định lí Pi-ta-go.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng trong tứ giác, mỗi đường chéo nhỏ hơn nửa chu vi tứ giác.

Giải

Xét tứ giác ABCD có đường chéo AC:



$AC < AB + BC$ (bất đẳng thức trong ΔABC);

$AC < AD + DC$ (bất đẳng thức trong ΔADC)

Suy ra: $2AC < AB + BC + AD + DC$. Do đó:

$AC < \dfrac{AB + BC + AD + DC}{2}$.

Vậy AC nhỏ hơn nửa chu vi tứ giác $ABCD$.

Chứng minh tương tự, BD nhỏ hơn nửa chu vi tứ giác $ABCD$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = 130^0, \widehat{B} = 90^0$, góc ngoài tại định C bằng 120^0 .Tính $\widehat{D}$.
2. (Dạng 1). Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} = 80^0, \widehat{D} = 70^0$. Các tia phân giác của các góc A và B cắt nhau tại I. Tính $\widehat{AIB}$.
3. (Dạng 1). Bốn góc của một tứ giác có thể đều là góc nhọn (góc tù, góc vuông) được không? Tại sao? Suy ra trong một tứ giác có nhiều nhất mấy góc nhọn?
4. (Dạng 1). Tứ giác $EFGH$ có $\widehat{E} = 70^0, \widehat{F} = 80^0$. Tính $\widehat{G}, \widehat{H}$ biết rằng: $\widehat{G} - \widehat{H} = 20^0$
5. (Dạng 1). Tính các góc của tứ giác $MNPQ$, biết rằng: $\widehat{M} : \widehat{N} : \widehat{P} : \widehat{Q} = 1:3:4:7$
6. (Dạng 2). Vẽ tứ giác $ABCD$ biết: $\widehat{A} = 130^0, \widehat{D} = 90^0, \text{AB} = 2cm, \text{BC} = 3cm$ $AC = 3cm$.
7. (Dạng 3). Tính độ dài của các cạnh $a,\ b,\ c,\ d$ của một tứ giác có chu vi bằng $76cm$ và $a : b : c : d = 2 : 5 : 4 : 8$.
8. (Dạng 3). Có hay không một tứ giác mà độ dài các cạnh tỉ lệ với $2,\ 3,\ 4,\ 10$?
9. (Dạng 3). Đường chéo AC của tứ giác $ABCD$ chia tứ giác đó thành hai tam giác có chu vi là $25cm$ và $27cm$. Biết chu vi của tứ giác bằng $32cm$. Tính độ dài AC.
10. (Dạng 3). Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B} = 110^0, \widehat{D} = 70^0$, AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng $CB = CD$.
11. (Dạng 3). Chứng minh trong một tứ giác, tổng hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi và nhỏ hơn chu vi tứ giác đó.
12. (Dạng 3). Chứng minh rằng nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tổng bình phương hai cạnh đối này bằng tổng bình phương hai cạnh đối kia.

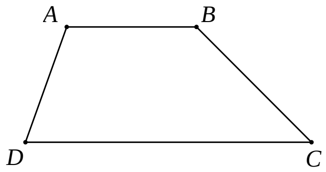
§2. HÌNH THANG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song

$ABCD$ là hình thang $\Rightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là tu giác} \\ AB // CD \end{cases}$

(đáy là $AB,\ CD$)



2. Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. TÍNH GÓC CỦA HÌNH THANG

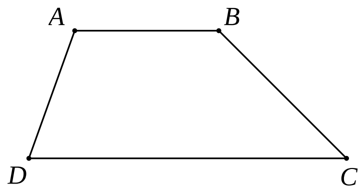
Phương pháp giải

Sử dụng tính chất của các góc tạo bởi hai đường thẳng song song với một cát tuyến

Ví dụ 1. (Bài 8 SGK)

Hình thang ABCD (AB // CD) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^0, \widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang.

Giải



Ta có AB // CD nên:

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^0$$

Ta lại có $\widehat{A} - \widehat{D} = 20^0$, nên:

$$\widehat{A} = \frac{180^0 + 20^0}{2} = 100^0$$

$$\widehat{D} = 180^0 - 100^0 = 80^0$$

Ta có AB // CD nên:

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^0$

Ta lại có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên $3\widehat{C} = 180^0$. Suy ra:

$$\widehat{C} = 60^0, \widehat{D} = 120^0$$

Dạng 2. NHẬN BIẾT HÌNH THANG, HÌNH THANG VUÔNG

Phương pháp giải

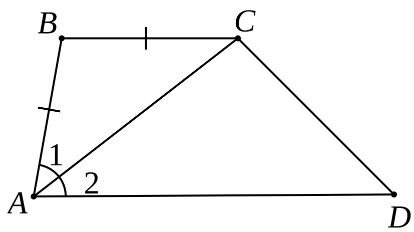
Sử dụng định nghĩa hình thang, hình thang vuông

Ví dụ 2. (Bài 9 SGK)

Tứ giác $ABCD$ có $AB = CD$ và AC là tia phân giác của góc A.

Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

Giải



Ta có $AB = BC \Rightarrow \Delta ABC$ cân $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1}$.

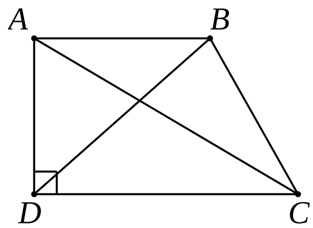
Ta lại có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{A_2}$ suy ra BC // AD. Vậy $ABCD$ là hình thang.

Dạng 3. TÍNH TOÁN VÀ CHỨNG MINH VỀ ĐỘ DÀI

Phương pháp giải

Sử dụng Đinh lí Pi-ta-go, sử dụng các cách chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau,…

Ví dụ 3. Chứng minh rằng trong hình thang vuông, hiệu các bình phương hai đường chéo bằng hiệu các bình phương đáy.



ΔADC vuông nên $AC^2 = AD^2 + DC^2$

ΔABD vuông nên $BD^2 = AD^2 + AB^2$

Từ (1) và (2) suy ra $AC^2 - BD^2 = DC^2 - AB^2$

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Hình thang $ABCD$ (AB // CD) có $\widehat{A} - \widehat{D} = 40^o, \widehat{A} = 2\widehat{C}$. Tính các góc của hình thang
2. (Dạng 1). Hình thang có nhiều nhất bao nhiêu góc tù, có nhiều nhất bao nhiêu góc nhọn? vì sao?
3. (Dạng 1, 2, 3). Cho tam giác ABC vuông tại A, BC = 2cm. Vẽ tam giác ACE vuông cân tại E (E và B khác phía đối với AC). Chứng minh rằng AECB là hình thang vuông, tính các góc và các cạnh của nó.
4. (Dạng 3). Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0, AB = 5cm,$ $AD = 12cm, BC = 13cm$. Tính CD .
5. (Dạng 3). Hình thang $ABCD$ (AB // CD) có $AB = 2cm,\ CD = 5cm$. Chứng minh rằng $AD + BC > 3cm$.
6. (Dạng 3).Cho hình thang $ABCD$ (AB //CD) có các tia phân giác của các góc C và D gặp nhau tại điểm I thuộc cạnh đáy AB. Chứng minh rằng AB bằng tổng của hai cạnh bên.
7. (Dạng 3).Cho hình thang $ABCD$ (AB //CD) có các tia phân giác của các góc A và D gặp nhau tại điểm I thuộc cạnh đáy BC. Chứng minh rằng AD bằng tổng của hai đáy.

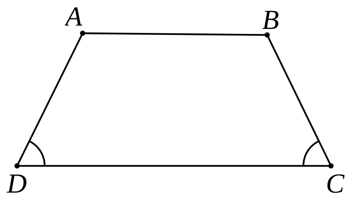
§3. HÌNH THANG CÂN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau

$ABCD$ là hình thang cân (đáy AB, CD) $\Leftrightarrow$ $ABCD$ là hình thang và $\widehat{C} = \widehat{D}$.



2. Tính chất.

Trong hình thang cân

- Hai cạnh bên bằng nhau
- Hai đường chéo bằng nhau

3. Dấu hiệu nhận biết hình thang cân

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân
- Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH THANG CÂN

Phương pháp giải

Chứng minh tứ giác là hình thang, rồi chứng minh hình có hai góc kề một đáy bằng nhau, hoặc có hai đường chéo bằng nhau.

Ví dụ 1. (Bài 17 SGK)

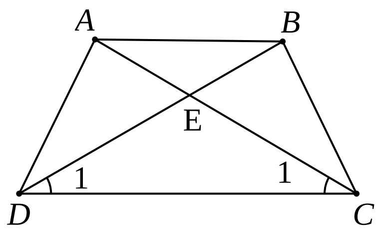
Hình thang $ABCD$ ($AB \,//\, CD$) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

Giải

Gọi E là giao điểm của AC và BD.

ΔECD có $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ nên là tam giác cân, suy ra:

$EC = ED.$ (1)



Chứng minh tương tự:

$EA = EB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC = BD$. Hình thang $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

Ví dụ 2. (Bài 18 SGK)

Chứng minh định lí "Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân" qua bài toán sau:

Cho hình thang $ABCD$ (AB // CD) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔBDE là tam giác cân

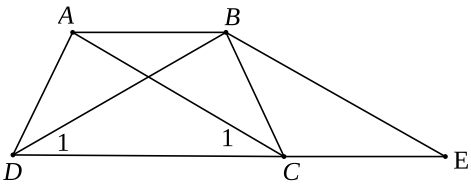
b) $\Delta ACD = \Delta BDC$.

c) Hình thang $ABCD$ là hình thang cân

Giải

a) Hình thang $ABEC$ (AB // EC) có hai cạnh bên AC, BE song song nên chúng bằng nhau: $AC = BE$.

Theo giả thuyết $AC = BD$, nên $BE = BD$, do đó ΔBDE cân



b) AC // BE $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E}$.

ΔBDE cân tại B (Câu a) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E}$. suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$.

$\Delta ACD = \Delta BCD$ $(c.g.c)$

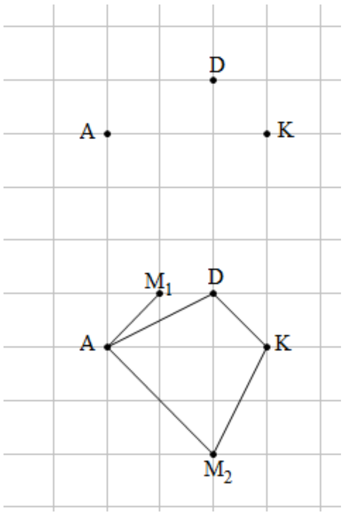
c) $\Delta ACD = \Delta BDC \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. Hình thang $ABCD$ có hai góc kề một đáy bằng nhau nên là hình thang cân

Ví dụ 3. (Bài 19 SGK)

Cho ba điểm A, D, K trên giấy kẻ ô vuông (H32.SGK). Hãy tìm điểm thứ tư M là giao điểm của dòng kẻ sao cho nó cùng với ba điểm đã cho là bốn đỉnh của một hình thang cân.

Giải

Có thể vẽ được hai điểm M: Hình thang $AKDM_1$ (với AK là đáy), hình thang $ADKM_2$ (với DK là đáy)



Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH THANG CÂN ĐỂ TÍNH SỐ ĐO GÓC, ĐỘ DÀI ĐƯỜNG THẲNG.

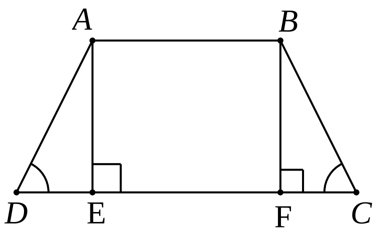
Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất của hình thang cân: Hai góc kề một cạnh đáy bằng nhau, hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau.

Ví dụ 4. (Bài 12 SGK)

Cho hình thang cân $ABCD$ (AB // CD, $AD < CD$). Kẻ các đường cao AE, BF là hình thang. Chứng minh rằng $DE = CF$.

Giải

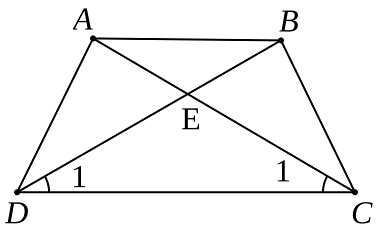


$\Delta AED = \Delta BFC$ (Cạnh huyền - góc nhọn) – suy ra $DE = CF$.

Ví dụ 5 (Bài 13 SGK)

Cho hình thang cân $ABCD$ (AB // CD), E là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng $EA = EB, EC = ED$.

Giải



Chứng minh $\Delta ACD = \Delta BDC$ theo trường hợp c.c.c hoặc c.g.c. Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$, do đó ΔECD cân, $EC = ED$.

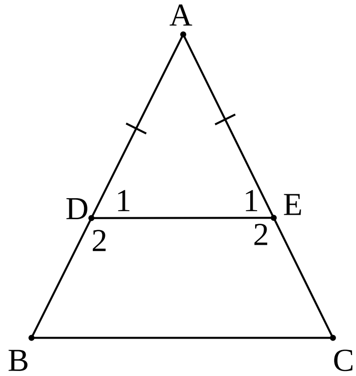
Ta lại có $AC = BD$ nên $EA = EB$.

Ví dụ 6. (Bài 15 SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

a) Chứng minh rằng $BDEC$ là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết rằng $\widehat{A} = 50^0$



Giải

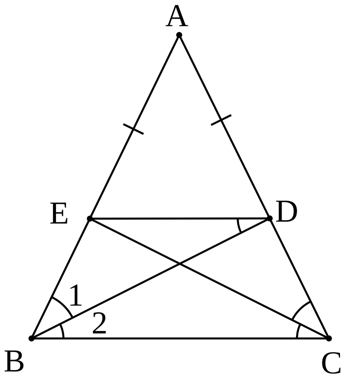
a) $\widehat{D_1} = \widehat{B}$ (cùng bằng $\dfrac{180^0 - \widehat{A}}{2}$) $\Rightarrow$ DE//BC.

Hình thang $BDEC$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$ nên là hình thang cân.

b) $\widehat{B} = \widehat{C} = 65^0, \widehat{D_2} = \widehat{E_2} = 115^0$.

Ví dụ 7. (Bài 16 SGK)

Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác $BD, CE (D \in AC, E \in AB)$. Chứng minh rằng $BEDC$ là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.



