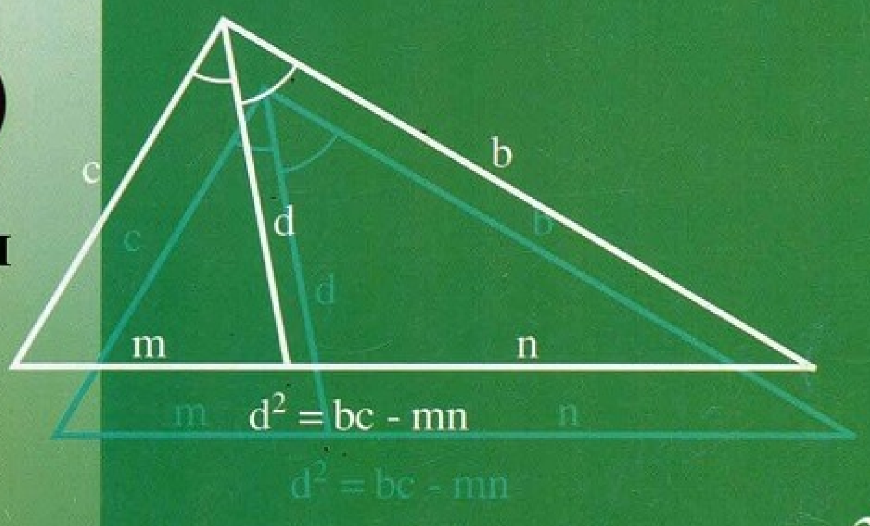
VŨ HỮU BÌNH

NÂNG CAO VÀ PHÁT TRIỂN TOÁN 8

TẬP HAI



$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§7. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Ta gọi hệ thức dạng $A(x) = B(x)$ là phương trình với ẩn x. Giải phương trình $A(x) = B(x)$ là tìm mọi giá trị của x để các giá trị tương ứng của hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ bằng nhau.

Tập hợp các giá trị đó gọi là tập nghiệm của phương trình đã cho, và thường được kí hiệu là S.

2. Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

3. Khi giải một phương trình, ta có thể :

– Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

– Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số khác 0.

Khi đó phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

4. Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

Khi giải phương trình có hệ số chữ trong mục này, ta cũng xét các phương trình có dạng $ax + b = 0$ trong đó $a = 0$.

Ví dụ 60. Giải phương trình sau, với a là hằng (ta còn gọi a là tham số) :

$$a(ax + 1) = x(a + 2) + 2.$$

Giải : Biến đổi phương trình đã cho thành :

$$a^2x - ax - 2x = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow x(a^2 - a - 2) = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)x = 2 - a. \qquad (1)$$

Kí hiệu S là tập nghiệm của phương trình đã cho, ta có :

Nếu $a \neq -1$, $a \neq 2$ thì $S = \left\{-\frac{1}{a+1}\right\}$.

Nếu $a = -1$ thì (1) có dạng $0x = 3$, vô nghiệm, $S = \varnothing$.

Nếu $a = 2$ thì (1) có dạng $0x = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x, $S = \mathbf{R}$.

Ví dụ 61. Giải phương trình với a là tham số :

$$\frac{x-a}{3} = \frac{x+3}{a} - 2. \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện xác định của phương trình : $a \neq 0$.

Biến đổi phương trình :

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow a(x-a) = 3(x+3) - 6a\\ &\Leftrightarrow ax - a^2 = 3x + 9 - 6a\\ &\Leftrightarrow ax - 3x = a^2 - 6a + 9\\ &\Leftrightarrow (a-3)x = (a-3)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

Nếu $a \neq 3$, phương trình có nghiệm $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng :

$0x = 0$, mọi x đều là nghiệm.

Kết luận :

Nếu $a \neq 0$; $a \neq 3$ thì (1) có một nghiệm : $x = a - 3$.

Nếu $a = 3$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $a = 0$ thì (1) vô nghiệm.

Ví dụ 62. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số a, b, c để phương trình sau có vô số nghiệm :

$$\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện xác định của phương trình :

$$a+b \neq 0 \; ; \; a+c \neq 0 \; ; \; b+c \neq 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-bc-ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0.$$

(1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0.$ (2)

Chẳng hạn ta chọn $a = 1$; $b = 1$. Để (2) xảy ra ta chọn c sao cho :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+c}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{1+c}=\frac{-1}{2} \Leftrightarrow c=-5.$$

Như vậy (1) có vô số nghiệm, chẳng hạn khi $a = 1$; $b = 1$; $c = -5$.

Ví dụ 63. Giải phương trình

$$\frac{x-a}{a+b}+\frac{x-b}{a-b}=\frac{2ab}{b^2-a^2} \text{ (a và b là hằng).}$$

Giải : Điều kiện xác định của phương trình : $a \neq \pm b$.

Biến đổi phương trình :

$$(x-a)(a-b)+(x-b)(a+b)=-2ab$$

$$\Leftrightarrow ax-bx-a^2+ab+ax+bx-ab-b^2=-2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ax=a^2+b^2-2ab$$

$$\Leftrightarrow 2ax=(a-b)^2. \quad (1)$$

Nếu $a \neq 0$ thì $x=\frac{(a-b)^2}{2a}$.

Nếu $a = 0$ thì (1) có dạng $0x = b^2$. Do $a \neq b$ nên $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận :

Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm b$ thì $S=\left\{\frac{(a-b)^2}{2a}\right\}$

Còn lại, $S = \varnothing$.

Bài tập

276. Giải các phương trình :

a) $(x+2)^3-(x-2)^3=12x(x-1)-8$;

b) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(5-x)^2$;

c) $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+(6x-3)(2x+1)=(x-1)^2$.

277. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{x-5}{100}+\dfrac{x-4}{101}+\dfrac{x-3}{102}=\dfrac{x-100}{5}+\dfrac{x-101}{4}+\dfrac{x-102}{3}$;

b) $\dfrac{29-x}{21}+\dfrac{27-x}{23}+\dfrac{25-x}{25}+\dfrac{23-x}{27}+\dfrac{21-x}{29}=-5$.

278. Giải phương trình với các tham số a, b :

a) $a(ax+b)=b^2(x-1)$; b) $a^2x-ab=b^2(x-1)$.

279. Giải phương trình với tham số a :

a) $\dfrac{x-a}{a+1}+\dfrac{x-1}{a-1}=\dfrac{2a}{1-a^2}$;

b) $\dfrac{x+a-1}{a+2}+\dfrac{x-a}{a-2}+\dfrac{x-a}{4-a^2}=0$;

c) $3x+\dfrac{x}{a}-\dfrac{3a}{a+1}=\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+\dfrac{(2a+1)x}{a(a+1)^2}-\dfrac{3a^2}{(a+1)^3}$.

280*. Giải phương trình với các tham số a, b, c :

a) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3$;

b) $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=\dfrac{3x}{a+b+c}$;

c) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}=1-\dfrac{4x}{a+b+c}$;

d) $\dfrac{2a+b+c-3x}{a}+\dfrac{a+2b+c-3x}{b}+\dfrac{a+b+2c-3x}{c}=6-\dfrac{9x}{a+b+c}$.

§8. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương trình tích (một ẩn) là phương trình có dạng :

$$A(x)B(x)... = 0 \qquad (1)$$

trong đó A(x), B(x), ... , là các đa thức.

Để giải (1), ta chỉ cần giải từng phương trình A(x) = 0, B(x) = 0, ... rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

Các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử có vai trò quan trọng trong việc đưa một phương trình về dạng phương trình tích. Cách đặt ẩn phụ cũng thường được sử dụng để trình bày lời giải được gọn gàng.

Ví dụ 64. Giải phương trình :

$$(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56.$$

Giải : *Cách 1*

$$(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 24x + 26 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - x + 5x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) + 5(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0.$$

Kết luận : S = {1 ; –5}.

Cách 2. Chú ý rằng x + 2 là trung bình cộng của x + 3 và x + 1, ta đặt x + 2 = y, phương trình trở thành :

$$(y + 1)^3 - (y - 1)^3 = 56$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1 = 56$$

$$\Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 56 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

Với y = 3 thì x = 1. Với y = –3 thì x = –5.

Kết luận : S = {1 ; –5}.

Ví dụ 65. Giải phương trình :

$$x^3 + (x-1)^3 = (2x-1)^3. \quad (1)$$

Giải : Ta thấy $x + (x-1) = 2x - 1$. Đặt $x - 1 = y$ thì (1) có dạng :

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Kết luận : $S = \{0 ; \frac{1}{2}; 1\}$.

Ví dụ 66. Giải phương trình :

$$(x+1)^2(x+2) + (x-1)^2(x-2) = 12.$$

Giải : Rút gọn vế trái của phương trình, ta được :

$$2x^3 + 10x = 12 \Leftrightarrow x^3 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 1) + 5(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 6) = 0.$$

Dễ dàng chứng minh được $x^2 + x + 6 \neq 0$. Do đó $S = \{1\}$.

Ví dụ 67. Giải phương trình :

$$(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192.$$

Giải : Biến đổi phương trình thành :

$$(x^2 - 1)(x+1)(x+3) = 192 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x+3) = 192.$$

Đặt $x + 1 = y$, phương trình trở thành :

$$(y-2)y^2(y+2) = 192 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 4) = 192.$$

Đặt $y^2 - 2 = z$ thì $z + 2 \geq 0$, phương trình trở thành :

$$(z+2)(z-2) = 192 \Leftrightarrow z^2 = 196 \Leftrightarrow z = \pm 14.$$

Loại $z = -14$ vì trái với điều kiện $z + 2 \geq 0$.

Với $z = 14$ thì $y^2 = 16$, do đó $y = \pm 4$.

Với $y = 4$ thì $x + 1 = 4$ nên $x = 3$. Với $y = -4$ thì $x + 1 = -4$ nên $x = -5$.

Kết luận : $S = \{3 ; -5\}$.

Ví dụ 68. Giải phương trình :

$$(x-6)^4 + (x-8)^4 = 16.$$

Giải : Đặt $x - 7 = y$, phương trình trở thành :

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 16.$$

Rút gọn ta được :

$$2y^4 + 12y^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 + 1 = 8$$
$$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$$

Đặt $y^2 = z \geq 0$, ta có $z^2 + 6z - 7 = 0$.

Phương trình này cho $z_1 = 1$, $z_2 = -7$ (loại).

Với $z = 1$, ta có $y^2 = 1$ nên $y = \pm 1$.

Từ đó $x_1 = 8$; $x_2 = 6$.

Chú ý : Khi giải phương trình bậc bốn dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$, ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \dfrac{a+b}{2}$.

Ví dụ 69. Giải các phương trình :

a) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$; (1)

b) $x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. (2)

Giải :

a) Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Chia hai vế của (1) cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 + 3y + 2 = 0$.

Do đó $y_1 = -1$; $y_2 = -2$.

Với $y = -1$, ta có $x + \frac{1}{x} = -1$ nên $x^2 + x + 1 = 0$, vô nghiệm.

Với $y = -2$, ta có $x + \frac{1}{x} = -2$ nên $(x + 1)^2 = 0$, do đó $x = -1$.

Kết luận : $S = \{-1\}$.

Chú ý : Cũng có thể giải phương trình (1) bằng cách biến đổi vế trái thành

$$(x + 1)^2(x^2 + x + 1).$$

b) Ta thấy $x = -1$ là một nghiệm của phương trình (2) vì tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ. Biến đổi phương trình (2) thành :

$$(x + 1)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) = 0.$$

Giải phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (3)$$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của (3). Chia hai vế của (3) cho $x^2 \neq 0$, ta được :

$$x^2 - 2x + 5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thì $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ta được $y^2 - 2y + 3 = 0$, vô nghiệm.

Kết luận : $S = \{-1\}$.

Chú ý : Ta gọi các phương trình (1) và (2) là *phương trình đối xứng* : các hệ số của đa thức ở vế trái có tính đối xứng qua hạng tử đứng giữa.

Phương trình (1) là phương trình đối xứng bậc chẵn, phương trình (2) là phương trình đối xứng bậc lẻ.

Phương trình đối xứng bậc lẻ bao giờ cũng nhận $x = -1$ làm một nghiệm, do đó bằng cách chia hai vế cho $x + 1$, ta thu được phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$.

Phương trình đối xứng bậc chẵn $2n$ đối với x đưa được về phương trình bậc n đối với y bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Ta có nhận xét sau để kiểm tra lại nghiệm của phương trình đối xứng : Nếu a là nghiệm của phương trình thì $\frac{1}{a}$ cũng là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 70. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm :

a) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$; (1)

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. (2)

Giải :

a) Biến đổi phương trình (1) thành :

$$(x^2 + 1)^2 - x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 1 - x) = 0.$$

Cả hai nhân tử ở vế trái đều dương.