Giải

a) $\Delta ABD = \Delta ACE \ (g.c.g) \Rightarrow AD = AE$.

Chứng mình $BEDC$ là hình thang cân như câu a) của Bài 15 SGK (ví dụ 6).

b) DE//BC $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{B_2}$ (so le trong). Ta lại có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$, do đó $DE = BE$.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D, trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Tứ giác $DECB$ là hình gì? Vì sao?
2. (Dạng 1). Tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = AD$, $\widehat{A} = 110^0$, $\widehat{C} = 70^0$. Chứng minh rằng:
   a) DB là tia phân giác của góc D.
   b) $ABCD$ là hình thang cân.
3. (Dạng 2). Cho tam giác đều ABC, điểm M nằm trong tam giác đó. Qua M, kẻ đường thẳng song song với AC và cắt BC ở D, kẻ đường thẳng song song với AB và cắt AC ở E, kẻ đường thẳng song song với BC và cắt AB ở F. Chứng minh rằng:
   a) $BFMD$, $CDME$, $AEMF$ là các hình thang cân.
   b) $\widehat{DME} = \widehat{EMF} = \widehat{DMF}$.
   c) Trong ba đoạn thẳng MA, MB, MC đoạn lớn nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia.
4. (Dạng 2). Hình thang cân $ABCD$ (AB//CD) có hai đường chéo cắt nhau tại P, hai cạnh bên kéo dài cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng PQ là đường trung trực của hai đáy.

5. (Dạng 2). Hình thang cân $ABCD$ (AB//CD) có DB là tia phân giác của góc D, $DB \perp BC$. Biết $AB = 4cm.$ Tính chu vi hình thang.
6. (Dạng 2). Tính chiều cao của hình thang cân $ABCD$, biết rằng cạnh bên $BC = 25cm$, các cạnh đáy $AB = 10cm,\ CD = 24cm.$
7. (Dạng 3). Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác $BD,\ CE.$

   a) Tứ giác $BEDC$ là hình gì? Vì sao?

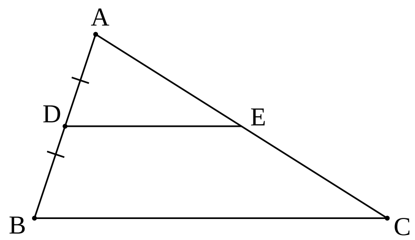
   b) Tính chu vi tứ giác $BEDC$, biết $BC = 15cm,\ ED = 9cm.$

BÀI 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Đường trung bình của tam giác

Định lí 1. Đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.



$$\begin{cases} \Delta ABC \\ AD = DB \Rightarrow AE = EC. \\ DE\,//\,BC \end{cases}$$

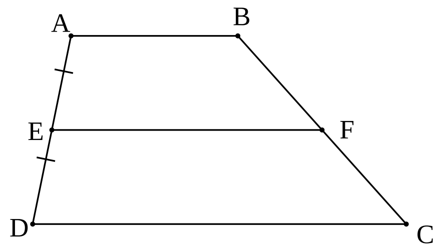
Định nghĩa. Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

Định lí 2. Đường trung binh của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nữa cạnh ấy.

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ AD = DB \Rightarrow \\ AE = EC \end{cases} \begin{cases} DE\,//\,BC \\ DE = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$$

2. Đường trung bình của hình thang

Định lí 3. Đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm của cạnh thứ hai.



$$\begin{cases} AE = ED \\ \text{EF//AB//CD} \end{cases} \Rightarrow BF = FC.$$

Định nghĩa. Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên của hình thang.

Định lí 4. Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nữa tổng hai đáy.

$$\begin{cases} AB//CD \\ AE = ED \\ BF = FC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EF//AB \\ EF//CD \\ EF = \dfrac{AB+CD}{2} \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC ĐỂ TÍNH ĐỘ DÀI VÀ CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI

Phương pháp giải

Vận dụng định lí 1 và định lí 2 về đường trung bình của tam giác

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Tính chu vi của tam giác MNP, biết $AB = 8cm$, $AC = 10cm$, $BC = 12cm$.

Giải

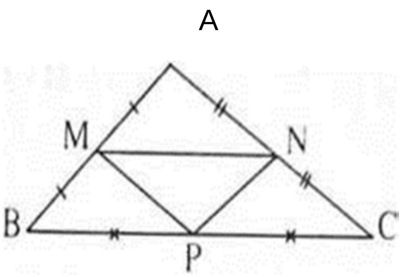
Tam giác ABC có $AM = MB$, $AN = NC$ nên MN là đường trung bình. Suy ra:

$MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ (cm)

Tương tự:

$MP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ (cm)

$NP = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (cm)



Vậy chu vi tam giác MNP bằng : 6 + 5 + 4 = 15 (cm)

Dạng 2. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, TÍNH GÓC.

Phương pháp giải

Sử dụng định lí 2 về đường trung bình của tam giác.

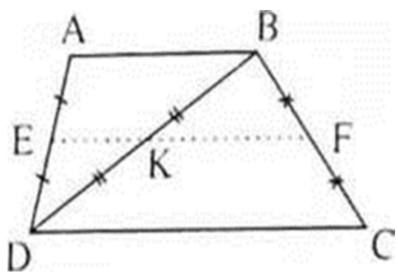
Ví dụ 2. (Bài 25 SGK) Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Giải

EK là đường trung bình của ΔABD nên EK//AB. Do AB//CD nên EK//CD.

KF là đường trung bình của ΔBDC nên KF//CD.

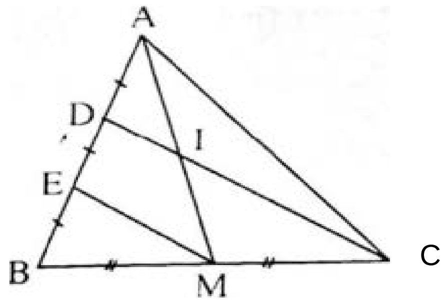
Qua K ta có KE và KF cùng song song với CD nên theo tiên đề Ơ-clít thì E, K, F thẳng hàng.



Ví dụ 3. (Bài 22 SGK)

Cho hình vẽ bên (hình 43 SGK).

Chứng minh rằng AI = IM.



Giải

ΔBDC có BE = ED và BM = MC nên EM//DC, suy ra DI//EM.

ΔAEM có AD = DE và DI//EM nên AI = IM.

Dạng 3. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG ĐỂ TÍNH ĐỘ DÀI VÀ CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ VỀ ĐỘ DÀI

Phương pháp giải

Vận dụng định lí 3 và định lí 4 về đường trung bình của hình thang.

Ví dụ 4. (Bài 26 SGK).

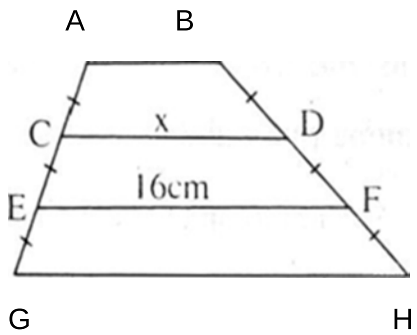
Tính x, y trên hình 45 (SGK), trong đó AB//CD//DF//GH

Giải

CD là đường trung bình của hình thang ABFE nên:

$$x = CD = \frac{AB+EF}{2}$$

$$= \frac{8+16}{2} = 12 \text{ (cm)}.$$



EF là đường trung bình của hình thang CDHG nên: $EF = \frac{CD+HG}{2} \Rightarrow 16 = \frac{12+y}{2}$

Ví dụ 5. (Bài 27 SGK)

Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh các độ dài EK và CD, KF và AB.

b) Chứng minh rằng $EF \le \frac{AB+CD}{2}$

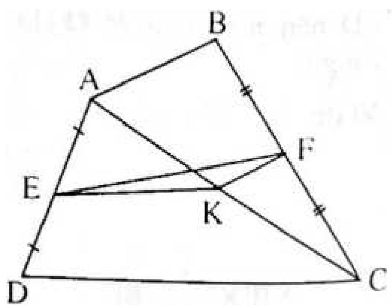
Giải

a) $EK = \frac{CD}{2}$, $KF = \frac{AB}{2}$

b) Ta có:

$$EF \le EK + KF = \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$= \frac{CD+AB}{2}$$



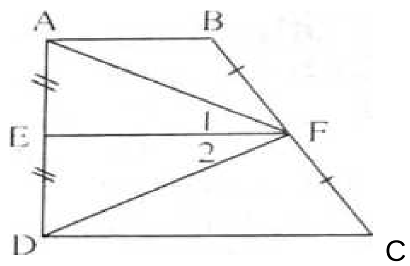
Dạng 4. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, TÍNH GÓC.

Phương pháp giải

Sử dụng định lí 4 về đường trung bình của hình thang.

Ví dụ 6. Cho hình thang vuông ABCD ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$). Gọi F là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$.

Giải



Gọi E là trung điểm của AD.

EF là đường trung bình của hình thang ABCD nên EF // AB // CD. Suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{F}_1$, $\widehat{CDF} = \widehat{F}_2$ (so le trong).

Do EF//CD mà AD ⊥ CD nên EF ⊥ AD.

ΔAFD có đường trung tuyến FE là đường cao nên là tam giác cân. Suy ra $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$. Do đó $\widehat{BAF} = \widehat{CDF}$.

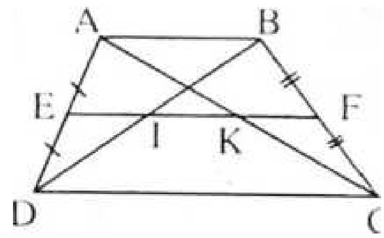
Ví du 7. (Bài 28 SGK)

Cho hình thang ABCD (AB // CD). E là trung điểm của AD. F là trung điểm của BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh rằng AK = KC, BI = ID.

b) Cho AB = 6cm, CD = 10cm. Tính các độ dài El. KF, IK.

Giải



a) EF là đường trung bình của hình thang ABCD nên EF//AB//CD?

Tam giác ABC có BF = FC và FK // AB nên AK = KC.

Tam giác ABD có AE = ED và EI // AB nên BI = ID.

b) Lần lượt tính được : EF = 8cm, EI = 3cm, KF = 3cm, IK = 2cm.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1) Tam giác ABC có AB = 12cm, AC = 18cm. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến tia phân giác của góc A. Gọi M là trung điểm của BC. Tính độ dài HM.

2. (Dạng 1). Cho hình thang cân ABCD có AB // CD, AB = 4cm CD = 10cm, AD = 5cm. Trên tia đối của tia BD lấy điểm E sao cho BE = BD. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ E đến DC. Tính độ dài CH.

3. (Dạng 2). Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$ D và E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Xác định dạng tứ giác BDEC và tính các góc của nó.

4. (Dạng 2). Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng nối trung điểm của cặp cạnh đối diện của một tứ giác bằng nửa tổng hai cạnh kia thì tứ giác đó là hình thang.

5. (Dạng 2). Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho BD = BA.

Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho CE = CA. Kẻ BH vuông góc với AD, CK vuông góc với AE. Chứng minh rằng :

a) AH = HD.

b) HK//BC.

6. (Dạng 3). Cho tam giác ABC cân tại A, gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC.

a) Xác định dạng tứ giác BDEC.

b) Cho biết BC = 8cm, tính HC, HB.

7. (Dạng 3). Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm cua AM, D là giao điểm của BI và AC.

a) Chứng minh rằng AD = $\frac{1}{2}$ DC.

b) Tính tỉ số các độ dài BD và ID.

8. (Dạng 3). Cho tam giác ABC. Điểm D thuộc tia đối của tia BA sao cho BD = BA, điểm M là trung điểm của BC. Gọi K là giao điểm của DM và AC. Chứng minh rằng AK = 2KC.

9. (Dạng 3). Chứng minh rằng trong hình thang, đoạn thẳng nối trung điểm của hai đường chéo thì song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa hiệu độ dài của hai đáy.

10. (Dạng 4). Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Tính chu vi hình thang ABCD. biết rằng DE + EF + FC = 5m.

11. (Dạng 4). Cho tam giác ABC. Qua trung điểm O cua đường trung tuyến AM. Kẻ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với d. Gọi AA′, BB′, CC′ là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng BB' + CC' = 2AA'.

12. (Dạng 4). Cho tam giác ABC. Qua trọng tâm G, kẻ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với d. Gọi AA′, BB′, CC′ là các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng AA′ = BB' + CC'.

13. (Dạng 4). Cho hai điểm A. B có khoảng cách đến đường thẳng d theo thứ tự là 20dm và 6dm. Gọi C là trung điểm của AB. Tính khỏang cách từ C đến đường thẳng d.

14. (Dạng 6). Cho tam giác ABC có BC = 8cm. Các trung tuyến BD, CE. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BE, CD. Gọi giao điểm của MN với BD, CE theo thứ tự là I, K.

a) Tính độ dài MN.

b) Chứng minh rằng MI = IK = KN.

15. (Dạng 6). Cho hình thang ABCD (AB // CD). Các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh A và D cắt nhau ở M. Các đường phân giác của các góc ngoài tại đỉnh B và C cắt nhau ở N.

a) Chứng minh rằng MN //CD.

b) Tính chu vi hình thang ABCD biết MN = 4cm.

§ 5. DỰNG HÌNH BẰNG THƯỚC VÀ COMPA. DỰNG HÌNH THANG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Bài toán dựng hình trình bày đầy đủ gồm bốn phần :

Phân tích :

- Giả sử đã có một hình thỏa mãn các điều kiện của bài toán.
- Chọn ra các yếu tố dựng được ngay (đoạn thẳng, tam giác. ...).
- Đưa việc dựng các điểm còn lại về các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản (mỗi điểm thường được xác định là giao điểm của hai đường).

Cách dựng: Nêu thứ tự từng bước dựng hình, đồng thời thể hiện các nét dựng trên hình vẽ.

Chứng minh: Bằng lập luận chứng tỏ rằng với cách dựng như trên, hình đã dựng thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Biện luận: Xét xem khi nào thì bài toán dựng được, và dựng được bao nhiêu hình thỏa mãn đề bài.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. DỰNG TAM GIÁC

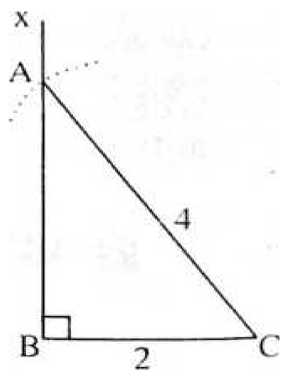
Phương pháp giải

Sử dụng các bài toán dựng hình cơ bản đã biết về dựng tam giác (dựng tam giác biết ba cạnh, biết hai cạnh và góc xen giữa, biết một cạnh và hai góc kề) và các bài toán dựng hình cơ bản khác đã nêu ở SGK.

Ví dụ 1. (Bài 30 SGK)

Dựng tam giác ABC vuông tại B, biết cạnh huyền AC = 4cm, cạnh góc vuông BC = 2cm

Giải



Cách dựng :

- Dựng đoạn thẳng BC = 2cm.
- Dựng góc $\widehat{CBx} = 90°$.
- Dựng cung tâm C có bán kính 4cm, cắt Bx ở A.
- Dựng đoạn thẳng AC.

Chứng minh :

ΔABC có $\widehat{B} = 90°$, BC = 2cm, AC = 3cm, thoả mãn đề bài.

Dạng 2. DỰNG HÌNH THANG

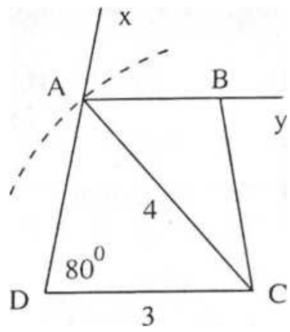
Phương pháp giải

Tìm tam giác có thể dựng được ngay (có thể phải vẽ thêm đường phụ). Sau đó phân tích dựng các điểm còn lại, mỗi điểm phải thỏa mãn hai điều kiện nên là giao điểm của hai đường.

Ví dụ 2. (Bài 33 SGK)

Dựng hình thang cân ABCD, biết đáy CD = 3cm, đường chéo AC = 4cm, D = 80°.

Giải



Cách dựng :

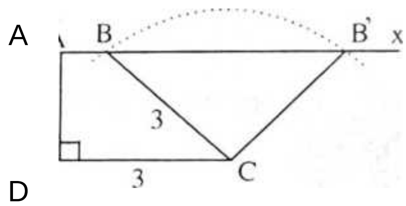
- Dựng đoạn thẳng CD = 3cm.
- Dựng góc $\widehat{CDx} = 80^\circ$.
- Dựng cung tâm C có bán kính 4cm, cắt tia Dx ở A.
- Dựng tia Ay // DC (Ay và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AD).
- Để dựng điểm B có hai cách : hoặc dựng C = 80°. hoặc dựng đường chéo DB = 4cm .

Chứng minh : Bạn đọc tự giải.

Ví dụ 3. (Bài 34 SGK)

Dựng hình thang ABCD, biết D = 90°, đáy CD = 3cm, cạnh bên AD = 2cm,cạnh bên BC = 3cm.

Giải



Dựng ΔADC biết hai cạnh và góc xen giữa. Sau đó dựng điểm B.

Chú ý. Có hai hình thang thoả mãn bài toán.

Dạng 3. DỰNG GÓC CÓ SỐ ĐO ĐẶC BIỆT

Phương pháp giải

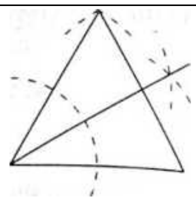
Nhờ dựng góc vuông, dựng tia phân giác của một góc, dựng tam giác đều, ta dựng được một số góc có số đo đặc biệt, chẳng hạn 45°, 60°. 30°,...

Ví dụ 4. (Bài 32 SGK) Hãy dựng một góc bằng 30°.

Giải

Cách dựng :

- Dựng một tam giác đều để có góc 60° .
- Dựng tia phân giác của góc 60° .



Dạng 4. DỰNG TỨ GIÁC, DỰNG ĐIỂM HAY ĐƯỜNG THẲNG THOẢ MÃN MỘT YÊU CẦU NÀO ĐÓ

Phương pháp giải

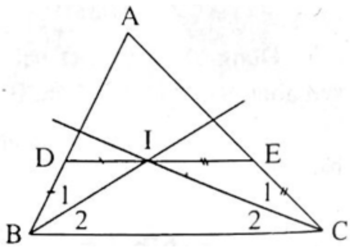
Tìm tam giác có thể dựng được ngay (có thể phải vẽ thêm đường phụ), Sau đó phân tích dựng các điểm còn lại, mỗi điểm phải thỏa mãn hai điều kiện nên là giao điểm của hai đường.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC ở D và E sao cho DE = BD + CE.

Giải

Phân tích : Giả sử đã dựng được DE // BC sao cho DE = BD + CE.

Trên DE lấy I sao cho DI = DB thì EI = EC. Hãy chứng minh $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$? và $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.



Cách dựng:

- Dựng các tia phân giác của các góc B và C. chúng cắt nhau ở I.
- Qua I, dựng đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC tại D và E.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Dựng tam giác ABC. biết : AB + AC = 3cm, BC = 2cm, $\hat{B} = 75°$.

2. (Dạng 1). Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết : AC − AB= lCm, $\hat{C} = 30°$.

3. (Dạng 2). Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) biết : AB = lcm, $\hat{C} = 55°$, đường cao BH = l,5cm.

4. (Dạng 2). Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết : AB = 1.5cm, CD = 3,5cm, $\hat{C} = 45°$, $\hat{D} = 60°$.

5. (Dạng 2). Dựng hình thang cân ABCD (AB // CD) biết : AB = lcm , CD = 3cm. BD = 2,5cm.

6. (Dạng 2). Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết : AB=lcm, CD = 3cm , AC = 3cm . BD = 2cm.

7. (Dạng 3). Dựng góc có số đo bằng 105°

8. (Dạng 4). Dựng tứ giác ABCD biết $\hat{A} = 120°$, $\hat{B} = 110°$, AD = l,5cm , AC = 3cm, CD = 3cm.

9. (Dạng 4). Cho tam giác ABC (BC > AB). Dựng điểm M thuộc cạnh BC sao cho MA + MB = BC.

§ 6. ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. A đối xứng với A′ qua d ⇔ d là đường trung trực của AA′.

2. Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua đường thẳng d cũng thuộc hình H.
3. Đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy của hình thang cân là trục đối xứng của hình thang cân đó

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VẼ HÌNH, NHẬN BIẾT HAI HÌNH ĐỐI XỨNG VỚI NHAU QUA MỘT TRỤC

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng với nhau qua một trục, hai hình đối xứng với nhau qua một trục.

Ví dụ 1. (Bài 41 SGK)

Các câu sau đây đúng hay sai?

a) Nếu ba điểm thẳng hàng thì ba điểm đối xứng với chúng qua một trục cũng thẳng hàng.
b) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một trục thì có chu vi bằng nhau
c) Một đường tròn có vô số trục đối xứng.
d) Một đoạn thẳng chỉ có một trục đối xứng.

Giải

a) Đúng ; b) Đúng ; c) Đúng.

d) Sai. Giải thích : Một đoạn thẳng có hai trục đối xứng (là chính nó và đường trung trực của nó).

Dạng 2. SỬ DỤNG ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

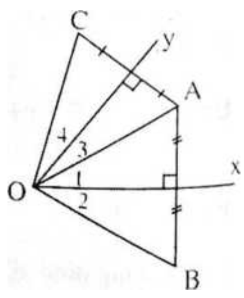
Phương pháp giải

Sử dụng tính chất : Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

Ví dụ 2. (Bài 36 SGK)

Cho góc xOy có số đo 50°, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

a) So sánh các độ dài OB và OC.
b) Tính số đo góc BOC.



Giải

a) Ox là đường trung trực của AB => OA = OB.

Oy là đường trung trực của AC=> OA = OC. Suy ra OB = OC.

b) ΔAOB cân tại O => $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

ΔAOC cân tại O => $\hat{O}_3 = \hat{O}_4 = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$

$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2(\hat{O}_1+\hat{O}_3) = 2\,\widehat{xOy} = 2.50° = 100°$.

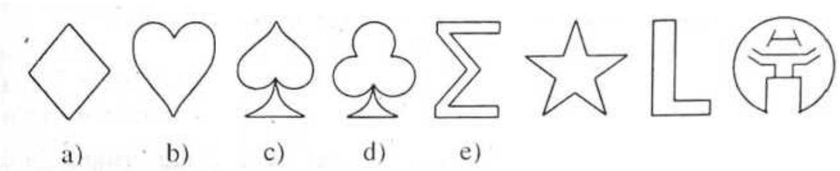
Vậy $\widehat{BOC} = 100°$

Dạng 3. TÌM TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH, HÌNH CÓ TRỤC ĐỐI XỨNG

Phương pháp giải

Nhớ lại định nghĩa trục đối xứng của một hình, định lí về trục đối xứng của hình thang cân.

Ví dụ 3. (Bài 37 SGK)



Tìm các hình có trục đối xứng trên các hình vẽ sau :

Giải

Hình h) không có trục đối xứng. Còn lại các hình khác đều có trục đối xứng.

Chú ý. Hình a) có hai trục đối xứng. Hình g) có năm trục đối xứng.

g) h) i)

Dạng 4. DỰNG HÌNH, THỰC HÀNH CÓ SỬ DỤNG ĐỐI XỨNG TRỤC

Phương pháp giải

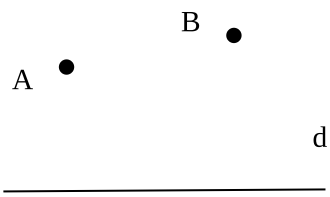
Chú ý đến hình có trục đối xứng. Trong nhiều bài toán, cần vẽ thêm : điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một đường thẳng.

Ví dụ 4. (Bài 39 SGK)

Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (hình 60 SGK). Gọi C là điểm đối xứng với A qua d.

a) Gọi D là giao điểm của đường thẳng d và đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm bất kì của đường thẳng d (E khác D). Chứng minh rằng AD + DB < AE + EB.

b) Bạn Tú đang ở vị trí A, cần đến bờ sông d lấy nước rồi di đến vị trí B (hình 60 SGK). Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào ?



Hình 60 SGK

Giải

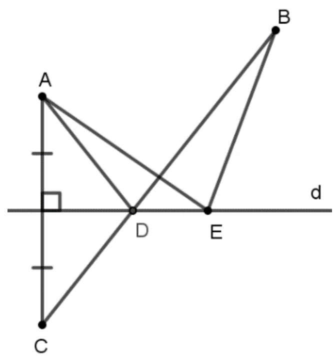
a) $AD + DB = CD + DB = CB;$ (1)

$AE + EB = CE + EB;$ (2)

$CB < CE < EB.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $AD + DB < AE + EB.$

b) Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường ADB.



Chú ý. Bài toán trên cho ta cách dựng điểm D trên đường thẳng d sao cho tổng các khoảng cách từ A và từ B đến D là nhỏ nhất. Nhiều bài toán thực tế dẫn đến bài toán dựng hình như thế.

Chẳng hạn:

- Hai địa điểm dân cư A và B ở cùng phía một con sông thẳng. Cần đặt cầu ở vị trí nào để tổng các khoảng cách từ cầu đến A và đến B là nhỏ nhất?

- Hai công trường A và B ở cùng phía một con đường thẳng. Cần đặt trạm biến thế ở vị trí nào trên con đường để tổng độ dài đường dây từ trạm biến thế đến A và đến B là nhỏ nhất?

Ví dụ 5. (Bài 42 SGK)

a) Hãy tập cắt chữ D (hình 62a SGK) bằng cách gấp đôi tờ giấy. Kể tên một vài chữ cái khác (kiểu chữ in hoa) có trục đối xứng.

b) Vì sao ta có thể gấp tờ giấy làm tư để cắt chữ H (hình 62b SGK)?

a) b)

Giải

a) Các chữ cái có trục đối xứng:

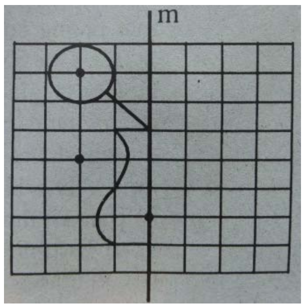
- Chỉ có một trục đối xứng dọc: A, M, T, U, V, Y.

- Chỉ có một trục đối xứng ngang: $B, C, D, Đ, E, K$.

- Có hai trục đối xứng dọc và ngang: H, I, O, X.

b) Có thể gấp tờ giấy làm tư để cắt chữ H vì chữ H có hai trục đối xứng vuông góc.

C. LUYỆN TẬP



1. (Dạng 1). Vẽ hình đối xứng với hình bên qua trục m.

2. (Dạng 1). Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E, trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $AD = AE$. Chứng minh rằng hai điểm D và E đối xứng với nhau qua đường thẳng AM.

3. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Tìm liên hệ giữa số đo các góc BAC và BKC.

4. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC, gọi m là đường trung trực của BC. Vẽ điểm D đối xứng với A qua m.

a) Tìm các đoạn thẳng đối xứng với AB, AC qua m.

b) Xác định dạng tứ giác $ABCD$.

5. (Dạng 2). Cho hình thang vuông $ABCD$ $(\widehat{A}=\widehat{D}=90^0)$. Gọi K là điểm đối xứng với C qua
AD. Chứng minh rằng $\widehat{AIB}=\widehat{CID}$.

6. (Dạng 2). Cho tam giác ABC. Gọi d là đường phân giác ngoài ở đỉnh A. Trên đường thẳng
d lấy điểm M khác A. Chứng minh rằng $BA+AC<BM+MC$.

7. (Dạng 2). Cho tam giác nhọn ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Gọi D là điểm đối xứng với M
qua AB, gọi E là điểm đối xứng với M qua AC. Gọi I, K là giao điểm của DE với
AB, AC.

a) Chứng minh rằng MA là tia phân giác của góc IMK.

b) Tìm vị trí của điểm M để DE có độ dài nhỏ nhất.

8. (Dạng 3). Cho tam giác ABC cân tại B.

a) Tìm trục đối xứng của tam giác đó.

b) Gọi trục đối xứng đó là d. Kể tên hình đối xứng qua d của: đỉnh A, đỉnh B, đỉnh C, cạnh
AB, cạnh AC.