Kết luận : $S = \varnothing$.

b) *Cách 1*. Nhân hai vế của (2) với $x - 1$, ta được :

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1. \qquad (3)$$

Phương trình (3) có nghiệm $x = 1$(*), nhưng giá trị này không thoả mãn phương trình (2)(**).

Kết luận : $S = \varnothing$.

(*) Giải thích điều này : nếu $x > 1$ thì $x^5 > 1$, nếu $x < 1$ thì $x^5 < 1$ (xem tính chất của bất đẳng thức thuộc chuyên đề *Chứng minh bất đẳng thức*).

(**) Nhân hai vế của (2) với $x - 1$ không phải là một phép biến đổi tương đương. Phương trình (3) là hệ quả của phương trình (2) : mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (3) nhưng không khẳng định được mọi nghiệm của (3) đều là nghiệm của (2). Do đó phải thử lại các nghiệm của (3).

Cách 2. Chứng minh rằng $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$.

Chú ý : Các phương trình (1) và (2) cũng là các phương trình đối xứng. Do đó cũng có thể giải chúng bằng cách đặt ẩn phụ $y = x + \frac{1}{x}$.

Bài tập

Giải các phương trình (từ bài 281 đến bài 289) :

281. a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$; b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$;

c) $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$; d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$;

e) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$; g) $(x^2 + 1)^2 = 4(2x - 1)$;

h) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$; i) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$.

282. a) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$;

b) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$;

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;

d) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12$;

e) $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$;

g) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$.

283. a) $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$;

b) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$;

c) $(x + 2)(x + 3)(x - 5)(x - 6) = 180$;

d) $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$;

e) $(12x + 7)^2(3x + 2)(2x + 1) = 3$;

g) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18$.

284. a) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1$;

b) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0$;

c) $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$.

285. a) $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$; b) $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1$;

c) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$; d) $(x - 2{,}5)^4 + (x - 1{,}5)^4 = 1$.

286. a) $(4 - x)^5 + (x - 2)^5 = 32$; b) $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$;

287. a) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 = (2x - 1)^3$; b) $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$.

288. a) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$;

b) $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0$;

c) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

d) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$;

e) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$;

g) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$;

h) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$.

289. $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$.

290. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm :

a) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$;

b) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

§9. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

Các bước giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức :

– Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình.

– Quy đồng mẫu thức ở hai vế của phương trình rồi khử mẫu thức.

– Giải phương trình vừa nhận được.

– Nghiệm của phương trình là các giá trị tìm được của ẩn thoả mãn điều kiện xác định.

Ví dụ 71. Giải phương trình :

$$\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x + 3}{x - 4} = \frac{2}{(x - 2)(4 - x)}. \qquad (1)$$

Giải : ĐKXĐ của phương trình là $x \neq 2$, $x \neq 4$.

Biến đổi phương trình (1) :

$$(x-1)(x-4)+(x+3)(x-2)=-2.$$

Thu gọn phương trình, ta được $2x(x-2)=0$

Nghiệm của (2) là $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

$x_1 = 0$ thoả mãn ĐKXĐ, $x_2 = 2$ không thoả mãn ĐKXĐ.

Kết luận : $S = \{0\}$.

Ví dụ 72. Giải phương trình với các tham số a, b :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x} \qquad (1)$$

Giải : ĐKXĐ của phương trình : $a \neq 0$; $b \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq -a-b$.

Biến đổi phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab} \quad \Leftrightarrow \frac{a+b}{-x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}.$$

Nếu $a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm : x bất kì khác 0.

Nếu $a+b \neq 0$ thì :

$$\begin{aligned} -x(a+b+x)=ab &\Leftrightarrow ab+ax+bx+x^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x+a)(x+b)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-a \\ x=-b \end{array}\right. \end{aligned}$$

Để $-a$ thoả mãn ĐKXĐ, ta phải có :

$$\begin{cases} -a \neq 0 \\ -a \neq -a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$. Các điều kiện này đã có.

Để $-b$ thoả mãn ĐKXĐ, tương tự ta phải có : $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Kết luận :

Nếu $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a+b=0$ thì (1) có vô số nghiệm : x bất kì khác 0.

Nếu $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a+b \neq 0$ thì (1) có nghiệm $x=-a$ và $x=-b$.

Ví dụ 73. Giải phương trình :

$$\frac{x+a}{x+3}+\frac{x-3}{x-a}=2 \text{ (a là hằng).}$$

Giải : ĐKXĐ của phương trình là $x \neq -3$, $x \neq a$. (1)

Biến đổi phương trình :

$$(x+a)(x-a)+(x-3)(x+3)=2(x+3)(x-a).$$

Thu gọn phương trình, ta được

$$2(a-3)x=(a-3)^2. \qquad (2)$$

a) Nếu $a \neq 3$ thì $x=\frac{a-3}{2}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu

$$\frac{a-3}{2} \neq -3 \qquad (3)$$

và

$$\frac{a-3}{2} \neq a \qquad (4)$$

Giải điều kiện (3), ta được $a \neq -3$. Giải điều kiện (4), ta cũng được $a \neq -3$.

Vậy nếu $a \neq \pm 3$ thì $x=\frac{a-3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Nếu $a = 3$ thì (2) có dạng $0x = 0$, nghiệm đúng với mọi x thoả mãn điều kiện (1), tức là $x \neq -3$ và $x \neq a$ (do $a = 3$ nên điều kiện này là $x \neq 3$).

Kết luận :

Nếu $a \neq \pm 3$ thì $S=\left\{\frac{a-3}{2}\right\}$.

Nếu $a = 3$ thì $S=\{x \mid x \neq \pm 3\}$.

Nếu $a = -3$ thì $S = \varnothing$.

Bài tập

Giải các phương trình (từ bài 291 đến bài 297) :

291. a) $\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}=\frac{3}{x^2-x-2}+1$;

b) $\dfrac{x+6}{x-5}+\dfrac{x-5}{x+6}=\dfrac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30}$;

c) $\dfrac{6}{x-5}+\dfrac{x+2}{x-8}=\dfrac{18}{(x-5)(8-x)}-1$;

d) $\dfrac{x-4}{x-1}+\dfrac{x+4}{x+1}=2$;

e) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{9}{(x+1)(2-x)}$;

g) $\dfrac{x^2-x}{x+3}-\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{7x^2-3x}{9-x^2}$.

292. a) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$;

b) $\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}-\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}=\dfrac{6}{x(x^4+4x^2+16)}$.

293. $\dfrac{1+a}{1-x}=1-a$ (a là hằng).

294. a) $\dfrac{x}{2a+x}+\dfrac{2a+x}{2a-x}=\dfrac{8a^2}{x^2-4a^2}$ (a là hằng) ;

b) $\dfrac{2a-3b}{x-2a}+\dfrac{3b-2a}{x-3b}=0$ (a và b là hằng).

295. a) $\dfrac{x-a+1}{x-a}-\dfrac{x-b+1}{x-b}=\dfrac{a}{(x-a)(x-b)}$ (a và b là hằng) ;

b) $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{a-1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$ (a là hằng).

296. a) $\dfrac{1}{a+b-x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{x}$ (a và b là hằng, $a \neq 0$, $b \neq 0$) ;

b) $\dfrac{2}{a(b-x)}-\dfrac{2}{b(b-x)}=\dfrac{1}{a(c-x)}-\dfrac{1}{b(c-x)}$ (a, b, c là hằng, $a \neq 0$, $b \neq 0$).

297. $\dfrac{1}{(x+a)^2-1}+\dfrac{1}{(x+1)^2-a^2}=\dfrac{1}{x^2-(a+1)^2}+\dfrac{1}{x^2-(a-1)^2}$ (a là hằng)

298. Chứng minh rằng phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}\ \text{(a, b là hằng, } a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\pm b\neq 0\text{)}.$$

299*. Giải phương trình

$$\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1\ \text{(a, b, c là hằng và khác nhau đôi một)}.$$

§10. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Bước 1. Lập phương trình :

– Chọn ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho ẩn.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập phương trình biểu thị sự tương quan của các đại lượng.

Bước 2. Giải phương trình.

Bước 3. Chọn kết quả thích hợp và trả lời.

Ví dụ 74. Vào thế kỉ thứ III trước công nguyên, vua xứ Xi-ra-cút giao cho Ac-si-met kiểm tra xem chiếc mũ bằng vàng của mình có pha thêm bạc hay không. Chiếc mũ có trọng lượng 5 niutơn (theo đơn vị hiện nay), khi nhúng ngập trong nước thì trọng lượng giảm đi 0,3 niutơn.

Biết rằng khi cân trong nước, vàng giảm $\frac{1}{20}$ trọng lượng, bạc giảm $\frac{1}{10}$ trọng lượng. Hỏi chiếc mũ chứa bao nhiêu gam bạc ? (vật có khối lượng 100 gam thì trọng lượng bằng 1 niutơn).

Giải : Gọi trọng lượng bạc trong mũ là x (niutơn) ($0 < x < 5$). Trọng lượng vàng trong mũ là $5 - x$ (niutơn). Khi nhúng ngập trong nước, trọng lượng bạc giảm $\frac{x}{10}$ (niutơn), trọng lượng vàng giảm $\frac{5-x}{10}$ (niutơn).

Phương trình : $$\frac{x}{10}+\frac{5-x}{20}=0,3$$

$$x = 1.$$

Trọng lượng bạc trong mũ là 1 niutơn. Chiếc mũ chứa 100 gam bạc.

Chú ý : Khi giải toán bằng cách lập phương trình, ngoài ẩn đã chọn, đôi khi người ta còn biểu thị những đại lượng chưa biết khác bằng chữ. Điều lí thú là các chữ đó tuy tham gia vào quá trình giải bài toán nhưng chúng lại không có mặt trong đáp số của bài toán. Ta xét ví dụ dưới đây :

Ví dụ 75. Một người đi một nửa quãng đường AB với vận tốc 20 km/h, và đi phần còn lại với vận tốc 30 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên toàn bộ quãng đường.

Giải : Gọi vận tốc trung bình phải tìm là x (km/h), ($x > 0$). Ta biểu thị một nửa quãng đường AB là a km ($a > 0$). Thời gian người đó đi nửa đầu của quãng đường là $\frac{a}{20}$ giờ, thời gian đi nửa sau của quãng đường là $\frac{a}{30}$ giờ.

Phương trình :

$$\frac{a}{20} + \frac{a}{30} = \frac{2a}{x}.$$

Giải phương trình trên, ta được :

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{2}{x} ;$$

$$x = 24.$$

Vận tốc trung bình là 24 km/h.

Chú ý :

a) Nếu vận tốc trên nửa đầu của quãng đường là a km/h, vận tốc trên nửa sau là b km/h thì vận tốc trung bình trên cả quãng đường bằng $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ km/h.

Đại lượng này gọi là trung bình điều hoà của a và b.

b) Trung bình điều hoà của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy. Thật vậy

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a + b} \leq \frac{a + b}{2} \text{ vì } 4ab \leq (a + b)^2.$$

Bài tập

300. Hỏi khách qua đường, cho hay Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu tuổi ?

Biết thời thơ ấu của ông chiếm $\frac{1}{6}$ cuộc đời,

$\frac{1}{12}$ cuộc đời tiếp theo là thời thanh niên sôi nổi.

Đến khi lập gia đình thì lại thêm $\frac{1}{7}$ cuộc đời.

5 năm nữa trôi qua, và một cậu con trai đã được sinh ra.

Nhưng số mệnh buộc con chỉ sống bằng nửa đời cha.

Ông đã từ trần 4 năm sau khi con mất.

Đi-ô-phăng thọ bao nhiêu, hãy tính cho ra ?

Bài toán bằng thơ ghi trên mộ của Đi-ô-phăng, nhà toán học cổ Hi Lạp thế kỉ II – III.

301. Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số 1 vào đằng trước và một chữ số 1 vào đằng sau số đó thì số đó tăng gấp 21 lần.

302. Tìm một số tự nhiên có sáu chữ số, biết rằng chữ số tận cùng của nó bằng 4 và nếu chuyển chữ số 4 đó lên vị trí chữ số đầu tiên thì số phải tìm tăng gấp bốn lần.

303. Tính tuổi của hai mẹ con hiện nay, biết rằng cách đây 4 năm thì tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con, sau đây 2 năm thì tuổi mẹ gấp 3 lần tuổi con.

304. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 320m. Nếu tăng chiều dài 10m, tăng chiều rộng 20m thì diện tích tăng $2700m^2$. Tính mỗi chiều.

305. Một ca nô tuần tra đi xuôi khúc sông từ A đến B hết 1 giờ 10 phút và đi ngược dòng từ B về A hết 1 giờ 30 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng vận tốc dòng nước là 2 km/h.

306. Một người đi từ A đến B với vận tốc 24 km/h rồi đi tiếp từ B đến C với vận tốc 32 km/h. Tính quãng đường AB và BC, biết rằng quãng đường AB dài hơn quãng đường BC là 6km và vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AC là 27 km/h.

307. Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30km. Một người đi từ A đến B rồi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 10 km/h, vận tốc xuống dốc (cả lúc đi lẫn lúc về) là 20 km/h, vận tốc trên đường nằm ngang là 15 km/h.

308. Lúc 8 giờ, An rời nhà mình để đến nhà Bích với vận tốc 4 km/h. Lúc 8 giờ 20 phút, Bích cũng rời nhà mình để đến nhà An với vận tốc 3 km/h. An gặp Bích trên đường, rồi cả hai cùng đi về nhà Bích. Khi trở về đến nhà mình, An tính ra rằng quãng đường mình đã đi dài gấp bốn lần quãng đường Bích đã đi. Tính khoảng cách từ nhà An đến nhà Bích.

309. Một người đi xe đạp, một người đi xe máy và một người đi ô tô cùng đi từ A đến B, khởi hành lần lượt lúc 7 giờ, 8 giờ, 9 giờ với vận tốc theo thứ tự bằng 10 km/h, 30 km/h, 50 km/h. Đến mấy giờ thì ô tô ở vị trí cách đều xe đạp và xe máy ?

310. Người ta pha 3 kg nước nóng ở 90^oC với 2 kg nước lạnh ở 20^oC. Tính nhiệt độ sau cùng của nước (bỏ qua sự mất nhiệt).

311. Có hai loại dung dịch muối I và II. Người ta hoà 200 gam dung dịch muối I với 300 gam dung dịch muối II thì được một dung dịch có nồng độ muối là 33%. Tính nồng độ muối trong mỗi dung dịch I và II, biết rằng nồng độ muối trong dung dịch I lớn hơn nồng độ muối trong dung dịch II là 20%.

312. Hai đội công nhân cùng làm một công việc thì hoàn thành công việc đó trong 24 giờ. Nếu đội thứ nhất làm 10 giờ, đội thứ hai làm 15 giờ thì cả hai đội làm được một nửa công việc. Tính thời gian mỗi đội làm một mình để xong công việc.

313. Cho n số nguyên dương (không nhất thiết khác nhau) trong đó có số 68. Trung bình cộng của n số đó bằng 56. Khi bỏ số 68 đó đi thì trung bình cộng của n – 1 số còn lại bằng 55.

a) Tìm n.

b) Số lớn nhất trong n số đã cho có thể bằng bao nhiêu ?

314. Trong một buổi họp mặt giữa hai lớp 8A và 8B, có tất cả 50 học sinh tham gia. Các bạn lớp 8B tính số người quen ở lớp 8A và thấy rằng bạn Anh quen 11 bạn, bạn Bắc quen 12 bạn, bạn Châu quen 13 bạn,... và cứ như vậy đến bạn cuối cùng là bạn Yến quen tất cả các bạn của lớp 8A. Tính số học sinh mỗi lớp tham gia họp mặt.

315. Một nông dân mang cam ra chợ, bán cho người khách thứ nhất $\frac{1}{2}$ số cam và thêm $\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ hai $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm

$\frac{1}{2}$ quả, bán cho người khách thứ ba $\frac{1}{2}$ số cam còn lại và thêm $\frac{1}{2}$ quả... Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi người khách thứ sáu mua xong thì số cam vừa hết. Tính tổng số cam của người nông dân đem bán.

316*. Có ba cánh đồng cỏ như nhau, cỏ cũng luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ mỗi cánh đồng. Biết rằng 9 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng I trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng II trong 4 tuần.

a) Tính xem trên mỗi cánh đồng, số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng mấy phần của số cỏ có sẵn lúc đầu ?

b) Bao nhiêu con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần ?

317*. *Bài toán của Niu-tơn.* Một cánh đồng cỏ mọc dày như nhau, cỏ luôn mọc đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng. Biết rằng 12 con bò ăn hết cỏ trên $\frac{10}{3}$ acrơ trong 4 tuần, 21 con bò ăn hết cỏ trên 10 acrơ trong 9 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 24 acrơ trong 18 tuần (1 acrơ = $4047m^2$).

318*. Một khách du lịch đi từ A đến B nhận thấy cứ 15 phút lại gặp một xe buýt đi cùng chiều vượt qua, cứ 10 phút lại gặp một xe buýt chạy ngược lại. Biết rằng các xe buýt đều chạy với cùng một vận tốc, khởi hành sau những khoảng thời gian bằng nhau và không dừng lại trên đường (trên chiều từ A đến B cũng như trên chiều ngược lại). Hỏi cứ sau bao nhiêu phút thì các xe buýt lại lần lượt rời bến ?

319*. Trên quãng đường AB của một thành phố, cứ 6 phút lại có một xe buýt đi theo chiều từ A đến B, và cũng cứ 6 phút lại có một xe buýt đi theo chiều ngược lại. Các xe này chuyển động đều với cùng vận tốc như nhau.

Một khách du lịch đi bộ từ A đến B nhận thấy cứ 5 phút lại gặp một xe đi từ B về phía mình. Hỏi cứ bao nhiêu phút lại có một xe đi từ A vượt qua người đó ?

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§11. LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG, PHÉP NHÂN

1. Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hoặc $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) là một bất đẳng thức.

Để chứng minh bất đẳng thức $a > b$, ta xét hiệu $a - b$ và chứng minh rằng hiệu đó là số dương.

Các cách khác chứng minh bất đẳng thức được nêu trong chuyên đề *Bất đẳng thức*.

2. Các tính chất sau của bất đẳng thức được nêu trong SGK :

– Tính bắc cầu :

$$a > b \; ; \; b > c \Rightarrow a > c.$$

– Cộng hai vế của bất đẳng thức với cùng một số :

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c.$$

– Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số :

$$a > b \; ; \; c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a > b \; ; \; c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

Các tính chất khác được nêu trong chuyên đề *Bất đẳng thức*.

Ví dụ 76. Chứng minh các bất đẳng thức :

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy.$$

Giải : Xét hiệu

$$x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{2}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0.$$

Vậy $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y$.

Xét hiệu : $\dfrac{(x+y)^2}{2} - 2xy = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geq 0.$

Vậy $\dfrac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy.$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y$.

Nhận xét :

Bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$ cho liên hệ giữa tổng các bình phương của hai số x, y và bình phương của tổng hai số đó.

Bất đẳng thức $\dfrac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$ hay $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ cho liên hệ giữa tổng hai số x, y và tích của hai số đó. Với x, y không âm, bất đẳng thức này được viết dưới dạng : $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (trung bình cộng của hai số lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng), đó là *bất đẳng thức Cô-si*(*) với hai số không âm.

Ví dụ 77. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ với $x > 0$;

b) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ với $a > 0, b > 0$.

Giải : a) Xét hiệu :

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0, \text{ vì } (x-1)^2 \geq 0, x > 0.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = 1$.

b) Xét hiệu :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{ab(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0, \text{ vì } a, b > 0.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

(*) *Cauchy* (1789 – 1857), nhà toán học Pháp.

Nhận xét :

Bất đẳng thức $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (với $x > 0$) cho liên hệ giữa một số dương với nghịch đảo của nó.

Bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$) cho liên hệ giữa tổng các nghịch đảo của hai số dương và nghịch đảo của tổng hai số đó.

Bài tập

320. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $4x^2 + 4x + 5 > 0$; b) $x^2 - x + 1 > 0$; c) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

321. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x - x^2 + 1}{x - x^2 - 1} < 1$.

322. Rút gọn rồi chứng minh rằng biểu thức sau không âm với mọi giá trị của x :

$$\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}.$$

323. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ với $a, b > 0$; b) $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$.

324. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$

(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai cặp số a, b và x, y)(*)

b) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki với hai bộ ba số a, b, c và x, y, z)

325. Cho a và b cùng dấu. Chứng minh rằng :

a) Nếu $a > b$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

(*) *Bu-nhi-a-cốp-xki* (1801 – 1889), nhà toán học Nga.

326. Gọi $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$ là trung bình điều hoà của a và b. Chứng minh rằng trung bình điều hoà của hai số dương a và b nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của hai số ấy.

327. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$;

b) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.

328. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^2$; b) $\dfrac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^4$;

c) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^2$.

~ **Ví dụ :** 88 đến 122.

Bài tập : 358 đến 417.

§12. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), trong đó x là ẩn, a và b là các số đã cho, $a \neq 0$.

2. Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

3. Khi giải một bất phương trình, ta có thể :

– Chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia và đổi dấu hạng tử đó.

– Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số dương.

– Nhân (hoặc chia) cả hai vế với cùng một số âm và đổi chiều của bất phương trình.

Ví dụ 78. Giải bất phương trình với m là hằng :

$$mx + 1 \geq m^2 + x.$$

Giải : Biến đổi tương đương :

$$mx + 1 \ge m^2 + x \Leftrightarrow mx - x \ge m^2 - 1 \Leftrightarrow (m-1)x \ge m^2 - 1. \quad (1)$$

Nếu $m > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x \ge m + 1$.

Nếu $m < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x \le m + 1$.

Nếu $m = 1$ thì (1) có dạng $0x \ge 0$: nghiệm của bất phương trình là mọi x.

Ví dụ 79. Giải bất phương trình với a là hằng :

$$\frac{x+1}{a} + ax > \frac{x+2}{a} - 2x$$

Giải : Điều kiện xác định của bất phương trình là $a \neq 0$. Biến đổi bất phương trình :

$$\frac{x}{a} + \frac{1}{a} + ax > \frac{x}{a} + \frac{2}{a} - 2x$$

$$\Leftrightarrow ax + 2x > \frac{2}{a} - \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow (a+2)x > \frac{1}{a} \quad (1)$$

Nếu $a > -2$, $a \neq 0$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{1}{a(a+2)}$.

Nếu $a < -2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{1}{a(a+2)}$.

Nếu $a = -2$ thì (1) có dạng $0x > -\frac{1}{2}$, nghiệm đúng với mọi x.

Ví dụ 80. Kí hiệu [a] (phần nguyên của a) là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm x biết rằng :

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right] = x.$$

Giải : Theo đề bài, x là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{3x-5}{7}$. Do đó

$$\left[\frac{3x-5}{7}\right] = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{3x-5}{7} - x < 1 & (1) \\ x \in \mathbf{Z} & (2) \end{cases}$$

Giải bất phương trình (1) :

$$0 \le \frac{-4x-5}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 \le -4x-5 < 7$$

$$\Leftrightarrow 5 \le -4x < 12 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \ge x > -3.$$

Theo (2), $x \in \mathbf{Z}$, do đó $x = -2$.

Bài tập

329. Tìm giá trị của x thoả mãn cả hai bất phương trình :

$$\frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} \ge \frac{3x+2}{2} \quad \text{và} \quad \frac{x}{2} + \frac{3-2x}{5} \ge \frac{3x-5}{6}.$$

330. Tìm số nguyên x thoả mãn cả hai bất phương trình :

$$\frac{3x-2}{5} \ge \frac{x}{2} + 0,8 \quad \text{và} \quad 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}.$$

331. Tìm số nguyên x thoả mãn cả hai bất phương trình

$$2(3x-4) < 3(4x-3) + 16 \quad \text{và} \quad 4(1+x) < 3x + 5.$$

332. Cho biểu thức :

$$A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2}\right) : \frac{1-2x}{x^2-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm x để $A > 0$.

333. Cho biểu thức :

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2-3x}\right) : \left(\frac{x^2}{27-3x^2} + \frac{1}{x+3}\right).$$

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tìm x để $B < -1$.

334. Giải bất phương trình :

$$\frac{x+2}{89} + \frac{x+5}{86} > \frac{x+8}{83} + \frac{x+11}{80}.$$

335. Giải các bất phương trình với a là hằng :

a) $2(x + 2) < a(a - x)$;

b) $a(x - a) \leq x - 1$;

c) $\dfrac{2x}{a^2 - a + 1} - \dfrac{1}{2a + 2} < \dfrac{4x - 1}{2a^2 - 2a + 2} + \dfrac{a - 2ax}{1 + a^3}$.

336. Tìm giá trị của m để nghiệm của phương trình sau là số dương :

$$\frac{m + 1}{x - 1} = 1 - m.$$

337. Tìm giá trị của m để nghiệm của bất phương trình $4mx > x + 1$ là :

a) $x > 9$; b) $x < -5$.

338. Có bao nhiêu số tự nhiên n nằm giữa 1 và 2000 sao cho phân số $\dfrac{n^2 + 7}{n + 4}$ không phải là phân số tối giản ?

339. Cho một dãy các số tự nhiên bắt đầu từ 1. Người ta xoá đi một số thì trung bình cộng của các số còn lại bằng $35\dfrac{7}{17}$. Tìm số bị xoá.