9. (Dạng 4). Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Gọi AH, BK là các đường vuông góc kẻ từ A, B đến d. Gọi C là điểm bất kì nằm giữa H và K.

a) Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d. Chứng minh rằng $\widehat{ACH}=\widehat{A'CH}$.

b) Gỉa sử $\widehat{ACH}=\widehat{BKC}$, chứng minh rằng khi đó ba điểm A', C, B thẳng hàng.

c) Nêu cách dựng điểm C nằm giữa H và K sao cho $\widehat{ACH}=\widehat{BCK}$.

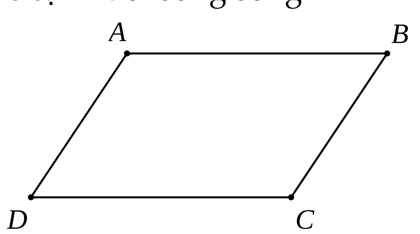
10. (Dạng 4). Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

§7. HÌNH BÌNH HÀNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.



$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ là tứ giác} \\ AB \parallel CD,\ AD \parallel BC \end{cases}$

2. Tính chất

Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau;
- Các góc đối bằng nhau;
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết hình bình hành

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH BÌNH HÀNH

Phương pháp giải

Thường sử dụng các dấu hiệu nhận biết hình bình hành về cạnh đối hoặc về đường chéo.

Ví dụ 1. (Bài 46 SGK)

Các câu sau đúng hay sai?

a) Hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau là hình bình hành.

b) Hình thang có hai cạnh bên song song là hình bình hành.

c) Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

d) Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình bình hành.

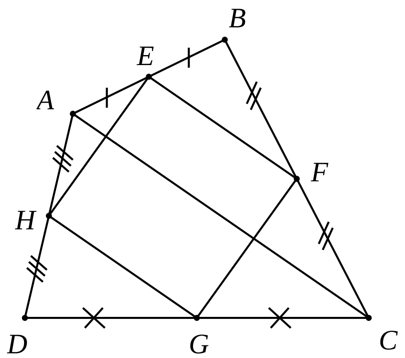
Giải

Các câu đúng: a) và b)

Các câu sai: c) và d) (có thể lấy hình thang cân làm phản ví dụ).

Ví dụ 2. (Bài 48 SGK)

Tứ giác $ABCD$ có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác $EFGH$ là hình gì? Vì sao?



Giải

Tứ giác $EFGH$ là hình bình hành.

Cách 1.

$EF \parallel GH$ (cùng song song với AC);

$EH \parallel FG$ (cùng song song với BD).

Cách 2.

$EF \parallel GH$ (cùng song song với AC);

$EF = GH$ (cùng bằng $\frac{AC}{2}$).

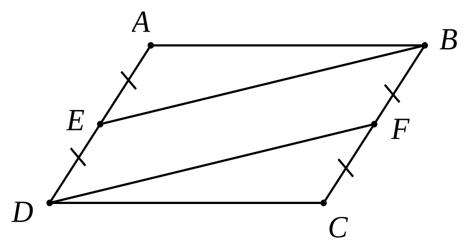
Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA HÌNH BÌNH HÀNH ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, CÁC GÓC BẰNG NHAU

Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất về cạnh, góc và đường chéo của hình bình hành. Có thể phải chứng minh một tứ giác là hình bình hành.

Ví dụ 3. (Bài 44 SGK)

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $BE = DF$.



Giải

Tứ giác $BEDF$ có $DE \parallel BF$ và $DE = BF$ nên là hình bình hành. Do đó $BE = DF$.

Ví dụ 4. (Bài 45 SGK)

Cho hình bình hành $ABCD$ $(AB > BC)$. Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BF$.

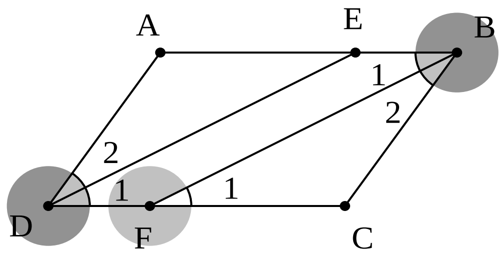
b) Tứ giác $DEBF$ là hình gì? Vì sao?

Giải

a) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (cùng bằng nửa hai góc bằng nhau $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$).

Ta có $AB // CD \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{F_1}$ (so le trong).

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$. Do đó $DE // BF$ (có hai góc đồng vị bằng nhau).



b) $DEBF$ là hình bình hành (theo định nghĩa).

Ví dụ 5. (Bài 49 SGK)

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng:

a) $AI // CK$.

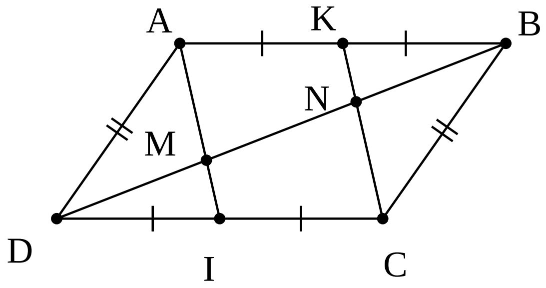
b) $DM = MN = NB$.

Giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên có $AB = CD$ và $AB//CD$.

Tứ giác $AICK$ có $AK // IC$ và $AK = IC$ nên là hình bình hành. Do đó $AI//CK$.

b) ΔDCN có $DI = IC$ và $IM//CN$ nên



$DM = MN$. Chứng minh tương tự $MN = NB$.
Vậy $DM = MN = NB$.

Dạng 3. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG CHÉO HÌNH BÌNH HÀNH ĐỂ CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp giải

Theo tính chất đường chéo của hình bình hành, trung điểm của một đường chéo và hai đầu của đường chéo kia là ba điểm thẳng hàng.

Ví dụ 6. (Bài 47 SGK)

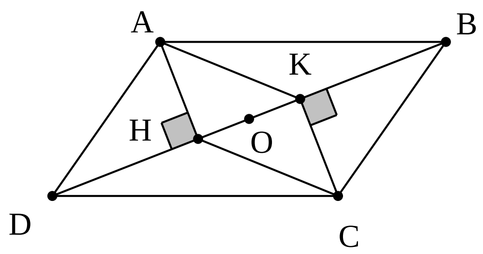
Cho hình 72 SGK (hình vẽ bên).

trong đó $ABCD$ là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng $AHCK$ là hình bình hành

b) Gọi O là trung điểm của HK.

Chứng minh ba điểm A, O, C thẳng hàng



Giải

a) $\Delta AHD = \Delta CKB$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AH = CK$.

Tứ giác $AHCK$ có $AH//CK, AH = CK$ nên là hình bình hành.

b) Xét hình bình hành $AHCK$, trung điểm O của đường chéo HK cũng là trung điểm của đường chéo AC. Vậy ba điểm A, O, C thẳng hàng.

Dạng 4. DỰNG HÌNH BÌNH HÀNH, HOẶC DỰNG HÌNH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH BÌNH HÀNH

Phương pháp giải

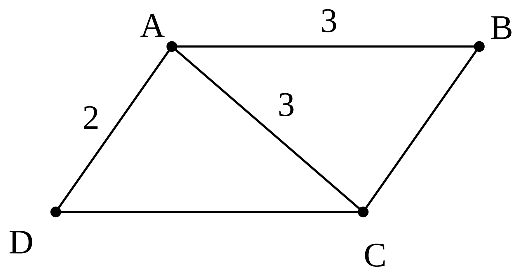
Thường đưa về dạng tam giác, rồi dựng tiếp các đỉnh còn lại của hình bình hành

Ví dụ 7. Dựng hình bình hành $ABCD$ biết ba đoạn thẳng xuất phát từ A là $AB = 3cm$, $AC = 3cm$, $AD = 2cm$.

Giải

$AB = 3cm$ nên $CD = 3cm$.

Dựng ΔACD biết ba cạnh. Sau đó dựng điểm B.



C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Cho tam giác ABC¸ các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau ở G. Vẽ các điểm M, N sao cho D là trung điểm của GM. E là trung điểm của GN. Chứng minh rằng $BNMC$ là hình bình hành.

2. (Dạng 1). Chứng minh rằng nếu hình thang có hai cạnh bên bằng nhau thì đó là hình thang cân hoặc hình bình hành.

3. (Dạng 1). Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = CE$. Gọi O là trung điểm của DE, gọi K là giao điểm của AO và BC. Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

4. (Dạng 1). Cho tam giác ABC có $\widehat{A} \neq 60°$. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD và ACE. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A, vẽ tam giác đều BCK. Chứng minh rằng $ADKE$ là hình bình hành.

5. (Dạng 2). Tính các góc của hình bình hành $ABCD$, biết $\widehat{A} - \widehat{B} = 10°$.

6. (Dạng 2). Tam giác ABC có $AB = AC = 3cm$. Gọi M là điểm thuộc dây BC. Kẻ $MD // AC$, $ME // AB$ $(D \in AB, E \in AC)$. Tính chu vi tứ giác $ADME$.

7. (Dạng 2). Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của BD, AB, AC, CD.

a) Chứng minh rằng $EFGH$ là hình bình hành.

b) Cho $AD = a$, $BC = b$, tính chu vi hình bình hành $EFGH$.

8. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh rằng $AF // CE$.

b) Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của BD với AF, CE. Chứng minh rằng: $DM = MN = NB$.

9. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy các điểm E, F sao cho $DE = DF$. Chứng minh rằng: $AF // CE$.

10. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. E và F theo thứ tự là trung điểm của OD và OB.

a) Chứng minh rằng: $AE // CF$.

b) Gọi K là giao điểm của AE và DC. Chứng minh rằng: $DK = \frac{1}{2}KC$.

11. (Dạng 2). Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm D và E sao cho $AD = BE$. Qua D và E, vẽ các đường thẳng song song với BC, chúng cắt AC theo thứ tự tại M và N.

Chứng minh rằng: $DM + EN = BC$.

12. (Dạng 2). Cho tam giác ABC, trực tâm H. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D. Chứng minh rằng:

a) $BDCH$ là hình bình hành.

b) $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^0$.

c) H, M, D thẳng hàng (M là trung điểm của BC).

d) $OM = \frac{1}{2}AH$ (O là trung điểm của AD).

13. (Dạng 2). Cho hình bình hành $ABCD$. Qua D vẽ đường thẳng d sao cho A và C nằm cùng phía đối với d. Gọi A', B', C' là chân các đường vuông góc kẻ từ A, B, C đến đường thẳng d. Chứng minh rằng: $AA' + CC' = BB'$.

14. (Dạng 3). Cho hình bình hành $ABCD$, E và F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, O là giao điểm của EF và AC. Chứng minh rằng ba điểm B, O, D thẳng hàng.

15. (Dạng 3). Cho hình bình hành $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm G, trên cạnh AD lấy điểm H sao cho $CG = AH$. Chứng minh rằng các đường thẳng GH, AC, BD đồng quy.

16. (Dạng 4). Cho điểm A nằm ngoài đoạn thẳng BC. Hãy sử dụng kiến thức về hình bình hành để dựng đường thẳng đi qua A và song song với BC.

17. (Dạng 4). Dựng hình bình hành $ABCD$, biết hai đường chéo $AC = 3cm$, $BD = 4cm$, $\widehat{COD} = 45^0$ (O là giao điểm của hai đường chéo).

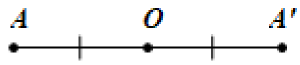
18. (Dạng 4). Dựng hình bình hành $ABCD$, biết đường chéo $AC = 8cm$, $BD = 6cm$, và chiều cao $BH = 4,5cm$ với $H \in AD$.

19. (Dạng 4). Cho tam giác ABC. Dựng điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $DE \,//\, BC$ và $BD = AE$.

§ 8. ĐỐI XỨNG TÂM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Hai điểm được gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.



A đối xứng với A' qua O $\Leftrightarrow$ O là trung điểm của AA'.

2. Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua tâm O cũng thuộc hình H.

3. Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. VẼ HÌNH ĐỐI XỨNG QUA MỘT TÂM

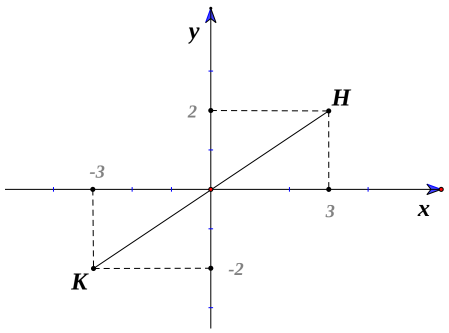
Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng với nhau qua một tâm, hai hình đối xứng với nhau qua một tâm.

Ví dụ 1. (Bài 51 SGK)

Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm H có tọa độ $(3;2)$. Hãy vẽ điểm K đối xứng với H qua gốc tọa độ và tìm tọa độ của K.

Giải



Xem hình bên. Tọa độ của điểm K là $(-3;-2)$.

Dạng 2. NHẬN BIẾT HAI ĐIỂM ĐỐI XỨNG VỚI NHAU QUA MỘT TÂM. SỬ DỤNG ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, HAI GÓC BẰNG NHAU

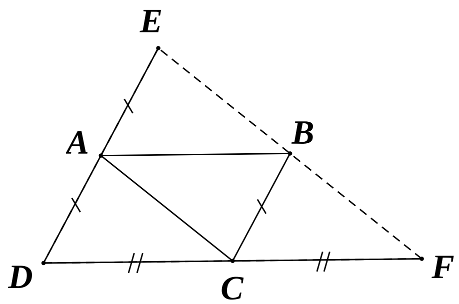
Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa hai điểm đối xứng với nhau qua một tâm, hai hình đối xứng với nhau qua một tâm.

Ví dụ 2. (Bài 52 SGK)

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua điểm A, gọi F là điểm đối xứng với D qua điểm C. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua B.

Giải



Ta có $AE//BC$ và $AE = BC \Rightarrow AEBC$ là hình bình hành $\Rightarrow BE \,//\, AC, BE = AC$. (1)

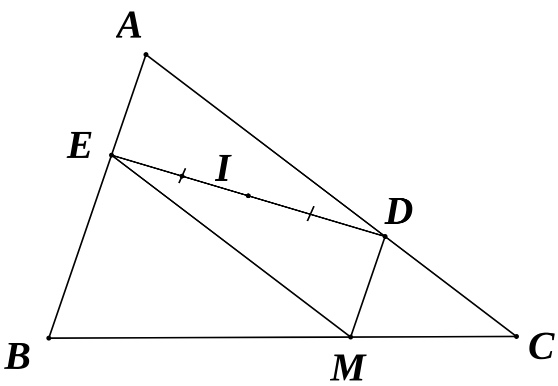
Tương tự: $BF \,//\, AC, BF = AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra E,B,F thẳng hàng và $BE = BF$. Suy ra B là trung điểm của EF và E đối xứng với F qua B.