340. Tìm các số nguyên a và b sao cho : $a^2 - 2ab + 2b^2 - 4a + 7 < 0$.

341. Tìm x biết rằng $\left[\dfrac{34x + 19}{11}\right] = 2x + 1$.

§13. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Để giải các phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối, cần khử dấu giá trị tuyệt đối. Ta nhớ lại : Giá trị tuyệt đối của một biểu thức bằng chính nó nếu biểu thức không âm, bằng số đối của nó nếu biểu thức âm :

$$| A | = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0. \end{cases}$$

Do đó, để khử dấu giá trị tuyệt đối, cần xét giá trị của biến làm cho biểu thức không âm hay âm. Nếu biểu thức nằm trong dấu giá trị tuyệt đối là nhị thức bậc nhất, ta cần nhớ định lí sau :

Định lí về dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ ($a \neq 0$)

Nhị thức $ax + b$ ($a \neq 0$) :

– cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức ;

– trái dấu với a với các giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

Chứng minh. Gọi x_o là nghiệm của nhị thức $ax + b$ thì $x_o = -\frac{b}{a}$. Xét

$$\frac{ax+b}{a} = x + \frac{b}{a} = x - x_o.$$

Nếu $x > x_o$ thì $x - x_o > 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{a} > 0 \Rightarrow ax + b$ cùng dấu với a.

Nếu $x < x_o$ thì $x - x_o < 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{a} < 0 \Rightarrow ax + b$ trái dấu với a.

Chẳng hạn : Xét dấu các nhị thức $-2x + 1$ và $x + 5$ rồi viết kết quả vào một bảng, ta có :

x		-5		$\frac{1}{2}$	
$-2x+1$	+	|	+	0	−
$x+5$	−	0	+	|	+

Ví dụ 81. Giải phương trình :

$$|x - 5| + |x + 3| = 3x - 1. \qquad (1)$$

Giải : Lập bảng xét dấu các nhị thức $x - 5$ và $x + 3$:

x		-3		5	
$x-5$	−	|	−	0	+
$x+3$	−	0	+	|	+

Xét ba khoảng giá trị của biến x :

a) $x < -3$: phương trình (1) có dạng :

$$(5 - x) - (x + 3) = 3x - 1, \text{ tìm được}$$

$x = \frac{3}{5}$, loại vì giá trị này không thuộc khoảng đang xét.

b) $-3 \le x < 5$: phương trình (1) có dạng :

$(5 - x) + (x + 3) = 3x - 1 \Leftrightarrow -3x = -9$, tìm được

$x = 3$, thuộc khoảng đang xét.

c) $x \ge 5$: phương trình (1) có dạng :

$(x - 5) + (x + 3) = 3x - 1 \Leftrightarrow -x = 1$, tìm được

$x = -1$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận : $S = \{3\}$.

Ví dụ 82. Giải phương trình :

$$|2x - 1| + |2x - 5| = 4. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1. a) Xét khoảng $x < \frac{1}{2}$, (1) có dạng :

$1 - 2x + 5 - 2x = 4$, tìm được

$x = \frac{1}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

b) Xét khoảng $\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$, (1) có dạng :

$$2x - 1 + 5 - 2x = 4 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét, tức là

$$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}.$$

c) Xét khoảng $x > \frac{5}{2}$, (1) có dạng :

$2x - 1 + 2x - 5 = 4$, tìm được

$x = \frac{5}{2}$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận : $S = \left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$.

Cách 2. Áp dụng hai lần bất đẳng thức $|A| \ge A$ (xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $A \ge 0$), ta có :

$$|2x - 1| + |5 - 2x| \ge (2x - 1) + (5 - 2x) = 4.$$

Theo đề bài, phải xảy ra đẳng thức, do đó

$$\begin{cases}2x - 1 \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq \dfrac{1}{2} \\ x \leq \dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Ví dụ 83. Giải phương trình :

$$\big| |x| - 3 \big| = x + 1. \qquad (1)$$

Giải

a) Xét khoảng $x \geq 0$, (1) có dạng

$$|x - 3| = x + 1. \qquad (2)$$

Lại xét hai trường hợp :

Với $x \geq 3$, (2) có dạng $x - 3 = x + 1$, vô nghiệm.

Với $0 \leq x < 3$, (2) có dạng $3 - x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$, thuộc khoảng đang xét.

b) Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng $|-x - 3| = x + 1$ tức là

$$|x + 3| = x + 1. \qquad (3)$$

Lại xét hai trường hợp :

Với $-3 \leq x < 0$, (3) có dạng $x + 3 = x + 1$, vô nghiệm.

Với $x < -3$, (3) có dạng $-x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = -2$, không thuộc khoảng đang xét.

Kết luận : $S = \{1\}$.

Bài tập

Giải các phương trình :

342. a) $2|x - 3| + (5x - 1) = 0$; b) $|x - 1| = |x - 5|$;

c) $|x - 1| = |3x - 5|$; d) $2|x| - |x + 1| = 2$;

e) $|x - 4| + |x + 1| = 9$; g) $|x - 3| + |x - 5| = 2$.

343. a) $|x| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$; b) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$;

c) $|x| - 2|x - 1| + 3|x - 2| = 4$; d) $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| = 4x$.

344. a) $x|x + 3| - |x^2 + x + 1| = 1$; b) $|x|^3 - 3|x| + 2 = 0$.

345. $\big||x| - 1\big| = x + 1$.

346. a) $|x - 4| - x = 2a$ (a là hằng) ; b) $|x - 3| + |5 - x| = 2a$ (a là hằng).

347*. $2|x + a| - |x - 2a| = 3a$ (a là hằng).

§14. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Để giải bất phương trình loại này, ta cũng khử dấu giá trị tuyệt đối như đối với phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 84. Giải bất phương trình :

$$|x| - x + 2 \le 2|x - 4|. \qquad (1)$$

Giải : Lập bảng xét dấu các biểu thức x và x – 4 :

x		0		4	
x	–	0	+	|	+
x – 4	–	|	–	0	+

a) Xét khoảng $x < 0$, (1) có dạng :

$$-x - x + 2 \le 2(4 - x) \Leftrightarrow 0x \le 6,$$

nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng đang xét $x < 0$.

b) Xét khoảng $0 \le x < 4$, (1) có dạng :

$$x - x + 2 \le 8 - 2x \Leftrightarrow x \le 3.$$

Nghiệm của bất phương trình (1) thuộc khoảng đang xét là $0 \le x \le 3$.

c) Xét khoảng $x \ge 4$, (1) có dạng :

$$x - x + 2 \le 2x - 8 \Leftrightarrow x \ge 5,$$

thoả mãn điều kiện $x \ge 4$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \le 3$; $x \ge 5$.

Nhận xét : Trong cách giải trên, ta đã khử dấu giá trị tuyệt đối bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến. Trong một số trường hợp, có thể giải nhanh hơn cách dùng phương pháp chung nói trên bởi các biến đổi tương đương sau :

Dạng 1

a) Với a là số dương, ta có : $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$.

b) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

Dạng 2

a) Với a là số dương, ta có : $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{array}\right.$

b) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right.$

Dạng 3 $\quad |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$.

Ví dụ 85. Giải bất phương trình :

$$3|2x - 1| < 2x + 1 \qquad (1)$$

Giải

Cách.1 (theo phương pháp chung) :

a) Xét khoảng $x < \frac{1}{2}$, (1) có dạng :

$$3(1 - 2x) < 2x + 1 \Leftrightarrow 3 - 6x < 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -8x < -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

b) Xét khoảng $x \geq \frac{1}{2}$, (1) có dạng :

$$3(2x - 1) < 2x + 1 \Leftrightarrow 6x - 3 < 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1.$$

Nghiệm của bất phương trình thuộc khoảng này là $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{4} < x < 1$.

Cách 2 (biến đổi thành bất phương trình tương đương theo dạng 1b) :

$$3|2x-1| < 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2x-1) > -(2x+1) \\ 3(2x-1) < 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3 > -2x-1 \\ 6x-3 < 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x > 2 \\ 4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1.$$

Bài tập

Giải các bất phương trình :

348. a) $|3x-2| < 4$; b) $|3-2x| < x+1$.

349. a) $|3x-1| > 5$; b) $|x^3+1| \geq x+1$.

350. a) $|x+1| > |x-2|$; b) $|x-1| > |x+2| - 3$.

351. a) $|x-1| + |x-5| > 8$; b) $|x-3| + |x+1| < 8$.

§15. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH THƯƠNG

Ví dụ 86. Giải bất phương trình :

$$x^2 - 2x + 1 < 9.$$

Giải

Cách 1. $x^2 - 2x + 1 < 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 9 \Leftrightarrow |x-1| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4.$

Cách 2. Biến đổi thành bất phương trình dạng tích :

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0.$$

Lập bảng xét dấu các nhị thức $x+2$ và $x-4$:

x		-2		4	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nghiệm của bất phương trình là $-2 < x < 4$.

Ví dụ 87. Giải bất phương trình :

$$\frac{1-5x}{x-1} \geq 1.$$

Giải : Điều kiện xác định : $x \neq 1$.

$$\frac{1-5x}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-5x-x+1}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-6x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{x-1} \geq 0.$$

Lập bảng xét dấu :

x		$\frac{1}{3}$		1	
$1-3x$	$+$	0	$-$	|	$-$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$\frac{1-3x}{x-1}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

Nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{3} \leq x < 1$.

Bài tập

352. Giải các bất phương trình :

a) $4x^2 - 4x + 1 > 9$;

b) $(x^3 - 27)(x^3 - 1)(2x + 3 - x^2) \geq 0$;

c) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 20}{x^3 - x^2 - 10x - 8} > 0$;

d) $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1} > \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x+2} - 1$.

353. Tìm điều kiện của x để biểu thức sau có giá trị âm :

$$A = \left(\frac{1-x}{x+3} - \frac{x+3}{x-1}\right) : \left(\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-1}{x+3}\right).$$

354. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức sau có giá trị dương :

$$A = \left(\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x-y}\right).$$

355. Tìm điều kiện của x và y để biểu thức A lớn hơn 1 :

$$A = \left(\frac{x}{y^2 + xy} - \frac{x - y}{x^2 + xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y}\right) : \frac{x}{y}.$$

356. Tìm giá trị của x để biểu thức sau lớn hơn 1 :

$$\frac{x}{x - 2} - \frac{2}{x - 3}.$$

357. Tìm giá trị của m để phương trình sau có nghiệm âm :

$$\frac{2}{x - 1} = 4 - m.$$

CHUYÊN ĐỀ

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I – CÁC TÍNH CHẤT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Ngoài các tính chất của bất đẳng thức được nêu ở §11, ta còn sử dụng các tính chất sau :

1. Cộng từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với các bất đẳng thức đã cho :

$$a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chú ý : Không được trừ từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều.

2. Trừ từng vế hai bất đẳng thức ngược chiều, được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức bị trừ :

$$a > b,\ c < d \Rightarrow a - c > b - d.$$

3. Tính chất đơn điệu của phép nhân :

a) Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương :

$$a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

b) Nhân hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm và đổi chiều của bất đẳng thức :

$$a > b,\ c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

4. Nhân từng vế hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm :

$$a > b \geq 0,\ c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd.$$

5. Nâng lên luỹ thừa bậc nguyên dương hai vế của bất đẳng thức :

$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n\ ;$$

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với n lẻ ;}$$

$$|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n \text{ với n chẵn.}$$

6. So sánh hai lũy thừa cùng cơ số với số mũ nguyên dương :

Nếu $m > n > 0$ thì : $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$;

$$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n\ ;$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n.$$

7. Lấy nghịch đảo hai vế và đổi chiều bất đẳng thức nếu hai vế cùng dấu :

$$a > b,\ ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \text{ (xem bài 325a).}$$

Chú ý : Ngoài các bất đẳng thức chặt, chẳng hạn $a > b$, ta còn gặp các bất đẳng thức không chặt, chẳng hạn $a \geq b$ (tức là $a > b$ hoặc $a = b$). Trong các tính chất trên, nhiều dấu > (hoặc <) có thể thay bởi ≥ (hoặc ≤).

II - CÁC HẰNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ngoài các hằng bất đẳng thức $a^2 \geq 0$; $-a^2 \leq 0$, cần nhớ các hằng bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối :

$|a| \geq 0$. Xảy ra đẳng thức khi $a = 0$;

$|a| \geq a$. Xảy ra đẳng thức khi $a \geq 0$;

$|a + b| \leq |a| + |b|$. Xảy ra đẳng thức khi $ab \geq 0$;

$|a - b| \geq |a| - |b|$. Xảy ra đẳng thức khi $ab > 0$ và $|a| \geq |b|$

(các điều kiện này còn có thể diễn đạt là $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$).