Ví dụ 3. (Bài 53 SGK)

Cho hình 82 SGK, trong đó $MD // AB$ và $ME//AC$. Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I.

Giải



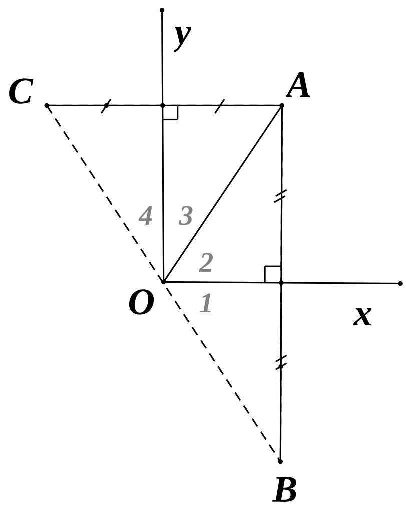
$MD // AE$ và $ME//AD \Rightarrow AEMD$ là hình bình hành.

I là trung điểm của DE nên I cũng là trung điểm của AM, do đó A đối xứng với M qua I.

Ví dụ 4. (Bài 54 SGK)

Cho góc vuông xOy, điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox, gọi C là điểm đối xứng với A qua Oy. Chứng minh rằng điểm B đối xứng với điểm C qua O.

Giải



Cách 1. Ox là đường trung trực của $AB \Rightarrow OA = OB$.

Oy là đường trung trực của $AC \Rightarrow OA = OC$.

Suy ra: $OB = OC$. (1)

ΔAOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$;

ΔAOB cân tại $O \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \dfrac{\widehat{AOC}}{2}$.

$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2\left(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3\right) = 2.90^\circ = 180^\circ \Rightarrow B, O, C$ thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra B đối xứng C với qua O.

Cách 2. A đối xứng với B qua Ox và O nằm trên Ox nên OA đối xứng với OB qua Ox, suy ra $OA = OB, \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

A đối xứng với C qua Oy và O nằm trên Oy nên OA đối xứng với OC qua Oy, suy ra $OA = OC, \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$.

Do đó: $OB = OC$. (1)

Và $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} = 2\left(\widehat{O}_2 + \widehat{O}_3\right) = 2.90^\circ = 180^\circ$ suy ra ba điểm B, O, C thẳng hàng.

Từ (1) và (2) suy ra B đối xứng C với qua O.

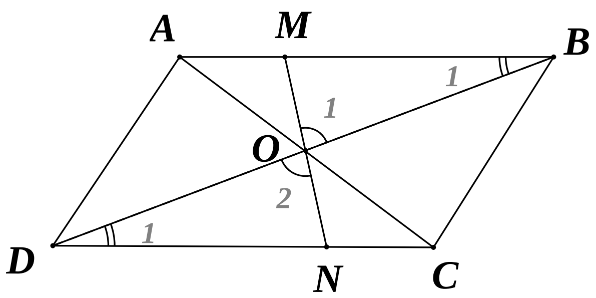
Ví dụ 5. (Bài 55 SGK)

Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi O qua cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua O.

Giải

$\Delta BOM = \Delta DON\,(g.c.g) \Rightarrow OM = ON$.

O là trung điểm của MN nên M đối xứng với N qua O.



Dạng 3. TÌM TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH, TÌM HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG

Phương pháp giải

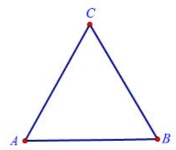
Nhớ lại định nghĩa tâm đối xứng của một hình, định lí về tâm đối xứng của hình bình hành.

Ví dụ 6. (Bài 56 SGK)

Trong các hình sau đây, hình nào có tâm đối xứng?

a) Đoạn thẳng AB;
b) Tam giác đều ABC;
c) Biển cấm đi ngược chiều;
d) Biển chỉ hướng đi vòng tranh chướng ngại vật.

a)



b)

c)

d)

Giải

Hình a) và c) có tâm đối xứng.

Ví dụ 7. (Bài 7 SGK)

Các câu sau đây đúng hay sai?

a) Tâm đối xứng của một đường thẳng là điểm bất kì của đường thẳng đó.
b) Trọng tâm của một tam giác là tâm đối xứng của tam giác đó.
c) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một điểm thì có chu vi bằng nhau.

Giải

Câu a) và câu c) đúng. Câu b) sai.

Dạng 4. DỰNG HÌNH CÓ SỬ DỤNG ĐỐI XỨNG TÂM

Phương pháp giải

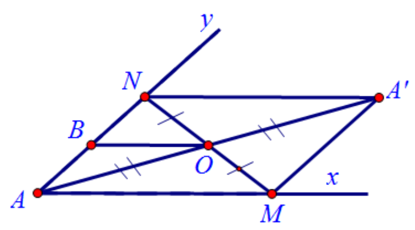
Chú ý đến hình có tâm đối xứng. Trong nhiều bài toán, cần vẽ thêm điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một tâm.

Ví dụ 8. Cho góc xAy khác góc bẹt và O là điểm trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng qua O cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự tại hai điểm M, N sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Giải

Cách 1.

Phân tích: Giả sử đã dựng được đoạn thẳng MN. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O. Ta có $AMA'N$ là hình bình hành. Từ đó suy ra cách dựng.



Cách dựng:

- Dựng A' đối xứng với A qua O.
- Qua A dựng đường thẳng song song với Ax, cắt Ay ở N.
- Qua A dựng đường thẳng song song với Ay, cắt Ax ở M. MN là đường thẳng phải dựng.

Chứng minh: Hình bình hành $AMA'N$ có O là trung điểm của AA' nên O là trung điểm của MN.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Cách 2.

- Qua O dựng đường thẳng song song với Ax, cắt Ay ở B.
- Dựng N đối xứng với A qua B.
- NO cắt Ax ở M.

C. LUYỆN TẬP

Bài 1. (Dạng 1). Cho điểm A trên mặt phẳng tọa độ có tọa độ $(2;1)$. Vẽ điểm B đối xứng với A qua trục hoành, điểm C đối xứng với A qua trục tung. Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm B và C đối với gốc tọa độ O?

Bài 2. (Dạng 2). Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi H là điểm đối xứng với B qua D, gọi K là điểm đối xứng với C qua E. Chứng minh rằng điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A.

Bài 3. (Dạng 2). Cho tam giác ABC. Vẽ điểm D đối xứng với B qua A, vẽ điểm E đối xứng với C qua A. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. MA cắt DE ở N. Chứng minh rằng $MC = NE$.

Bài 4. (Dạng 2). Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CA. Gọi A', B', C' theo thứ tự là điểm đối xứng với M qua F, E, D. Chứng minh $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$.

Bài 5. (Dạng 2). Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi D đối xứng với A qua B, I đối xứng với A qua M, E đối xứng với A qua C. Chứng minh rằng D đối xứng với E qua I.

Bài 6. **(Dạng 2).** Cho hình bình hành $ABCD$, các đường chéo cắt nhau tại O. Lấy M trên cạnh AD, lấy N trên cạnh BC sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng M đối xứng với N qua O.

Bài 7. **(Dạng 3).** Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = CG$, $BF = DH$.

a) Xác định tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$.

b) Chứng minh $EFGH$ là hình bình hành và tìm tâm đối xứng của nó.

c) O còn là tâm đối xứng của hình bình hành nào?

Bài 8. **(Dạng 4).** Cho tam giác ABC, điểm D nằm giữa B và C. Gọi O là trung điểm của AD. Dựng các điểm E thuộc cạnh AB, F thuộc cạnh AC sao cho E đối xứng với F qua O.

Bài 9. **(Dạng 4).** Cho hai điểm A và B nằm trong góc xOy khác góc bẹt. dựng các điểm M thuộc tia Ox, N thuộc tia Oy sao cho $ANBM$ là hình bình hành.

Bài 10. **(Dạng 4).** Cho hình bình hành $ABCD$, điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh AB. Dựng điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $EFGH$ là hình bình hành.

BÀI 9. HÌNH CHỮ NHẬT

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. **Định nghĩa.** Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

$ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD\ la\ tu\ giac \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \end{cases}.$

2. **Tính chất**

– Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, hình thang cân.

– Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. **Dấu hiệu nhận biết.**

– Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

– Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

– Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

– Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. **Áp dụng vào tam giác.**

– Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nữa cạnh huyền.

– Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nữa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

A. CÁC DẠNG TOÁN

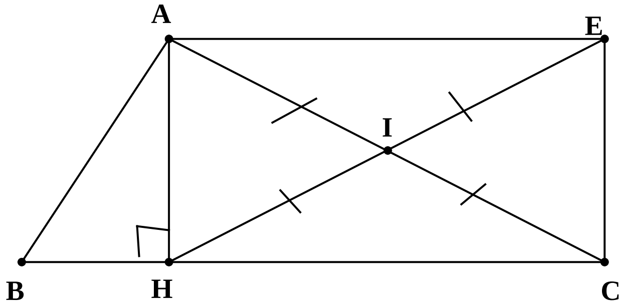
Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH CHỮ NHẬT

Phương pháp giải

Sử dụng các dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

Ví dụ 1. **(Bài 61 SGK).** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Tứ giác $AHCE$ là hình gì? Vì sao?

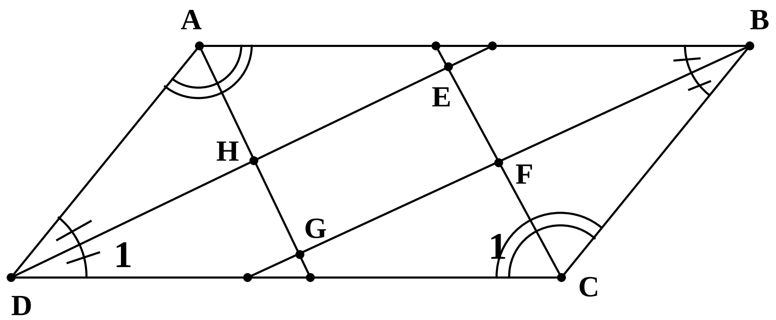
Lời giải



$AHCE$ là hình bình hành vì các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Hình bình hành $AHCE$ là hình chữ nhật vì hai đường chéo bằng nhau (hoặc vì có $\widehat{AHC} = 90°$).

Ví dụ 2. **(Bài 64 SGK).** Cho hình bình hành $ABCD$. Các tia phân giác của góc A, B, C, D cắt nhau như trên hình vẽ. chứng minh rằng $EFGH$ là hình chữ nhật.

Lời giải

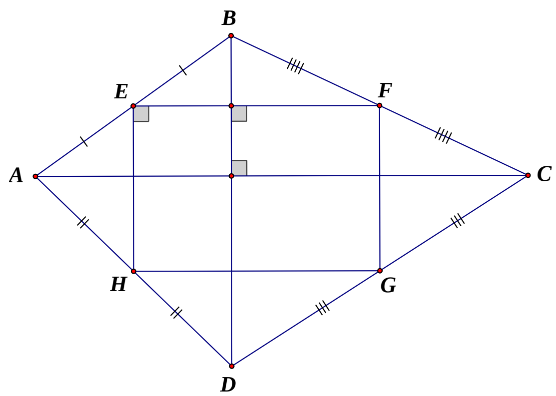


ΔDEC có $\widehat{D_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{D} + \widehat{C}}{2} = 90°$ nên $\widehat{E} = 90°$.

Tương tự: $\widehat{F} = 90°$, $\widehat{G} = 90°$. Tứ giác $EFGH$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Ví dụ 3. **(Bài 65 SGK).** Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G

H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?



Giải

EF là đường trung bình của ΔABC nên EF // AC ,
HG là đườngtrung bình của ΔADC nên HG // AC.
Suy ra EF // HG.
Chứng minh tương tự EF // FG. Do đó EFGH là hình bình hành .
EF // AC và $BD \perp AC$ nên $BD \perp EF$
EH // BD và $BD \perp EF$ nên $EH \perp EF$
Hình bình hành EFGH có $\widehat{E} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.

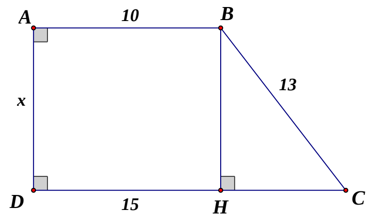
Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH CHỮ NHẬT ĐỂ CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ BẰNG NHAU, SONG SONG, THẲNG HÀNG , VUÔNG GÓC.

Phương pháp giải

Áp dụng tính chất của hình chữ nhật.

Ví dụ 4. (bài 63 sgk)

Tìm x trên hình 90 SGK.



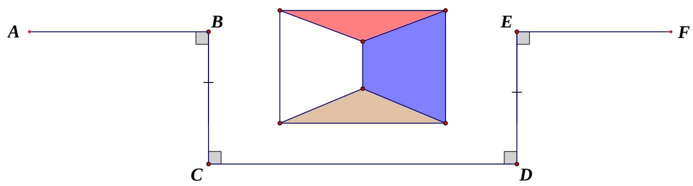
Giải

Kẻ $BH \perp CD$. Do $HC = 5$ nên $BH = 12$.

Vậy $x = 12$.

Ví dụ 5. (Bài 66 SGK)

***Đố*.** Một đội công nhân đang trồng cây trên một đoạn đường AB thì gặp chướng ngại vật che lấp tầm nhìn (H.92 SGK). Đội đa dựng các điểm C, D, E như trên hình vẽ rồi trồng cây tiếp trên đoạn đường EF vuông góc với DE. Vì sao AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng ?



Giải

BCDE là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật. Do đó $\widehat{CBE} = 90°, \widehat{BED} = 90°$, suy ra AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng.

Dạng 3. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HÌNH CHỮ NHẬT

Phương pháp giải

Áp dụng các tính chất về đối xứng trục và đối xứng tâm

Ví dụ 6. (Bài 59 SGK)

Chứng minh rằng :

a) Giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật là tam đối xứng của hình.

b) hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối của hình chữ nhật là hai trục đối xứng của hình.