Chứng minh bất đẳng thức $|a + b| \leq |a| + |b|$ như sau :

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1)$$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|ab| + b^2$ (vì hai vế của (1) không âm)

$$\Leftrightarrow ab \leq |ab| \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng, vậy (1) là đúng.

Chứng minh bất đẳng thức $|a - b| \geq |a| - |b|$ (3) như sau :

Nếu $|a| < |b|$ thì (3) hiển nhiên đúng.

Nếu $|a| \geq |b|$ thì (3) tương đương với :

$|a - b|^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq a^2 - 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow |ab| \geq ab \quad (4)$

Bất đẳng thức (4) đúng, vậy (3) là đúng.

2. Cũng cần nhớ thêm một số hằng bất đẳng thức khác để khi giải toán có thể sử dụng chúng như một bổ đề, chẳng hạn :

$a^2 + b^2 \geq 2ab$;

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ hay $(a + b)^2 \geq 4ab$ (bất đẳng thức Cô-si) ;

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}$ với $a, b > 0$ (ví dụ 77) ;

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ với $a, b > 0$ (bài 325).

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ (bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, xem bài 324).

III – CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Dùng định nghĩa

Để chứng minh $A > B$, ta xét hiệu $A - B$ và chứng minh rằng $A - B$ là số dương.

Ví dụ 88 (11). Chứng minh rằng

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq -1.$$

Giải : Xét hiệu

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) - (-1) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + 1.$$

Đặt $x^2 - 5x + 5 = y$, biểu thức trên bằng $(y - 1)(y + 1) + 1 = y^2 \geq 0$.

Vậy $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq -1$.

2. Dùng các phép biến đổi tương đương

Ví dụ 89 (11). Cho các số dương a và b thoả mãn điều kiện $a + b = 1$. Chứng minh rằng $\left(1 + \dfrac{1}{a}\right)\left(1 + \dfrac{1}{b}\right) \geq 9$.

Giải : Ta có

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9 \qquad (1)$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+1}{a}.\dfrac{b+1}{b} \geq 9 \Leftrightarrow ab + a + b + 1 \geq 9ab$ (vì $ab > 0$)

$\Leftrightarrow a + b + 1 \geq 8ab \Leftrightarrow 2 \geq 8ab$ (vì $a + b = 1$)

$\Leftrightarrow 1 \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ (vì $a + b = 1$)

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \qquad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng, mà các phép biến đổi trên tương đương, vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

Cách giải khác

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = \left(1+\frac{a+b}{a}\right)\left(1+\frac{a+b}{b}\right) = \left(2+\frac{b}{a}\right)\left(2+\frac{a}{b}\right).$$

Thực hiện phép nhân và chú ý rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ do $a > 0, b > 0$.

Chú ý : Khi sử dụng phép biến đổi tương đương, cần lưu ý các biến đổi tương đương có điều kiện, chẳng hạn :

$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$ với $a, b > 0$;

$m > n \Leftrightarrow a^m > a^n$ với m, n nguyên dương, $a > 1$.

Cần chỉ rõ các điều kiện ấy khi biến đổi tương đương.

3. Dùng các tính chất của bất đẳng thức

Ví dụ 90 (11). Cho $a + b > 1$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 > \dfrac{1}{8}$.

Giải : Ta có

$$a + b > 1 > 0. \qquad (1)$$

Bình phương hai vế :

$$(a+b)^2 > 1 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 > 1. \qquad (2)$$

Mặt khác

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0. \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (2) và (3) :

$$2(a^2+b^2)>1 \Rightarrow a^2+b^2>\frac{1}{2} \tag{4}$$

Bình phương hai vế của (4) :

$$a^4+2a^2b^2+b^4>\frac{1}{4} \tag{5}$$

Mặt khác

$$(a^2-b^2)^2\geq 0 \Rightarrow a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0 \tag{6}$$

Cộng từng vế của (5) và (6) :

$$2(a^4+b^4)>\frac{1}{4} \Rightarrow a^4+b^4>\frac{1}{8}.$$

Ví dụ 91 (11). Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}.$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $x^2+y^2\geq 2xy$ (xảy ra đẳng thức khi $x=y$), ta có :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}\geq 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}=2.\frac{a}{c}$$

Tương tự :

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 2.\frac{b}{a}$$

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2.\frac{c}{b}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên :

$$2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}.$$

Ví dụ 92 (11). Chứng minh các bất đẳng thức với a, b, c là các số dương :

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$; b) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 1,5.$

Giải

a) Ta có

$$A = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$$

$$= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Dễ chứng minh $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ với x, y dương (bài 325).

Do đó $A \geq 3+2+2+2 = 9$. Vậy $A \geq 9$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức ở câu a :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \text{ trong đó } x, y, z > 0$$

với $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$ ta được :

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 4,5$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq 4,5$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+1+\frac{c}{a+b} \geq 4,5$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq 1,5.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 93*(11). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Giải

Xét $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}$ và chú ý rằng các mẫu đều dương, áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với x, y > 0 (ví dụ 77), ta được :

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{2b}=\frac{2}{b}.$$

Tương tự $$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b} \geq \frac{2}{c},$$

$$\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{a}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên rồi chia cho 2, ta được điều phải chứng minh.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 94 (11). Cho $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz. \quad (1)$$

Giải

Hai vế của (1) đều không âm nên để chứng minh (1), ta sẽ chứng minh rằng

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2.$$

Ta có $$(x+y)^2 \geq 4xy,$$

$$(y+z)^2 \geq 4yz,$$

$$(z+x)^2 \geq 4zx.$$

Hai vế của ba bất đẳng thức trên đều không âm, nhân từng vế ta được :

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq 64x^2y^2z^2$$

$$\Rightarrow [(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq [8xyz]^2.$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều không âm nên

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z$.

4. Dùng phương pháp phản chứng

Ví dụ 95 (11). Cho $a^2 + b^2 \le 2$. Chứng minh rằng $a + b \le 2$.

Giải

Giả sử $a + b > 2$, bình phương hai vế (hai vế đều dương), ta được :

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4 \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$2ab \le a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \le 2(a^2 + b^2)$$

mà $2(a^2 + b^2) \le 4$ (giả thiết), do đó

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 4 \qquad (2)$$

mâu thuẫn với (1).

Vậy phải có $a + b \le 2$.

Cách giải khác. Ta có

$$a^2 + b^2 \le 2 \qquad (1)$$

Mặt khác $2ab \le a^2 + b^2$ nên

$$2ab \le a^2 + b^2 \le 2 \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) :

$$a^2 + 2ab + b^2 \le 4 \Rightarrow (a + b)^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le a + b \le 2.$$

IV – BẤT ĐẲNG THỨC VỚI SỐ TỰ NHIÊN

Ví dụ 96* (11). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta có

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

Giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức trên. Ta sử dụng tính chất bắc cầu của bất đẳng thức dưới dạng *phương pháp làm trội* : để chứng minh $A < B$, ta làm trội A thành C ($A < C$) rồi chứng minh rằng $C \le B$ (biểu thức C đóng vai trò trung gian để so sánh A và B).

Làm trội mỗi phân số ở A bằng cách làm giảm các mẫu, ta có :

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)}.$$

Do đó :

$$A < \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + ... + \frac{1}{n^3 - n} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}.$$

Đặt $C = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$, nhận xét rằng :

$$\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$

nên $$C = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Vậy $$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

Chú ý : Khi làm trội một biểu thức, có trường hợp ta phải chia biểu thức thành nhiều nhóm rồi làm trội trong từng nhóm. Xét ví dụ sau :

Ví dụ 97* (11). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Giải : Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là A, ta có :

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{15}\right) + ...$$

$$... + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + ... + \frac{1}{2^n - 1}\right).$$

Ở mỗi nhóm, ta làm trội bằng cách thay các phân số bởi phân số lớn nhất trong nhóm, ta được :

$$A < 1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2^2}.4 + \frac{1}{2^3}.8 + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1} = 1 + 1 + ... + 1 = n.$$

V - VÀI ĐIỂM CHÚ Ý KHI CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

***Chú ý 1.* Khi chứng minh bất đẳng thức, nhiều khi ta cần đổi biến.**

Ví dụ 98 (11). Cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Giải :

Đặt $a = \frac{1}{3} + x$, $b = \frac{1}{3} + y$, $c = \frac{1}{3} + z$. Do $a + b + c = 1$ nên $x + y + z = 0$.
Ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{1}{3} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + y\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + z\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}y + y^2\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}z + z^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + y + z) + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} + x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 99 (11). Chứng minh bất đẳng thức :

$$abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$$

với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Giải

Cách 1. Đặt $b + c - a = x$, $a + c - b = y$, $a + b - c = z$ thì $x, y, z > 0$. Theo bất đẳng thức $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$ (ví dụ 94) ta có :

$$2a \,.\, 2b \,.\, 2c \geq 8(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$$

$$\Rightarrow abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c).$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Ta có :

$$(b + c - a)(b + a - c) = b^2 - (c - a)^2 \leq b^2$$

$$(c + a - b)(c + b - a) = c^2 - (a - b)^2 \leq c^2$$

$$(a + b - c)(a + c - b) = a^2 - (b - c)^2 \leq a^2.$$

Nhân từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$[(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)]^2 \leq [abc]^2.$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc vuông đều dương nên

$$(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc.$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

***Chú ý 2.* Với các bất đẳng thức mà các biến có vai trò như nhau, ta có thể sắp thứ tự các biến.**

Ví dụ 100* (11). Chứng minh bất đẳng thức được nêu ở ví dụ 99 :

$$abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \qquad (1)$$

trong đó điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác được thay bởi a, b, c là các số dương.

Giải

Cách 1. Do vai trò của a, b, c như nhau, ta giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Xét hai trường hợp :

a) $b + c \leq a$. Khi đó vế trái của (1) là số dương, còn vế phải không dương. Bất đẳng thức được chứng minh.

b) $b + c > a$. Khi đó hai vế của (1) đều dương. Giải tiếp như ví dụ 99.

Cách 2. Trong ba số $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b - c$, không có quá một số âm. Thật vậy, chẳng hạn nếu $b + c - a < 0$, $a + c - b < 0$ thì $2c < 0$, trái với giả thiết.

Nếu có đúng một số âm thì vế phải của (1) là số âm, bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Nếu không có số nào âm thì vế phải của (1) là số dương. Giải tiếp như ví dụ 99.

***Chú ý 3.* Khi chứng minh bất đẳng thức, trong nhiều trường hợp ta cần xét từng khoảng giá trị của biến.**

Ví dụ 101 (11). Chứng minh rằng

$$x^8 - x^7 + x^2 - x + 1 > 0.$$

Giải

Gọi A là vế trái của bất đẳng thức.

Cách 1. Nếu $x \geq 1$ thì ta viết A dưới dạng $x^7(x - 1) + x(x - 1) + 1$. Do $x \geq 1$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì ta viết A dưới dạng $x^8 + x^2(1 - x^5) + (1 - x)$. Do $x < 1$ nên $1 - x^5 > 0$, do đó $A > 0$.

Cách 2.

$$A = x^7(x - 1) - (x - 1) + x^2 = (x - 1)(x^7 - 1) + x^2.$$

Nếu $x \geq 1$ thì $x^7 \geq 1$, do đó $(x - 1)(x^7 - 1) \geq 0$, còn $x^2 > 0$ nên $A > 0$.

Nếu $x < 1$ thì $x^7 < 1$, do đó $(x - 1)(x^7 - 1) > 0$, còn $x^2 \geq 0$ nên $A > 0$.

VI – ÁP DỤNG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀO GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Có nhiều trường hợp để giải phương trình $f(x, y...) = 0$, ta lại chứng minh bất đẳng thức $f(x, y...) \geq 0$ hoặc $f(x, y...) \leq 0$ và chỉ ra điều kiện cần và đủ để xảy ra đẳng thức.

Ví dụ 102 (11). Giải phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = x(y + z).$$

Giải : Trước hết ta chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) tương đương với :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Xảy ra đẳng thức ở (2), tức là ở (1), khi và chỉ khi $x = y = z = 0$. Đó là nghiệm của phương trình.

Chú ý : Cũng có thể biến đổi phương trình đã cho thành :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Bài tập

Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 358 đến bài 371) :

358(11). a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

359(11). a) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$;

b) $a^8 + b^8 + c^8 \geq a^2b^2c^2(ab + bc + ca)$.

360(11). a) $a^2 + b^2 \geq ab$; b) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$;

c) $a(a + b)(a + c)(a + b + c) + b^2c^2 \geq 0$.

361(11). a) $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geq (a^3 + b^3)^2$; b) $(a + b)(a^3 + b^3) \leq 2(a^4 + b^4)$.

362(11). a) $2(a^3 + b^3) \geq (a + b)(a^2 + b^2)$ với $a, b > 0$;

b) $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$ với $a, b > 0$.

363(11). $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$ với $a, b, c > 0$.

364(11). a) $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$; b) $(a^2 + b^2)^2 \geq ab(a + b)^2$.

365(11). a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c)$; b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b + c + d)$.

366(11). a) $x^4 - 4x + 5 > 0$; b) $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$.

367(11). a) $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$;

b) $a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$.

368(11). $x^3 + 4x + 1 > 3x^2$ với $x \geq 0$.

369(11). a) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 \geq 0$;

b)* $a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab - 4ac + 8bc$.

370(11). $\left(\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}\right)^2 \geq (a + c)(b + d)$.

371*(11). a) $8(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3$ với $a, b, c > 0$.

b) $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ với $a, b, c \geq 0$.

372(11). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 0$.

373(11). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng :

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$;

b) $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$;

c) $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

374(11). a) Cho các số dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8.$$

b) Cho các số a và b không âm. Chứng minh rằng

$$(a+b)(ab+1) \geq 4ab.$$

375(11). Cho các số dương a, b, c, d có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 6.$$

376(11). Cho các số dương a và b thoả mãn $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + ab < 1.$$

377(11). Chứng minh các bất đẳng thức sau bằng cách xét từng khoảng giá trị của biến :

a) $A = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$;

b) $C = x^8 - x^7 + x^4 - x + 1 > 0$.

Giải các bài từ 378 đến 384 bằng phương pháp phản chứng :

378(11). Chứng minh rằng nếu $a + b + c > 0$, $abc > 0$, $ab + bc + ca > 0$ thì $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

379(11). Chứng minh rằng nếu $a \geq 3$, $b \geq 3$, $a^2 + b^2 \geq 25$ thì $a + b \geq 7$.

380(11). Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một. Chứng minh rằng tồn tại một trong các số 9ab, 9bc, 9ca nhỏ hơn $(a+b+c)^2$.

381(11). Chứng minh rằng không có ba số dương a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức :

$$a + \frac{1}{b} < 2 ; \quad b + \frac{1}{c} < 2 ; \quad c + \frac{1}{a} < 2.$$

382(11). Chứng minh rằng không có các số a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức :

$$|b - c| > |a|,\ |c - a| > |b|,\ |a - b| > |c|.$$

383(11). Chứng minh rằng không có các số dương a, b, c nào thoả mãn cả ba bất đẳng thức :

$$4a(1 - b) > 1, \quad 4b(1 - c) > 1, \quad 4c(1 - a) > 1.$$

384(11). Cho $a^3 + b^3 = 2$. Chứng minh rằng $a + b \le 2$.

Giải các bài từ 385 đến 389 trong đó có sắp thứ tự các biến :

385(11). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + a} + \dfrac{c}{a + b} < 2$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$.

386(11). Chứng minh bất đẳng thức :

a) $2(a^8 + b^8) \ge (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$;

b) $3(a^8 + b^8 + c^8) \ge (a^3 + b^3 + c^3)(a^5 + b^5 + c^5)$.

387(11). Cho $a + b = 2$. Chứng minh rằng $a^8 + b^8 \ge a^7 + b^7$.

388*(11). Chứng minh bất đẳng thức sau với $a, b, c \ge 0$:

a) $a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \ge 0$;

b) $a^6 + b^6 + c^6 \ge a^5b + b^5c + c^5a$ $(a, b, c \ge 0)$.

389*(11). Chứng minh rằng tồn tại một trong các số $(a - b)^2$, $(b - c)^2$, $(c - a)^2$ không lớn hơn $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

390*(11). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2.

a) So sánh a, b, c với 1 ;

b) Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$.

391(11). Cho $|x| \ge 2$, $|y| \ge 2$. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{x + y}{xy} \le 1$; b) Phương trình $\dfrac{xy}{x + y} = \dfrac{2003}{2004}$ vô nghiệm.

392(11). a) Cho $a + b + c = 6$ và $ab + bc + ca = 9$. Chứng minh rằng $0 \le a \le 4$, $0 \le b \le 4$ và $0 \le c \le 4$.

b) Cho $a + b + c = 2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng $0 \le a \le \frac{4}{3}$, $0 \le b \le \frac{4}{3}$ và $0 \le c \le \frac{4}{3}$.

393*(11). Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$\left|\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)\right| < 1.$$

394(11). Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì :

a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \ge a + b + c$;

b) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \le \frac{a+b+c}{2}$.

395(11). Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

396*(11). Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì :

a) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;

b) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a + b + c$;

c) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

397*(11). Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \ge \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

398(11). Chứng minh rằng khi viết dưới dạng số thập phân vô hạn, số $\left(\frac{2}{225}\right)^{100}$ có 2000 chữ số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy bằng 0.

399*(11). Cho 101 số $a_1, a_2, ..., a_{101}$ trong đó $a_1 = 5$, $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}$, ..., $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ với mọi $n \ge 1$. Chứng minh rằng :

a) $a_{51} > 11$;

b) $15 < a_{101} < 15{,}1$.

400(11). Cho sáu đoạn thẳng có độ dài trong khoảng từ 10 cm đến 75 cm. Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ba đoạn thẳng làm thành ba cạnh của một tam giác.

401(11). *Đố vui : Ai nói đúng ?* Một đơn vị công an hằng ngày dùng thuyền máy đi xuôi khúc sông từ A đến B rồi quay trở lại A. Hôm ấy, dòng nước chảy nhanh hơn hôm trước. Chiến sĩ Tâm vui vẻ nói :

– Hôm nay nước chảy nhanh, thuyền xuôi nhanh hơn nên ta sẽ về sớm hơn.

Chiến sĩ Hoà không tán thành :

– Đi nhanh được bao nhiêu thì lại về chậm bấy nhiêu ! Như vậy thuyền vẫn đi với thời gian như hôm trước.

Ai đúng ? Ai sai ? Biết rằng vận tốc riêng của thuyền máy không đổi trong cả hai ngày.

Bất đẳng thức với số tự nhiên

402(11). Cho $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{200}{199}$. Chứng minh rằng $14 < A < 20$.

Chứng minh các bất đẳng thức (từ bài 403 đến 410) :

403*(11). $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \ldots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$.

404(11). a) $A = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$ (n nguyên dương) ;

b) $B = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} < 1$ $(n \in \mathbf{N} ; n \geq 2)$.

405(11). $C = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \ldots + \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} < 2$ (n nguyên dương).

406(11). $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{100}{2^{100}} < 2$.

407(11). $B = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ $(n \in \mathbf{N} ; n \geq 3)$.

408*(11). $C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.

409(11). $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{3n+1} < 2$ (n nguyên dương).

410*(11). $\frac{3}{5} < \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} + ... + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$.

411(11). a) Chứng minh bất đẳng thức :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2} \text{ (n nguyên dương).}$$

b) Chứng minh rằng với mọi số dương A, ta luôn tìm được số tự nhiên n để

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} > A.$$

412*(11). Cho bốn số nguyên dương a, b, c, d, trong đó tổng ba số bất kì chia cho số còn lại đều có thương là một số nguyên khác 1. Chứng minh rằng trong bốn số a, b, c, d, tồn tại hai số bằng nhau.

413*(11). Tìm các số tự nhiên x và y sao cho x^x có y chữ số, còn y^y có x chữ số.

414*(11). Chứng minh bất đẳng thức $(n!)^2 > n^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 3$.

415*(11). Kí hiệu [a] là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Chứng minh rằng $[x] + [y] \leq [x + y]$.

Bất đẳng thức và phương trình

416(11). Dùng phương pháp bất đẳng thức để giải các phương trình :

a) $(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t)$;

c) $(x^2 + 1)(y^2 + 4)(z^2 + 9) = 48xyz$ $(x, y, z > 0)$;

d) $(x + 1)(y + 1)(x + y) = 8xy$ $(x, y \geq 0)$.

417(11). Kí hiệu S(n) là tổng các chữ số của n. Tìm số nguyên dương n sao cho :

a) $n + S(n) = 2018$; b*) $S(n) = n^2 - 2005n + 7$.

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

I – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

1. Cho biểu thức f(x, y...)

Ta nói M là giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức f(x, y...), kí hiệu max f = M, nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

– Với mọi x, y... để f(x, y, ...) xác định thì

$$f(x, y...) \le M \text{ (M là hằng số)} \qquad (1)$$

– Tồn tại x_o, y_o... sao cho

$$f(x_o, y_o...) = M \qquad (2)$$

2. Cho biểu thức f(x, y...)

Ta nói m là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức f(x, y...), kí hiệu min f = m, nếu hai điều kiện sau được thoả mãn :

– Với mọi x, y... để f(x, y, ...) xác định thì

$$f(x, y...) \ge m \text{ (m là hằng số)} \qquad (1')$$

– Tồn tại x_o, y_o... sao cho

$$f(x_o, y_o...) = m. \qquad (2')$$

3. Tiếng Latinh : *minimum* là nhỏ nhất, *maximum* là lớn nhất.

4. Chú ý rằng nếu chỉ có điều kiện (1) hay (1') thì chưa thể nói gì về cực trị của một biểu thức.

Chẳng hạn, xét biểu thức

$$A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2.$$

Mặc dù ta có $A \ge 0$, nhưng chưa thể kết luận được min A = 0, vì không tồn tại giá trị nào của x để A = 0.

Cách giải đúng : Xem ví dụ 103.

Ví dụ 103 (11). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = (x - 1)^2 + (x - 3)^2.$$

Giải : Ta có

$$A = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2(x^2 - 4x + 5)$$

$$= 2(x-2)^2 + 2 \ge 2.$$

$$A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy min $A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

II – TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CHỨA MỘT BIẾN

1. Tam thức bậc hai

Ví dụ 104 (11).

a) Tìm GTNN của $A = 2x^2 - 8x + 1$.

b) Tìm GTLN của $B = -5x^2 - 4x + 1$.

c) Cho tam thức bậc hai $P = ax^2 + bx + c$.

Tìm GTNN của P nếu $a > 0$.

Tìm GTLN của P nếu $a < 0$.

Giải

a) $A = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x-2)^2 - 7 \ge -7$.

min $A = -7$ khi và chỉ khi $x = 2$.

b) $B = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) + \frac{9}{5} = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \le \frac{9}{5}$.

$\max B = \frac{9}{5}$ khi và chỉ khi $x = -\frac{2}{5}$.

c) $P = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$ nên :

– Nếu $a > 0$ thì $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$, do đó $P \ge k$;

$\min P = k$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$;

– Nếu $a < 0$ thì $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \le 0$, do đó $P \le k$;

$\max P = k$ khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2. Đa thức bậc cao hơn hai

Ví dụ 105 (11). Tìm GTNN của :

$$A = x(x-3)(x-4)(x-7).$$

Giải

$$A = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12).$$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì

$$A = (y-6)(y+6) = y^2 - 36 \ge -36.$$

$\min A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$; $x_2 = 6$.

3. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Ví dụ 106 (11). Tìm GTNN của $A = \dfrac{2}{6x - 5 - 9x^2}$.

Giải

$A = \dfrac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \dfrac{-2}{(3x-1)^2 + 4}$.

Ta thấy $(3x-1)^2 \ge 0$ nên $(3x-1)^2 + 4 \ge 4$. Do đó $\dfrac{1}{(3x-1)^2 + 4} \le \dfrac{1}{4}$ (theo tính chất $a \ge b$ thì $\dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{b}$ với a và b cùng dấu) $\Rightarrow \dfrac{-2}{(3x-1)^2 + 4} \ge \dfrac{-2}{4} \Rightarrow A \ge -\dfrac{1}{2}$.

$\min A = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

4. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

Ví dụ 107 (11). Tìm GTNN của

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}.$$

Giải

Cách 1. Đặt $x - 1 = y$ thì $x = y + 1$. Ta có :

$$A = \frac{3(y+1)^2 - 8(y+1) + 6}{y^2} = \frac{3y^2 - 2y + 1}{y^2} = 3 - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}.$$

Lại đặt $\frac{1}{y} = z$ thì

$$A = 3 - 2z + z^2 = (z-1)^2 + 2 \geq 2.$$

$\min A = 2 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

Cách 2. Viết A dưới dạng tổng của 2 với một biểu thức không âm :

$$A = \frac{(2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 4x + 4)}{x^2 - 2x + 1} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2.$$

$\min A = 2$ khi và chỉ khi $x = 2$.

5. Các phân thức dạng khác

Ví dụ 108 (11). Tìm GTNN và GTLN của

$$A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}.$$

Giải : Để tìm GTNN, viết A dưới dạng :

$$A = \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 1} - 1 \geq -1$$

$\min A = -1$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Để tìm GTLN, viết A dưới dạng :

$$A = \frac{4x^2 + 4 - 4x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4.$$

max A = 4 khi và chỉ khi $x = -\frac{1}{2}$.