Giải

a) Hình bình hành nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng. Hình chữ nhật là một hình bình hành. Do đó giao điểm hai đường héo của hình chữ nhật là tâm đối xứng của hình.

b) Hình thang cân nhận đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy làm trục đối xứng. Hình chữ nhật là một hình thang cân có hai cạnh đáy là hai cạnh đối của hình chữ nhật. Do đó đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh đối của hình chữ nhật là trục đối xứng của hình.

Dạng 4. ÁP DỤNG VÀO TAM GIÁC.

Phương pháp giải.

Sử dụng định lí về tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau. Sử dụng quan

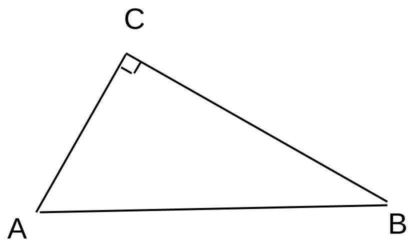
hệ về độ dài của đường trung tuyến và cạnh tương ứng để chứng minh tam giác vuông.

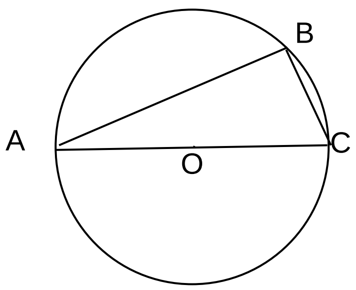
Ví dụ 7. (Bài 62 SGK)

Các câu sau đúng hay sai?

a) Nếu tam giác ABC vuông tại C thì điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (hình 88 SGK)

b) Nếu điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (C khác A và B) thì tam giác ABC vuông tại C (Hình 89 SGK).





Giải

Các câu a) và b) đều đúng: Giải thích:

a) Gọi O là trung điểm của AB. Ta có CO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB nên $OC = OA = OB$. Do đó C thuộc đường tròn có đường kính là AB.

b) Ta có $OC = OA = OB$. Tam giác CAB có đường trung tuyến CO bằng $\dfrac{AB}{2}$ nên $\widehat{ACB} = 90^0$

Dạng 5. DỰNG HÌNH CHỮ NHẬT

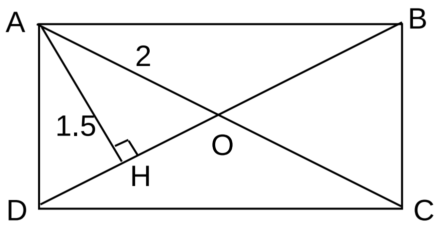
Phương pháp giải

Khi gặp bài toán yêu cầu dựng hình chữ nhật ta thường đưa về dựng tam giác

Ví dụ 8. Dựng hình chữ nhật $ABCD$ biết $BD = 4cm$, khoảng cách từ A đến BD bằng 1,5cm.

Giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Dựng ΔAOH (cạnh huyền*cạnh góc vuông). Sau đó dựng $B,\ D, C$



C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Chứng minh rằng các tia phân giác các góc của hình bình hành cắt nhau tạo thành một hình chữ nhật, và đường chéo của hình chữ nhật này song song với cạnh của hình bình hành.

2. (Dạng 2). Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tính các góc của tam giác ABD, biết $\widehat{AOD} = 50^0$.

3. (Dạng 2). Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A}=\widehat{B}=90^0$, $AB=4cm,$ $AD=15cm,\ BC=17cm$. Tính CD.

4. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của $DE,\ BE,\ BC,\ CD$. Chứng minh rằng $MP=NQ$.

5. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M thuộc cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC.

a) Xác định dạng tứ giác $ADME$.

b) Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh A, I, M thẳng hàng.

c) Điểm M ở vị trí nào trên BC thì DE có độ dài nhỏ nhất? Tính độ dài nhỏ nhất đó nếu $AB=15cm,\ AC=20cm$.

6. (Dạng 2). Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC, I là trung điểm của AE, M là trung điểm của CD.

a) Gọi H là trung điểm của BE. Chứng minh rằng $CH//IM$.

b) Tính số đo góc $\widehat{BIM}$.

7. (Dạng 3). a) Chứng minh rằng nếu một tứ giác có hai trục đối xứng vuông góc với nhau và không đi qua đỉnh các tứ giác thì tứ giác đó là hình chữ nhật.

b) Dùng mệnh đề trên để kiểm tra xem một tờ giấy hình tứ giác có phải là một hình chữ nhật hay không.

8. (Dạng 4). Cho hình thang cân $ABCD$, đường cao AH. Gọi E, F theo tứ thự là trung điểm của các cạnh bên $AD,\ BC$. Chứng minh rằng $EFCH$ là hình bình hành.

9. (Dạng 4). Cho tam giác ABC $(AB<AC)$ có đường cao AH. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh $BC,\ CA,\ AB$. Chứng minh rằng;

a) NP là đường trung trực của AH .

b) Tứ giác $MNPH$ là hình thang cân.

10. (Dạng 4). Cho tam giác ABC, các đường cao BD và CE. Gọi M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ B, C đến DE. Gọi I là trung điểm của DE, K là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) KI vuông góc với ED.

b) $EM=DN$.

11. (Dạng 4). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của $AB,\ AC$. Chứng minh rằng $\widehat{IHK}=90^0$.

12. (Dạng 2 và 4). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HD\perp AB,\ HE\perp AC\ (D\in B,\ E\in AC)$

a) Chứng minh rằng $\widehat{C}=\widehat{ADE}$

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM\perp DE$.

13. (Dạng 1, 2 và 4). Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhai tại H. Gọi I, K, R theo thứ tự là trung điểm của HA, HB, HC. Mọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

a) $MNIK$, $PNRK$ là các hình chữ nhật.

b) Sáu điểm P, N, R, K, M, I thuộc cùng một đường tròn.

c) Ba điểm D, E, F cùng thuộc đường tròn nói trên.

14. (Dạng 5). Dựng hình chữ nhật biết đường chéo bằng $3cm$, góc nhọn tạo bởi hai đường chéo bằng $50°$.

15. (Dạng 5). Dựng hình chữ nhật có chu vi bằng $7\,cm$, góc tạo bởi hai đường chéo bằng $70°$.

Bài 10. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

2. Tính chất của các điểm cách đều một đường thẳng cho trước:

Tập hợp các điểm cách đều một đường thẳng cố định một khoảng bằng h không đổi là hai đường thẳng song song với đường thẳng đó và cách đều đường thẳng đó một khoảng bằng h.

3. Đường thẳng song song cách đều:

- Nếu các đường thẳng song song cách đều cắt một đường thẳng thì chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.
- Nếu các đường thẳng song song cắt một đường thẳng và chúng chắn trên đường thẳng đó các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau thì chúng song song cách đều.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG CÁCH ĐỀU

Phương pháp giải

Sử dụng các định lí trong bài khi có nhiều đường thẳng song song.

Ví dụ 1. (Bài 67 SGK)

Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kì. Trên tia Ax lấy các điểm C, D, E sao cho $AC = CD = DE$ (H.97 SGK). Kẻ đoạn EB. Qua C, D kẻ các đường thẳng song song với EB. Chứng minh rằng đoạn thẳng AB bị chia ra làm ba phần bằng nhau.

Giải

Cách 1. Dùng tính chất đường trung bình của tam giác và đường trung bình của hình thang.

Cách 2. Vẽ đường thẳng d đi qua A và song song với EB.

Ta có: $AC = CD = DE$ nên các đường thẳng d, CC', DD', EB là các đường thẳng song song cách đều. Suy ra: $AC' = C'D' = D'B$.

Dạng 2. CHỨNG TỎ MỘT ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp giải

Các điểm cách đường thẳng b cố định một khoảng bằng h thì nằm trên hai đường thẳng song song với b và cách b một khoảng bằng h.

Ví dụ 2. (Bài 68 SGK)

Cho điểm A nằm bên ngoài đường thẳng d và có khoảng cách đến d bằng $2cm$. Lấy B là một điểm bất kì thuộc đường thẳng d. Gọi C là điểm đối xứng với điểm A qua điểm B. Khi điểm B di chuyển trên đường thẳng d thì điểm C di chuyển trên đường thẳng nào?

Giải

Kẻ AH và CK vuông góc với d. $\Delta AHB = \Delta CKB$ (Cạnh huyền- Góc nhọn)

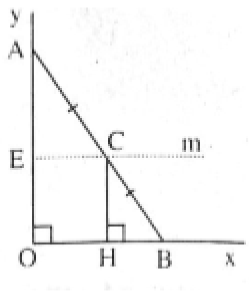
$\Rightarrow CK = AH = 2cm$. Điểm C cách đường thẳng d cố định một khoảng không đổi $2cm$ nên C di chuyển trên đường thẳng m song song với d và cách d một khoảng bằng 2cm.

Ví dụ 3. (Bài 70 SGK)

Cho góc vuông $\widehat{xOy}$, điểm A thuộc tia Oy sao cho $OA = 2$ cm. Lấy B là một điểm bất kì thuộc tia Ox. Gọi C là trung điểm của AB. Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên đường nào?

Giải

Cách 1. Kẻ $CH \perp Ox$, chứng minh rằng $CH = 1$cm. Điểm C di chuyển trên tia Em song song với Ox và cách Ox một khoảng bằng 1cm.



Cách 2. Chứng minh rằng $CA = CO$. Điểm C di chuyển trên tia Em thuộc đường trung trực của OA.

Ví dụ 4. (Bài 71 SGK)

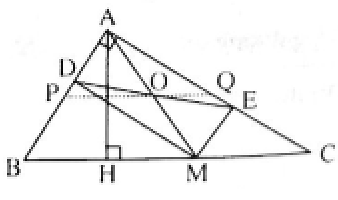
Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Gọi MD là đường vuông góc kẻ từ M đến AB. ME là đường vuông góc kẻ từ M đến AC. O là trung điểm của DE.

a) Chứng minh rằng M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

b) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài nhỏ nhất?

Giải

a) $AEMD$ là hình chữ nhật, O là trung điểm của đường chéo DE nên O cũng là trung điểm của đường chéo AM. Vậy A, O, M thẳng hàng.



b) Kẻ $AH \perp BC$. Điểm O di chuyển trên đoạn thẳng PQ là đường trung bình của ΔABC. Có thể chứng minh bằng hai cách như bài 77.

c) Điểm M ở vị trí H (M trùng H) thì AM có độ dài nhỏ nhất.

Dạng 3. PHÁT BIỂU MỘT TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp giải

Nhớ lại các tập hợp điểm đã học về đường tròn, tia phân giác của một góc, đường trung trực của một đoạn thẳng, đường thẳng song song với một đường thẳng.

Ví dụ 5. (Bài 69 SGK)

Ghép mỗi ý (1), (2), (3), (4) với một trong các ý (5), (6), (7), (8) để được một khẳng định đúng:

(1) Tập hợp cá điểm cách điểm A cố định một khoảng $3\,\text{cm}$.

(2) Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng AB cố định.

(3) Tập hợp các điểm nằm trong góc $\widehat{xOy}$ và cách đều hai cạnh của góc đó.

(4) Tập hợp các điểm cách đều đường thẳng a cố định một khoảng $3\,\text{cm}$.

(5) là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

(6) là hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng $3\,\text{cm}$.

(7) là đường tròn tâm A bán kính $3\,\text{cm}$.

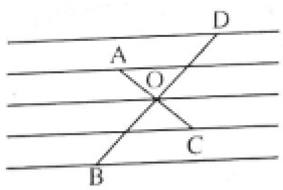
(8) là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

Giải

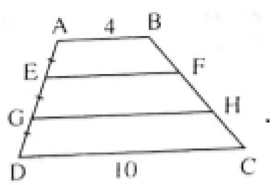
Ghép các ý: (1) với (7); (2) với (5); (3) với (8); (4) với (6).

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Trên tờ giấy có các dòng kẻ song song cách đều, bạn Tuấn dùng thước kẻ hai đoạn thẳng AC, BD cắt nhau tại điểm O thuộc một dòng kẻ như trên hình bên. Vì sao $ABCD$ là một hình bình hành?



2. (Dạng 1). Tính các độ dài EF, GH trên hình bên, biết rằng $AB // EF // GH // CD$, $AB = 4$, $CD = 12, AE = EG = GD$.



3. (Dạng 2). Cho đoạn thẳng BC cố định, điểm A chuyển động trên đường thẳng d song song với BC và cách BC là 3cm. Trọng tâm G của tam giác ABC chuyển động trên đường nào?

4. (Dạng 2). Cho tam giác ABC, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Kẻ $MD//AC, ME//AB (D \in AB, E \in AC)$. Trung điểm I của DE chuyển động trên đường nào?

5. (Dạng 2). Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC sao cho $AD = CE$. Trung điểm I của DE chuyển động trên đường nào?

6. (Dạng 2). Cho đoạn thẳng AB, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng ấy. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMC, BMD. Trung điểm I của CD chuyển động trên đường nào?

7. (Dạng 2). Cho đoạn thẳng AB, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng ấy. Vẽ về một phía của AB các tam giác đều AMC vuông cân tại C, BMD vuông cân tại D. Trung điểm I của CD chuyển động trên đường nào?

8. (Dạng 3). Điền vào chỗ trống (…):

a) Tập hợp đỉnh A của tam giác cân ABC có đáy BC cố định là…

b) Tập hợp đỉnh C của các tam giác ABC vuông có cạnh huyền AB cố định là…

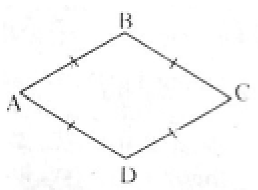
Tập hợp giao điểm của các đường chéo của các hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh CD cố định là…

§11. HÌNH THOI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

$ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ laø töù giaùc} \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$



2. Tính chất:

- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
- Trong hình thoi, hai đường chéo vuông góc với nhau và là đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: NHẬN BIẾT HÌNH THOI

Phương pháp giải

Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình thoi.

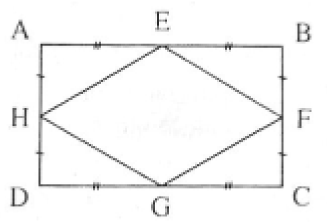
Ví dụ 1. (Bài 75 SGK)

Chứng minh rằng các trung điểm của bốn cạnh của một hình chữ nhật là các đỉnh của một hình thoi.

Giải

Bốn tam giác vuông AEH, BEF, CGF, DGH bằng nhau nên: $EH = EF = GF = GH$.

Do đó $EFGH$ là hình thoi.



Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH THOI ĐỂ TÍNH TOÁN, CHỨNG MINH CÁC ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU, CÁC GÓC BẰNG NHAU, CÁC ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Phương pháp giải

Áp dụng các tính chất của hình thoi.

Ví dụ 2. (Bài 74 SGK)

Hai đường chéo của hình thoi bằng 8cm và 10 cm. Cạnh của hình thoi bằng giá trị nào trong các giá trị sau:

(A): 6cm; (B): $\sqrt{41}$ cm; (C): $\sqrt{164}$ cm; (D): 9cm?

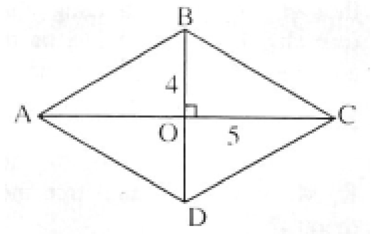
Giải

Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình thoi $ABCD$. $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

$\mathrm{OB} = \dfrac{\mathrm{BD}}{2} = 4\mathrm{cm}$; $\mathrm{OC} = \dfrac{\mathrm{AC}}{2} = 5\mathrm{cm}$

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 4^2 + 5^2 = 41$

Nên $BC = \sqrt{41}cm$. Vậy câu trả lời đúng là B.



Ví dụ 3. (Bài 76 SGK)

Chứng minh rằng các trung điểm của bốn cạnh của một hình thoi là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Giải

EF là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow EF // BC$

HG là đường trung bình của $\Delta ADC \Rightarrow HG // AC$. Suy ra $EF // HG$.

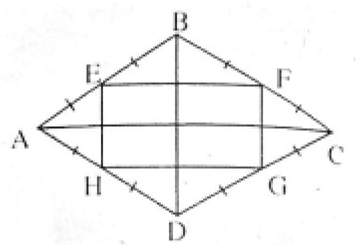
Chứng minh tương tự $EH // FG$.

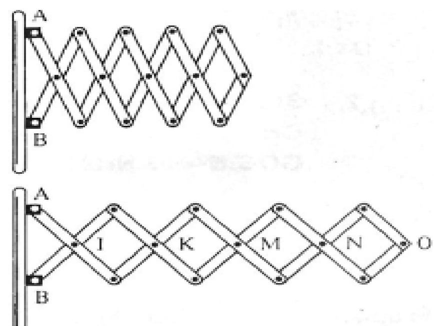
Do đó $EFGH$ là hình bình hành.

$EF // AC$ và $BD \perp AC$ nên $BD \perp EF$.

$EH // BD$ và $EF \perp BD$ nên $EF \perp EH$.

Hình bình hành $EFGH$ có $\widehat{E} = 90^0$ nên là hình chữ nhật.





Hình 103 SGK

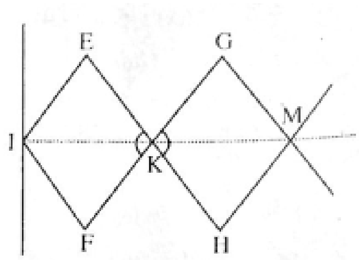
Ví dụ 4. (Bài 78 SGK)

Hình 103 SGK biểu diễn một phần của cửa xếp, gồm những thanh kim loại dài bằng nhau và được liên kết với nhau bởi các chốt tại hai đầu và tại trung điểm. Vì sao tại mỗi vị trí của cửa xếp, các tứ giác trên hình vẽ đều là hình thoi. Các điểm chốt I, K, M, N, O nằm trên một đường thẳng?

Giải

Các tứ giác $IEKF, KGMH$ là hình thoi vì có bốn cạnh bằng nhau. Theo tính chất hình thoi, KI là tia phân giác của góc EKF, KM là ti phân giác của góc GKH. Do đó ta chứng minh được I, K, M thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, các điểm I, K, M, N, O cùng nằm trên một đường thẳng.



Dạng 3. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HÌNH THOI

Phương pháp giải

Vận dụng tính chất đối xứng trục và đối xứng tâm đã học.

Ví dụ 5. (Bài 77 SGK)

Chứng minh rằng:

a) Giao điểm hai đường chéo của hình thoi là tâm đối xứng của hình thoi.

b) Hai đường chéo của hình thoi là hai trục đối xứng của hình thoi.

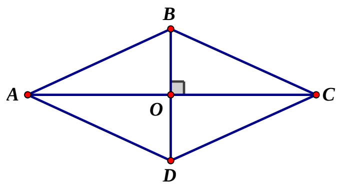
Giải

a) Hình bình hành nhận giao điểm hai đường chéo làm tâm đối xứng. Hình thoi cũng là một hình bình hành nên giao điểm hai đường chéo hình thoi là tâm đối xứng của hình.

b) BD là đường trung trực của AC nên A đối xứng với C qua BD: B và D cũng đối xứng với chính nó qua BD.

Do đó BD là trục đối xứng của hình thoi.

Tương tự AC cũng là trục đối xứng của hình thoi.



Dạng 4. DỰNG HÌNH THOI

Phương pháp giải

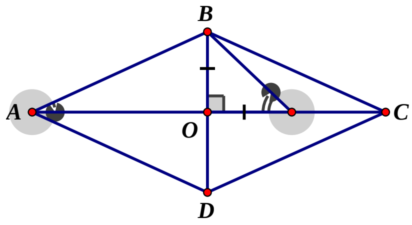
Để dựng hình thoi ta thường đưa về dựng tam giác.

Ví dụ 6. (Bài 77 SGK)

Dựng hình thoi biết góc tạo bởi hai cạnh là 60^0 và tổng độ dài hai đường chéo là 8cm.

Giải

Giả sử đã dựng được hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^0$, $AC + BD = 8$cm. Gọi O là giao điểm 2 đường chéo, ta có: $AO + OB = 4$cm. Trên tia OC lấy điểm E sao cho $OE = OB$, thế thì $AE = AO + OE = AO + OB = 4$cm.



ΔBOE vuông cân nên $\widehat{BEO} = 45^0$, ΔBAE dựng được (g.c.g)

Điểm O là giao điểm của AE và đường trung trực của BE. Từ đó dựng tiếp D và C.

C. LUYỆN TẬP

1. (Dạng 1). Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình thang cân là các đỉnh của một hình thoi.

2. (Dạng 1). Cho tam giác ABC. Qua điểm D thuộc cạnh BC, kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB theo thứ tự ở E và F.

a) Tứ giác $AEDF$ là hình gì?

b) Điểm D ở vị trí nào trên BC thì $AEDF$ là hình thoi?

3. (Dang 1). Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$, các tia DA và CB cắt nhau tại E, các tia AB và DC cắt nhau ở F.

a) Chứng minh rằng $\widehat{E} = \widehat{F}$.

b) Tia phân giác của góc E cắt AB, CD theo thứ tự ở G và H. Tia phân giác của góc F cắt BC, AD theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng $GKHI$ là hình thoi.

4. (Dạng 1). Cho tam giác đều ABC. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC. Gọi E, F là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC. Gọi I là trung điểm của AM, D là trung điểm của BC.

a) Tính số đo các góc DIE, DIF.

b) Chứng minh rằng $DEIF$ là hình thoi.

5. (Dạng 2). Tính chu vi của hình thoi, biết các đường chéo bằng 16cm và 30cm.

6. (Dạng 2). Chứng minh rằng các đường cao của hình thoi bằng nhau.

7. (Dạng 2). Cho hình thoi $ABCD$ trong đó đường vuông góc kẻ từ dỉnh góc từ A đến cạnh BC chia đôi cạnh đó. Tính góc của hình thoi.

8. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC. Lấy điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $BD = CE$. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là trung điểm của DE, BC, BE, CD. Chứng minh rằng IK vuông góc với MN.

9. (Dạng 2). Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

10. (Dạng 2). Hình thoi $ABCD$ có đường cao bằng a, cạnh bằng $2a$. Tính các góc của hình thoi, biết rằng $\widehat{A} > \widehat{B}$

11. (Dạng 2). Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^o$. Trên cạnh DA, DC lấy các điểm E, F sao cho $DE = CF$. Chứng minh rằng tam giác BEF là tam giác đều.

12. (Dạng 1 và 2). Cho hình thoi $ABCD$. Từ đỉnh góc tù B, kẻ các đường vuông góc BE, BF đến AD, DC cắt AC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng $BMDN$ là hình thoi.

13. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC, lấy các điểm D, E sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của DE, BC, BE, CD.

a) Tứ giác $MINK$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi G, H là giao điểm của IK với AB, AC. Chứng minh rằng tam giác AGH là tam giác cân.

14. (Dạng 1 và 2). Cho góc $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Dùng thước có hai lề song song, đặt một lề trùng với Oy và kẻ theo lề kia đường thẳng d_1, đặt một lề trùng với Oy và kẻ theo lề kia đường thẳng d_2 sao cho d_1 cắt d_2 tại một điểm B nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Chứng minh rằng OB là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

15. (Dạng 3). Áp dụng tính chất đối xứng qua trục của hình thoi, hãy nêu cách gấp giấy rồi dùng kéo cắt để nhận được một hình thoi.

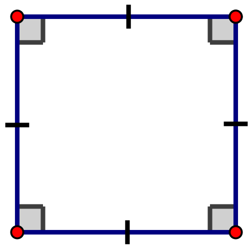
16. (Dạng 4). Dựng hình thoi $ABCD$ biết cạnh bằng 2cm, đường cao bằng $1,5$cm.

§11. HÌNH VUÔNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa. Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

ABCD là hình vuông $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ laøtöù giaùc} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90^o \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$



2. Tính chất. Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. NHẬN BIẾT HÌNH VUÔNG

Phương pháp giải

Sử dụng dấu hiệu nhận biết hình vuông.

Có hai cách chứng minh:

Cách 1: Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật có thêm một trong các dấu hiệu: Hai cạnh kề bằng nhau, hoặc hai đường chéo vuông góc, hoặc một đường chéo là đường phân giác của một góc.

Cách 2. Chứng minh tứ giác là hình thoi có thêm một trong các dấu hiệu: Một góc vuông, hoặc hai đường chéo bằng nhau.

Ví dụ 1. (Bài 81 SGK)

Cho hình 106 SGK. Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

Giải

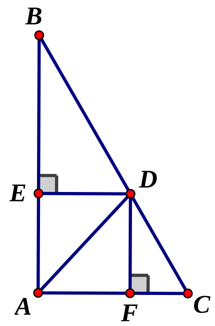
Tứ giác $AEDF$ là hình vuông.

Giải thích:

$AEDF$ là hình bình hành (theo định nghĩa).

Hình bình hành $AEDF$ có AD là phân giác của góc A nên là hình thoi.

Hình thoi $AEDF$ có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình vuông.



Ví dụ 2. (Bài 83 SGK)

Các câu sau đúng hay sai?

a) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.

b) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình thoi.

c) Hình thoi là tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau.

d) Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

e) Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

Giải

Các câu a và d sai. Các câu b, c, e đúng.

Ví dụ 3. (Bài 85 SGK)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác $ADFE$ là hình gì? Vì sao?

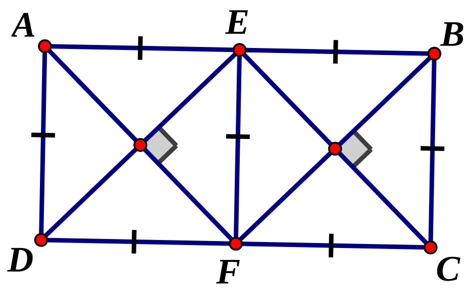
b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì? Vì sao?

Giải

a) Tứ giác $ADFE$ là hình vuông.

Giải thích:

Tứ giác $ADFE$ có $AE//DF$, $AE = DF$ nên là hình bình hành. Hình bình hành $ADFE$ có $\widehat{A} = 90^o$ nên là hình chữ nhật, lại có $AE = AD$ nên là hình vuông.



b) Tứ giác $EMFN$ là hình vuông.

Giải thích: Tứ giác $DEBF$ có $EB//DF$, $EB = DF$ nên là hình bình hành, do đó $DE//BF$.
Tương tự $AF//EC$. Suy ra $EMFN$ là hình bình hành.

$ADFE$ là hình vuông (câu a) $\Rightarrow ME = MF, ME \perp MF$.

Hình bình hành $EMFN$ có $\widehat{M} = 90^o$ nên là hình chữ nhật, lại có ME = MF nên là hình vuông.

Dạng 2. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH VUÔNG ĐỂ CHỨNG MINH CÁC QUAN HỆ BẰNG NHAU, SONG SONG, THẲNG HÀNG, VUÔNG GÓC

Ví dụ 4. (Bài 79 SGK0

a) Một hình vuông có cạnh bằng 3cm. Đường chéo của hình vuông đó bằng: 6cm, $\sqrt{18}$cm, 5cm hay 4cm?

b) Đường chéo của một hình vuông bằng 2dm. Cạnh của hình vuông đó bằng: 1dm, $\frac{3}{2}dm, \sqrt{2}dm$ hay $\frac{4}{3}dm$?

Đáp số

a, $\sqrt{18}cm$ b, $\sqrt{2}dm$

Chú ý: Hình vuông cạnh a có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng d. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C, D trên đường thẳng d.

Chứng minh rằng:

$A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2 = a^2$

Giải

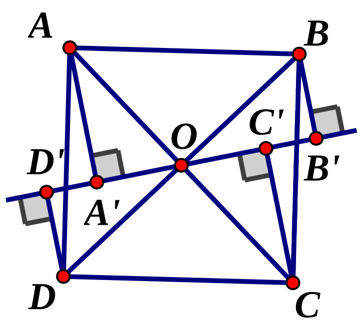
$\Delta AA'O = \Delta OD'D$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $A'O = D'D$. Do đó

$A'A^2 + D'D^2 = A'A^2 + A'O^2 = OA^2$ (1)

Tương tự: $B'B^2 + C'C^2 = OB^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2 = OA^2 + OB^2 = a^2$.