Chú ý : Lời giải trên tuy gọn, song cách viết biểu thức A dưới các dạng trên có phần thiếu tự nhiên. Trong trường hợp phân thức có mẫu là đa thức bậc hai và tử có bậc không quá hai như ở ví dụ 108, ta có một phương pháp xác định được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức (nếu có). Đó là phương pháp tìm miền giá trị của hàm số. Phương pháp này được trình bày trong cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập hai.

III – TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CÓ QUAN HỆ RÀNG BUỘC GIỮA CÁC BIẾN

Ví dụ 109 (11). Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$ biết rằng $x + y = 1$.

Giải : Sử dụng điều kiện đã cho để rút gọn biểu thức A :

$$A = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 - xy + y^2 + xy = x^2 + y^2.$$

Đến đây có nhiều cách giải :

Cách 1. Biểu thị y theo x rồi đưa về tam thức bậc hai đối với x :

Thay $y = 1 - x$ vào biểu thức A :

$$A = x^2 + (1-x)^2 = 2(x^2 - x) + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

min $A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Sử dụng điều kiện đã cho làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A :

$$x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1 \qquad (1)$$

Mặt khác

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) :

$$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}.$$

min $A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Cách 3. Sử dụng điều kiện đã cho để đưa vào một biến mới :

Đặt $x = \frac{1}{2} + a$ thì $y = \frac{1}{2} - a$. Biểu thị $x^2 + y^2$ theo a, ta được :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 = \frac{1}{2} + 2a^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 110 (11). Cho $x + y + z = 3$.

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$.

b) Tìm GTLN của $B = xy + yz + zx$.

c) Tìm GTNN của $A + B$.

Giải : Bình phương hai vế của đẳng thức $x + y + z = 3$, ta được :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9 \qquad (1)$$

tức là $A + 2B = 9$.

Dễ dàng chứng minh được :

$$A \geq B \qquad (2)$$

xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z$.

a) Từ (1) và (2) suy ra $3A \geq A + 2B = 9$, nên $A \geq 3$.

Do đó $\min A = 3$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Chú ý : Có thể giải câu a bằng cách đổi biến : đặt $x = 1 + a$, $y = 1 + b$, $z = 1 + c$ rồi xét $x^2 + y^2 + z^2$.

b) Từ (1) và (2) suy ra $3B \leq A + 2B = 9$, nên $B \leq 3$. Do đó $\max B = 3$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Chú ý : Có thể giải câu b dựa vào câu a : vì $A + 2B = 9$ nên B lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất.

c) Ta có $A + 2B = 9$ mà $B \leq 3$ (câu b) nên $A + B \geq 6$.

Do đó $\min (A + B) = 6$ khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Ví dụ 111 (11) Tìm GTNN và GTLN của :

a) Biểu thức A, biết rằng $A(A - 1) \leq 2$;

b*) Biểu thức $A = 2 - x - y - z$, biết rằng

$$(2 - x - y - z)^2 = 4 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Giải

a) Ta dùng phương pháp xét dấu một tích để tìm GTNN, GTLN của A :

Biến đổi :

$$A(A - 1) \le 2 \Leftrightarrow A^2 - A - 2 \le 0 \Leftrightarrow (A + 1)(A - 2) \le 0.$$

Lập bảng xét dấu :

A		-1		2	
$A + 1$	$-$	0	$+$		$+$
$A - 2$	$-$		$-$	0	$+$
$(A + 1)(A - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó $-1 \le A \le 2$; $\min A = -1$; $\max A = 2$.

b) Từ giả thiết ta có

$$x + y + z = 2 - A \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 - A^2 \quad (2)$$

Ta đưa ra một bất đẳng thức trong đó chứa $x + y + z$ và $x^2 + y^2 + z^2$.

Ta có

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \quad (1)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được :

$$xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$; xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x = y = z$.

Do đó $(2 - A)^2 \le 3(4 - A^2)$. Biến đổi bất đẳng thức này ta được $A^2 - A - 2 \le 0$. Giải tiếp như câu a ta được :

$$\min A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

$$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

IV – CÁC CHÚ Ý KHI TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

1. *Chú ý 1.* Khi tìm cực trị (GTNN hoặc GTLN) của biểu thức, ta có thể đổi biến.

Chẳng hạn, ở ví dụ 103 ta có thể đặt $x - 2 = y$, khi đó

$$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = y^2 + 2y + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2y^2 + 2 \geq 2.$$

$\min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

2. *Chú ý 2.* Khi tìm cực trị của biểu thức, nhiều khi ta thay điều kiện để biểu thức này đạt cực trị bởi điều kiện tương đương là biểu thức khác đạt cực trị.

Chẳng hạn : $-A$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất,

$\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ B nhỏ nhất với $B > 0$,

C lớn nhất $\Leftrightarrow$ C^2 lớn nhất với $C > 0$.

Ví dụ 112 (11). Tìm GTLN và GTNN của $A = \dfrac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$.

Giải : Chú ý rằng $A > 0$ nên A lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{A}$ nhỏ nhất,

A nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{A}$ lớn nhất. Ta có :

$$\frac{1}{A} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 + 1} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1}.$$

Tìm GTLN của A : Ta có $2x^2 \geq 0$, $x^4 + 1 > 0$ nên $\dfrac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 0$. Suy ra

$$\frac{1}{A} \geq 1 + 0 = 1.$$

$\min \dfrac{1}{A} = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$. Do đó $\max A = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Tìm GTNN của A : Ta có $2x^2 \le x^4 + 1$ (dễ chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$) mà $x^4 + 1 > 0$ nên $\frac{2x^2}{x^4+1} \le 1$. Suy ra $\frac{1}{A} \le 1 + 1 = 2$; $\max \frac{1}{A} = 2$ khi và chỉ khi $x^2 = 1$. Do đó $\min A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

Chú ý :

1.Cách khác tìm GTLN của A :

$$A = \frac{(x^2+1)^2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \le 1.$$

$\max A = 1$ khi và chỉ khi $x = 0$.

2. Cách khác tìm GTNN của A :

Cách 1. Đặt $\frac{1}{x^2+1} = y$ như ví dụ 107.

Cách 2.

$$A = \frac{2x^4+2}{2(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) + (x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(x^2-1)^2}{2(x^2+1)^2} \ge \frac{1}{2}.$$

$\min A = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = \pm 1$.

3. *Chú ý 3.* Khi giải toán cực trị, nhiều khi ta cần xét từng khoảng giá trị của biến, sau đó so sánh các giá trị của biểu thức trong các khoảng ấy để tìm GTNN, GTLN.

Ví dụ 113 (11). Tìm GTNN của

$$A = (3x-1)^2 - 4|3x-1| + 5.$$

Giải : Đặt $|3x - 1| = y$ thì

$$A = |3x-1|^2 - 4|3x-1| + 5 = y^2 - 4y + 5 = (y-2)^2 + 1 \ge 1.$$

$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x-1| = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1 ; x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 114 (11). Tìm GTNN của

$$B = |x-2| + |x-3|.$$

Giải

Cách 1.

a) Xét khoảng $x < 2$ thì $B = 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$.

Do $x < 2$ nên $-2x > -4$, do đó $B > 1$ (1)

b) Xét khoảng $2 \le x \le 3$ thì $B = x - 2 + 3 - x = 1$ (2)

c) Xét khoảng $x > 3$ thì $B = x - 2 + x - 3 = 2x - 5$.

Do $x > 3$ nên $2x > 6$, do đó $B > 1$ (3)

So sánh (1), (2), (3) ta được min $B = 1$ khi và chỉ khi $2 \le x \le 3$.

Cách 2. Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên

$$B = |x - 2| + |x - 3| = |x - 2| + |3 - x| \ge (x - 2) + (3 - x) = 1$$

Do đó min $B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 3 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$.

Ví dụ 115 (11). Tìm GTNN của

$$A = |x - 1| + |x - 7| + |x - 9|$$

Giải

Do giá trị tuyệt đối của một số lớn hơn hoặc bằng số đó nên

$$|x - 1| + |x - 9| = |x - 1| + |9 - x| \ge x - 1 + 9 - x = 8 \quad (1)$$

Ta lại có $$|x - 7| \ge 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \ge 8$.

Do đó min $A = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 9 - x \ge 0 \\ x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7$.

4. *Chú ý 4.* Khi tìm cực trị của một biểu thức, người ta thường sử dụng các bất đẳng thức đã biết. Xem mục *Các hằng bất đẳng thức* thuộc chuyên đề *Chứng minh bất đẳng thức*.

Ví dụ 116 (11). Cho $x^2 + y^2 = 52$. Tìm GTLN của $A = 2x + 3y$.

Giải

Ta nhận thấy $2x + 3y$ và $x^2 + y^2$ là các thành phần của bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ với $a = 2$, $b = 3$.

Theo bất đẳng thức trên :

$$(2x + 3y)^2 \le (2^2 + 3^2).52 \Rightarrow (2x + 3y)^2 \le 13.13.4$$

$$\Rightarrow |2x + 3y| \le 26 \Rightarrow 2x + 3y \le 26.$$

$$\max A = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} & (1) \\ 2x + 3y \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Thay $y = \dfrac{3x}{2}$ vào $x^2 + y^2 = 52$, ta được $x^2 + \dfrac{9x^2}{4} = 52$. Giải phương trình này được : $x = \pm 4$.

Với $x = 4$ thì $y = 6$, thoả mãn (2). Với $x = -4$ thì $y = -6$, không thỏa mãn (2).

Vậy max $A = 26$ khi và chỉ khi $x = 4$, $y = 6$.

5. *Chú ý 5.* Trong các hằng bất đẳng thức, cần chú ý đến hai mệnh đề sau, cho ta GTLN của tích, GTNN của tổng :

– Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

– Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau.

Để chứng minh hai mệnh đề trên, ta dùng bất đẳng thức $(a + b)^2 \ge 4ab$:

– Nếu hai số a và b có $a + b = k$ (hằng số) thì từ $(a + b)^2 \ge 4ab$ ta có $ab \le \dfrac{k^2}{4}$, do đó $\max(ab) = \dfrac{k^2}{4}$ khi và chỉ khi $a = b$.

– Nếu hai số dương a và b có $ab = p$ (hằng số) thì $a + b$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow (a+b)^2$ nhỏ nhất, do đó $\min (a + b)^2 = 4p$ khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 117 (11). Tìm GTLN của

$$A = (x^2 - 3x + 1)(21 + 3x - x^2).$$

Giải : Các biểu thức $x^2 - 3x + 1$ và $21 + 3x - x^2$ có tổng không đổi (bằng 22) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi

$$x^2 - 3x + 1 = 21 + 3x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5\,;\; x_2 = -2.$$

Khi đó A = 11.11 = 121.

Vậy max A = 121 khi và chỉ khi $x = 5$ hoặc $x = -2$.

Ví dụ 118 (11). Tìm GTNN của biểu thức

$$B = \frac{16x^2 + 4x + 1}{2x} \text{ với } x > 0.$$

Giải

Viết B dưới dạng $8x + 2 + \frac{1}{2x}$. Hai số 8x và $\frac{1}{2x}$ là hai số dương, có tích không đổi (bằng 4) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$8x = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow 16x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (chú ý rằng } x > 0).$$

Vậy min $B = \dfrac{1+1+1}{\frac{1}{2}} = 6$ khi và chỉ khi $x = \frac{1}{4}$.

6. *Chú ý 6.* Trong các ví dụ trên, ta chỉ ra *tất cả các giá trị của biến* để xảy ra đẳng thức. Tuy nhiên, yêu cầu của bài toán tìm GTNN, GTLN không đòi hỏi như vậy, chỉ cần chứng tỏ rằng tồn tại giá trị của biến để xảy ra đẳng thức.

Ví dụ 119 (11). Tìm GTLN của A = ab + bc + cd, biết rằng a, b, c, d là các số không âm có tổng bằng 1.

Giải :

Cách 1. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Ta có

$$A = ab + bc + cd \leq ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

$$= a(1 - a) = a - a^2 = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Không cần tìm điều kiện cần và đủ để $A = \frac{1}{4}$, tức là không cần giải tất cả các điều kiện $bc = ac$, $cd = ad$, $a = \frac{1}{2}$, $b + c + d = \frac{1}{2}$ và $b, c, d \geq 0$. Ta chỉ cần chỉ ra $A = \frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \frac{1}{2}$, $c = d = 0$.

Vậy max $A = \frac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \frac{1}{2}$, $c = d = 0$.