Dạng 3. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT HÌNH TRỞ THÀNH HÌNH VUÔNG

Phương pháp giải

- Bước phân tích: Giả sử hình B là hình vuông, ta tìm được hình A phải có thêm điều kiện M.
- Bước chứng minh: Khi hình A có thêm điều kiện M, chứng minh rằng B là hình vuông. Vẽ hình minh họa.

Trong trường hợp giải vắn tắt, chỉ cần nên điều kiện M ở bước phân tích mà bỏ qua giải thích vi sao tìm được điều kiện M đó.

Ví dụ 6. (Bài 84 SGK)

Cho tam giác ABC, D là điểm nằm giữa B và C. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC và AB theo thứ tự ở E và F.

a) Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình thoi?

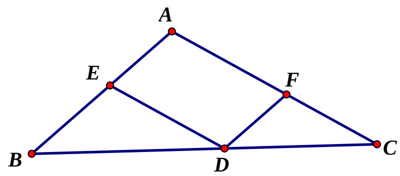
c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác $AEDF$ là hình gì? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình vuông?

Giải

a) Tứ giác $AEDF$ là hình bình hành (theo định nghĩa).

b) Nếu D là giao điểm của tia phân giác góc A với cạnh BC thì $AEDF$ là hình thoi.

c) Nếu ΔABC vuông tại A thì tứ giác $AEDF$ là hình gì? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác $AEDF$ là hình vuông?



Dạng 4. DỰNG HÌNH VUÔNG, CẮT HÌNH VUÔNG

Phương pháp giải

Đưa về dựng tam giác. Có trường hợp sử dụng tính đối xứng của hình vuông.

Ví dụ 7. (Bài 86 SGK)

Lấy một tờ giấy gấp làm tư rồi cắt chéo theo nhát cắt AB (H. 108 SGK). Sau khi mở tờ giấy ra, ta được một tứ giác. Tứ giác nhận được là hình gì? Vì sao? Nếu ta có $OA = OB$ thì tứ giác nhận được là hình gì?

Giải

Tứ giác nhận được là hình thoi vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau.

Nếu có thêm $OA = OB$ thì hình thoi nhận được có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

Ví dụ 8. Một mảnh vườn hình vuông được rào xung quanh. Sau một thời gian, bờ rào bị hỏng, chỉ còn lại hai cọc rào ở hai cạnh đối diện. Nếu biết được tâm của mảnh vườn, hỏi có thể xác định được các cạnh của mảnh vườn đó hay không?

Giải

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ có tâm O, điểm $M \in AD$, điểm $N \in BC$. Kẻ MO cắt BC ở M'. Do O là tâm đối xứng của hình vuông nên M' đối xứng với M qua O. Nếu M, N, O không thẳng hang thì M', N là hai điểm phân biệt, đường thẳng BC được xác định duy nhất, từ đó dễ dàng dựng các cạnh của hình vuông.

Trong trường hợp M, O, N thẳng hang thì M' trùng N, đường thẳng BC không xác định duy nhất, do đó không xác định được duy nhất các cạnh của hình vuông.

C. LUYỆN TẬP

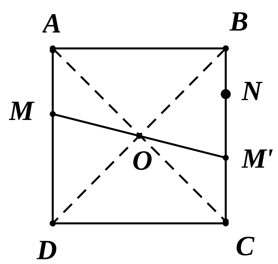
1. (Dạng 1). Cho hình thoi $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Các tia phân giác của bốn góc đỉnh O cắt các cạnh AB, BC, CD, DA theo thứ tự ở E, F, G, H. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình vuông.

2. (Dạng 1). Cho đoạn thẳng AM. Trên đường vuông góc với AM tại M, lấy điểm K sao cho $MK = \frac{1}{2}AM$. Kẻ MB vuông góc với $AK (B \in AK)$. Gọi C là điểm đối xứng với B qua M. Đường vuông góc với AB tại A và đường vuông góc với BC tại C cắt nhau ở D. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình vuông.

3. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $17cm$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH = 5cm$. Chứng minh rằng $EFGH$ là hình vuông và tính cạnh của hình vuông đó.

4. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc DAE cắt CD ở F. Gọi H là hình chiếu của F trên AE. Gọi K là giao điểm của FH và BC.

a) Tính độ dài AH.



b) Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc BAE.

c) Tính chu vi tam giác CFK.

5. (Dạng 2). Cho một hình chữ nhật có hai cạnh kề không bằng nhau. Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông có đường chéo song song với cạnh của hình chữ nhật.

6. (Dạng 1 và 2). Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác đó, vẽ các hình vuông $ABDE$ và $ACFH$. Gọi M, I, N, K theo thứ tự là trung điểm của EB, BC, CH, HE. Chứng minh rằng $MINK$ là hình vuông.

7. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy điểm E trên cạnh BC, điểm F trên cạnh CD sao cho $\widehat{EAF} = 45°$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho $DK = BE$.

a) Tính số đo của góc KAF.

b) Tính chu vi tam giác CEF.

8. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh CD. Tia phân giác của góc ABE cắt AD ở K. Chứng minh rằng $AK + CE = BE$.

9. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, G, F theo thứ tự là các điểm thuộc các cạnh AD, AB, BC. Qua G vẽ đường vuông góc với EF, cắt CD ở K. Chứng minh rằng $EF = GK$

10. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$ và E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, BC.

a) Chứng minh $CE \perp DF$.

b) Gọi M là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng $AM = AB$.

11. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$. Qua điểm M thuộc đường chéo AC, kẻ ME vuông góc với AD, MF vuông góc với CD. Chứng minh rằng:

a) BE vuông góc với AF.

b) BM vuông góc với EF.

c) Các đường thẳng BM, AF, CE đồng quy.

12. (Dạng 2). Cho hình vuông $ABCD$. Vẽ các điểm E, F nằm trong hình vuông sao cho tam giác ECD cân tại E, tam giác AFD cân tại F và các góc đáy của hai tam giác bằng $15°$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều.

b) Tam giác ABE là tam giác đều.

13. (Dạng 3). Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE$. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Tìm điều kiện của tam giác ABC để $MINK$ là hình vuông.

14. (Dạng 3). Cho tam giác ABC cân tại A, các đường trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G. Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm của GB, GC. Tam giác cân ABC có thêm điều kiện gì thì $DEHK$ là hình vuông?

15. (Dạng 4). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Dựng hình vuông $DEGH$ sao cho D thuộc cạnh AB, E thuộc cạnh AC, G và H thuộc cạnh BC.

16. (Dạng 4). Cho hình vuông $ABCD$. Dựng điểm E trên cạnh CD, điểm F trên cạnh BC sao cho tam giác AEF là tam giác đều.

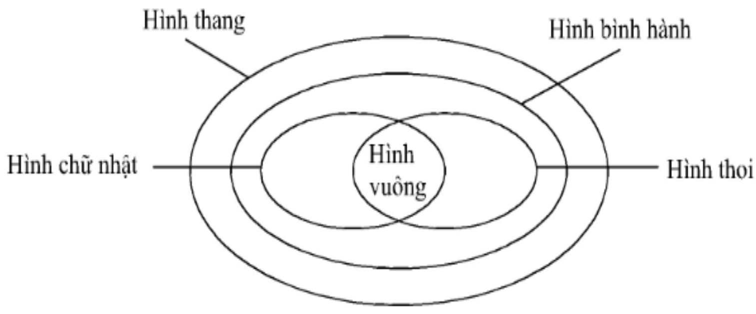
ÔN TẬP CHƯƠNG I

87. Sơ đồ ở hình 109 SGK biểu thị quan hệ giữa các tập hợp hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông. Dựa vào sơ đồ đó, hãy điền vào chỗ trống:

a) Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của tập hợp các hình …

b) Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của tập hợp các hình…

c) Giao của tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình ...



Hình 109 SGK

Trả lời

a) Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của các hình bình hành, hình thang.

b) Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của tập hợp các hình bình hành, hình thang.

c) Giao của tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình vuông.

88. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác $ABCD$ có điều kiện gì thì $EFGH$ là:

a) Hình chữ nhật?

b) Hình thoi?

c) Hình vuông?

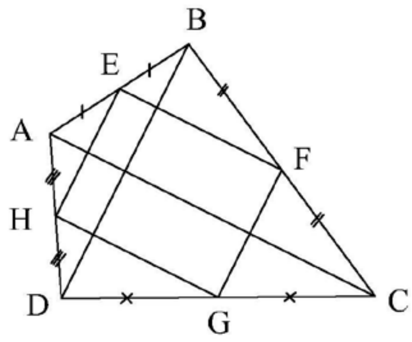
Giải

a) Hình bình hành $EFGH$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow EH \perp EF$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$ (vì $EH // BD, EH // AC$).

Điều kiện phải tìm: Các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.



b) Hình bình hành $EFGH$ là hình thoi

$\Leftrightarrow EF = EH$

$\Leftrightarrow AC = BD$ (vì $EF = \frac{1}{2}AC, EH = \frac{1}{2}BD$)

Điều kiện phải tìm: Các đường chéo AC và BD bằng nhau.

c) Hình bình hành $EFGH$ là hình vuông khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} EFGH \text{ lµ h×nh ch÷ nhËt} \\ EFGH \text{ lµ h×nh thoi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD \end{cases}$$

Điều kiện phải tìm: Các đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau.

89. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng với M qua D.

a) Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm M qua AB.

b) Các tứ giác $AEMC, AEBM$ là hình gì? Vì sao?

c) Cho $BC = 4cm$, tính chu vi tứ giác $AEBM$.

d) Tam giác vuông ABC có điều kiện gì thì $AEBM$ là hình vuông?

Giải

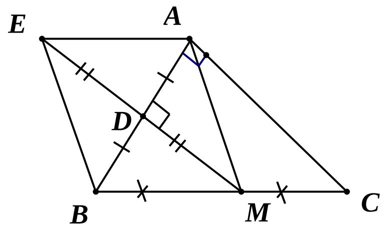
a) MD là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow MD // AC$. Do $AC \perp AB$ nên $MD \perp AB$.

Ta có AB là đường trung trực của ME nên E đối xứng với M qua AB.

b) Ta có $EM // AC, EM = AC$ (vì cùng bằng $2DM$) nên $AEMC$ là hình bình hành. Tứ giác $AEBM$ là hình thoi.

Giải thích: $AEBM$ là hình bình hành vì các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Hình bình hành $AEBM$ có $AB \perp EM$ nên là hình thoi.

c) $BC = 4cm \Rightarrow BM = 2cm$. Chu vi hình thoi $AEBM$ bằng $BM.4 = 2.4 = 8(cm)$.



d) *Cách 1.* Hình thoi $AEBM$ là hình vuông $\Leftrightarrow AB = EM \Leftrightarrow AB = AC$.

Vậy nếu ΔABC vuông có thêm điều kiện $AB = AC$ (tức là tam giác vuông cân tại A) thì $AEBM$ là hình vuông.

Cách 2. Hình thoi $AEBM$ là hình vuông $\Leftrightarrow AM \perp BM \Leftrightarrow \Delta ABC$ có đường trung tuyến AM là đường cao $\Leftrightarrow ABC$ cân tại A.

Vậy nếu ΔABC vuông có thêm điều kiện cân tại A thì $AEBM$ là hình vuông.

B. BÀI TẬP ÔN BỔ SUNG

1. Xác định dạng của tứ giác sau, nếu các cạnh có tính chất:

a) Hai cạnh đối song song và bằng nhau, hai cạnh kề vuông góc với nhau.

b) Các cạnh bằng nhau, hai cạnh kề vuông góc với nhau.

c) Hai cạnh đối này song song, hai cạnh đối kia bằng nhau.

2. Xác định dạng của tứ giác sau, nếu các đường chéo có tính chất:

a) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b) Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

c) Hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Cho tam giác cân tại A. Điền thêm vào hình vẽ để được:

a) Một hình chữ nhật và hai đường chéo của nó.

b) Một hình thoi và hai đường chéo của nó.

4. Cho hình bình hành $ABCD$ có $BC = 2AB$ và $\widehat{A} = 60°$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Gọi I là điểm đối xứng với A qua B.

a) Tứ giác $ABEF$ là hình gì ? Vì sao ?

b) Tứ giác $AIEF$ là hình gì ? Vì sao ?

c) Tứ giác $BICD$ là hình gì ? Vì sao ?

d) Tính số đo góc AED.

5. Cho hình thang $ABCD\left(AB//CD\right)$. Gọi E,F theo thứ tự là trung điểm của AB,CD. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N.

a) Tứ giác $EMFN$ là hình gì? Chứng minh.

b) Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì thì $EMFN$ là hình thoi?

c) Hình thang $ABCD$ có thêm điều kiện gì thì $EMFN$ là hình vuông?

6. Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F theo thứ tự là trung điểm của AB,BC,CA. Gọi M,N,P,Q theo thứ tự là trung điểm của AD,AF,EF,ED.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Tại sao?

b) Tam giác ABC có điền kiện gì thì $MNPQ$ là hình chữ nhật?

c) Tam giác ABC có điền kiện gì thì $MNPQ$ là hình thoi?

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.

a) Xác định dạng của các tứ giác $AEMF, AMBH, AMCK$.

b) Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.

c) Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì $AMEF$ là hình vuông?

8. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm M của AC.

a) Tứ giác $ADCE$ là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác $ABDM$ là hình gì? Vì sao?

c) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì $ADCE$ là hình vuông?

d) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì thì $ABDM$ là hình thang cân?

9. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ở ngoài hình bình hành các hình vuông có cạnh theo thứ tự là AB,BC,CD,DA có tâm (đối xứng) là E,F,G,H. Chứng minh rằng:

a) $\Delta HAE = \Delta FBE$.

b) $EFGH$ là hình vuông.

10. Cho hình vuông $ABCD$, điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc tia tới của tia DC sao cho $BE = DF$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với EF, cắt CD ở K. Qua E kẻ đường thẳng song song với CD, cắt AK ở I. Tứ giác $FIEK$ là hình gì? Vì sao?

11. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMNP$ và $BMLK$ có giao điểm các đường chéo theo thứ tự là C và D. Gọi G, Q là hình chiếu của C, D trên AB.

a) Tứ giác $CDQG$ là hình gì?

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tứ giác $OCMD$ là hình gì?

c) Tính khoảng cách từ trung điểm I của AB đến AB biết $AB = a$

d) Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì I di chuyển trên đường thẳng nào?