Cách 2.

$$A = ab + bc + cd \le ab + ad + bc + cd = (a + c)(b + d).$$

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ tạ có :

$$A = (a + c)(b + d) \le \left(\frac{a + c + b + d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = \dfrac{1}{2} \\ b + d = \dfrac{1}{2} \\ ad = 0 \\ a, b, c, d \ge 0 \end{cases}$$

Vậy max $A = \dfrac{1}{4}$ khi, chẳng hạn, $a = b = \dfrac{1}{2}$, $c = d = 0$.

V – BÀI TOÁN CỰC TRỊ VỚI SỐ TỰ NHIÊN

Ví dụ 120 (11). Tìm GTLN của biểu thức

$$A = \frac{y}{5 - (x + y)} \text{ với } x, y \text{ là các số tự nhiên.}$$

Giải : Ta có $x + y \ne 5$.

Xét $x + y \le 4$:

– Nếu $y = 0$ thì $A = 0$.

– Nếu $1 \le y \le 3$ thì $A = \dfrac{y}{5 - (x + y)} \le 3$.

– Nếu $y = 4$ thì $x = 0$ và $A = 4$.

Xét $x + y \ge 6$ thì $A = \dfrac{y}{5 - (x + y)} \le 0$.

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy max $A = 4$ khi và chỉ khi $x = 0$, $y = 4$.

Ví dụ 121 (11). Tìm GTNN và GTLN của tích xy, biết rằng x và y là các số nguyên dương thoả mãn $x + y = 2005$.

Giải : Ta có

$$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 2005^2 - (x-y)^2.$$

Giả sử $x > y$ (không thể xảy ra $x = y$). Ta có :

xy lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ nhỏ nhất ; xy nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x - y$ lớn nhất.

Do $1 \le y < x \le 2004$ nên $1 \le x - y \le 2003$.

Ta có : $\min(x - y) = 1$ khi và chỉ khi $x = 1003$, $y = 1002$.

$\max(x - y) = 2003$ khi và chỉ khi $x = 2004$, $y = 1$.

Do đó : $\max(xy) = 1005\,006$ khi và chỉ khi $x = 1003$, $y = 1002$.

$\min(xy) = 2004$ khi và chỉ khi $x = 2004$, $y = 1$.

Ví dụ 122 (11). Tìm GTNN của biểu thức

$$A = \left|11^m - 5^n\right| \text{ với m, n là các số nguyên dương.}$$

Giải : Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, còn 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4.

Ta chỉ ra một trường hợp $A = 4$: với $m = 2$, $n = 3$ thì $A = |121 - 125| = 4$.

Như vậy $\min A = 4$ khi, chẳng hạn, $m = 2$, $n = 3$.

Bài tập

418(11). a) Tìm GTNN của $A = x^2 - 5x + 1$.

b) Tìm GTLN của $B = 1 - x^2 + 3x$.

419(11). Tìm GTNN của các biểu thức :

a) $A = (x+8)^4 + (x+6)^4$;

b) $B = (0{,}5x^2 + x)^2 - 3\left|0{,}5x^2 + x\right|$;

c) $C = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$;

d) $D = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$;

e) $E = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$;

g) $G = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$.

420(11). Tìm GTNN của các biểu thức :

a) $A = |x - 3| + |x - 7|$;

b) $B = |2x - 3| + |2x - 1|$;

c) $|x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$;

d) $D = |x^2 + x + 3| + |x^2 + x - 6|$.

421(11). Cho $x + 2y = 1$. Tìm GTNN của $x^2 + 2y^2$.

422(11). Cho $4x - 3y = 7$. Tìm GTNN của $2x^2 + 5y^2$.

423(11). Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $a^4 + b^4$.

424(11). Cho $a + b = 1$. Tìm GTNN của $a^3 + b^3$.

425(11). Cho $xy = 1$. Tìm GTNN của $|x + y|$.

426(11). Tìm GTNN của các biểu thức :

a) $A = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$;

b) $B = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$;

c) $C = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$;

d) $D = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$;

e*) $E = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$.

427(11). Tìm GTNN của

a) $A = \dfrac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 2x + 5}$; b) $B = \dfrac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22}$;

c) $C = \dfrac{x^6 + 27}{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 9}$; d) $D = \dfrac{x^6 + 512}{x^2 + 8}$.

428(11). Tìm GTNN của

a) $A = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$; b) $B = \dfrac{4x^2 - 6x + 1}{(2x - 1)^2}$.

429(11). Tìm GTLN của

a) $A = \dfrac{x}{(x + 10)^2}$; b) $B = \dfrac{x}{(x + 100)^2}$.

430(11). Tìm GTNN và GTLN của

a) $A = \dfrac{27 - 12x}{x^2 + 9}$; b) $B = \dfrac{8x + 3}{4x^2 + 1}$;

c) $C = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$; d) $D = \dfrac{3x^2-2x+3}{x^2+1}$.

431(11). a) Tìm GTNN của $A = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2xy+y^2}$;

b) Tìm GTLN của $B = \dfrac{x^2}{x^4+1}$;

c) Tìm GTNN của $C = \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

432(11). Tìm GTNN của

a) $A = \dfrac{(x+4)(x+9)}{x}$ với $x > 0$; b) $B = \dfrac{(x+100)^2}{x}$ với $x > 0$;

c) $C = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x-2}$ với $x > 2$;

d) $D = \dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$ với $x > 0$.

433(11). Cho $x + y = 1$, $x > 0$, $y > 0$. Tìm GTNN của

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

b) $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho) ;

c) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$.

434 (11). Tìm GTNN của : $x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ với x và y cùng dấu.

435 (11). Cho các số dương x và y thoả mãn $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}$. Tìm GTNN của

a) $A = xy$; b) $B = x + y$.

436(11). Tìm GTNN của

a) $A = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ với a, b > 0 ;

b) $B = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ với a , b, c > 0 ;

c) $C = (a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ với a , b, c, d > 0.

437*(11). Cho a, b, c là các số dương. Tìm GTNN của

a) $A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$;

b) $B = \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a} + \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{b} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c}$.

438*(11). a) Cho các số dương x, y, z có tổng bằng 1. Tìm GTNN của

$$A = \frac{x+y}{xyz}.$$

b) Cho các số dương x, y, z, t có tổng bằng 2. Tìm GTNN của

$$B = \frac{(x+y+z)(x+y)}{xyzt}.$$

439*(11). Tìm GTNN của $A = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$ biết rằng x, y, z là các số dương và $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

440*(11). a) Tìm GTLN của tích xy với x, y là các số dương, $y \geq 60$ và $x + y = 100$.

b) Tìm GTLN của tích xyz với x, y, z là các số dương, $z \geq 60$ và $x + y + z = 100$.

441(11). Tìm GTNN của $A = \frac{x}{y} + \frac{z}{t}$; biết rằng $1 \leq x \leq y \leq z \leq t \leq 25$.

442(11). Tìm GTLN của

a) $A = (x + z)(y + t)$ biết rằng $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$;

b*) $B = (x + z)(y + t)$ biết rằng $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1$.

443(11). Tìm GTNN của

a) $A = |x-2| + |x-3| + |x-4|$;

b) $B = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$.

444(11). Tìm GTLN

$$A = |x-y| + |x-z| + |y-z| \text{ với } 0 \le x, y, z \le 3.$$

Bài toán cực trị với số tự nhiên

445*(11). Tìm GTLN của $A = \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{8-(x+y)}$ với $x, y \in \mathbf{N}$.

446*(11). Tìm GTNN của $A = |36^m - 5^n|$ với m, n là các số nguyên dương.

447(11). Tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + 4y$, biết rằng x, y là các số tự nhiên và A không phải là số chính phương.

448(11). Cho các số nguyên a, b, c, d thoả mãn $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 100$. Tìm GTLN của a.

449(11). Cho $A = \dfrac{x^4 + y^4}{15}$ trong đó x, y và A là các số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng x và y đều chia hết cho 5.

c) Tìm GTNN của A.

450*(11). Tìm GTNN của $A = \dfrac{(x+y)^4}{x^3}$ trong đó x, y là các số nguyên dương và A là số tự nhiên lẻ.

451*(11). Cho dãy (1) gồm 50 số hạng :

$$20 + 1^2,\ 20 + 2^2,\ 20 + 3^2,\ 20 + 4^2,\ \ldots,\ 20 + 50^2.$$

Xét dãy (2) gồm 49 số, là ƯCLN của mỗi số hạng của dãy (1), không kể số hạng cuối cùng, với số hạng đứng liền sau nó trong dãy ấy. Số lớn nhất trong dãy (2) là bao nhiêu ?

452*(11). a) Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho số 2005 viết được dưới dạng tổng của n hợp số.

b) Cũng hỏi như câu a, nhưng thay 2005 bởi 2007.

453*(11). Cho sáu chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dùng sáu chữ số này viết thành hai số có ba chữ số. Chứng minh rằng trong tất cả các cặp hai số được viết, cặp hai số 135 và 246 có tích nhỏ nhất.

454*(11). Tìm số chính phương lớn nhất, biết rằng nếu xoá hai chữ số tận cùng của nó (hai chữ số này không cùng bằng 0), ta lại được một số chính phương.

Bài đọc thêm

PHƯƠNG TRÌNH, MỘT SẢN PHẨM CỦA TRÍ TUỆ CON NGƯỜI

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán cổ quen thuộc :

Vừa gà vừa chó
Ba mươi sáu con
Bó lại cho tròn
Đếm đủ trăm chân
Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó ?

Lời giải bài toán bằng phương pháp số học :

Ta tạm giả thiết rằng tất cả 36 con đều là gà thì số chân có : 2.36 = 72 (chân)

So với đề bài thì số chân hụt đi : 100 – 72 = 28 (chân)

Theo cách giả thiết tạm như trên thì mỗi con chó bị hụt đi : 4 – 2 = 2 (chân)

Vậy số chó là 28 : 2 = 14 (con) ;

Số gà là : 36 – 14 = 22 (con)

Ta xét thêm một lời giải khác : Ta giả sử số gà và số chó đều là 18 con thì tổng số chân là :

$$2.18 + 4.18 = 36 + 72 = 108, \text{ vượt quá } 100.$$

Số gà phải lớn hơn 18. Giả sử số gà là 23 con thì số chó là : 36 – 23 = 13 (con), tổng số chân là :

$$2.23 + 4.13 = 46 + 52 = 98, \text{ ít hơn } 100.$$

Số gà phải nhỏ hơn 23 và lớn hơn 18. Giả sử số gà là 21 con thì số chó là : 36 – 21 = 15 (con), tổng số chân là :

$$2.21 + 4.15 = 42 + 60 = 102, \text{ vượt quá } 100.$$

Số gà phải lớn hơn 21 và nhỏ hơn 23. Số gà là 22 con, số chó là : 36 – 22 = 14 (con), tổng số chân là :

$$2.22 + 4.14 = 44 + 56 = 100, \text{ đúng với đề bài.}$$

Lời giải trên mang tính mò mẫm và phải thử chọn, tuy nhiên nó gợi cho ta một ý tưởng mới : Nếu gọi số gà là G thì số chó là 36 – G, ta phải có :

$$2 . G + 4 (36 - G) = 100.$$

Việc tìm giá trị của G trong đẳng thức trên không có gì khó khăn. Phương pháp giải như trên chính là *phương pháp giải bằng cách lập phương trình.* Phương pháp này không đòi hỏi những mẹo riêng để giải từng bài toán, đường lối để giải hết sức rõ ràng : ta chỉ cần viết được đẳng thức thể hiện quan hệ giữa số phải tìm và các số đã biết, và nếu giải được phương trình (điều này không có gì khó khăn) là ta giải được bài toán.

Giải toán bằng phương pháp đại số khác với giải toán bằng phương pháp số học ở chỗ người ta đưa vào đại lượng chưa biết, quan hệ giữa đại lượng chưa biết và các đại lượng đã biết dẫn đến phương trình, rồi từ việc giải phương trình mà tìm ra chính đại lượng chưa biết. Trong cuốn *Số học phổ thông,* Niu-tơn đã viết : Lập phương trình chính là "phiên dịch từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ đại số". Chúng ta lấy ví dụ sau đây do chính Niu-tơn nêu ra trong cuốn sách trên :

Ngôn ngữ thông thường	Ngôn ngữ đại số
Một nhà buôn có một số tiền	x
Năm đầu tiên ông ta tiêu hết 100 bảng của số tiền này	$x - 100$
Ông ta tăng thêm một phần ba số tiền còn lại	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3}$ hay $\frac{4x - 400}{3}$
Năm thứ hai ông ta tiêu thêm 100 bảng	$\frac{4x - 400}{3} - 100$ hay $\frac{4x - 700}{3}$
Sau đó ông ta tăng thêm một phần ba số tiền còn lại	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9}$ hay $\frac{16x - 2800}{9}$
Năm thứ ba ông ta tiêu thêm 100 bảng nữa	$\frac{16x - 2800}{9} - 100$ hay $\frac{16x - 3700}{9}$
Ông ta lại tăng thêm một phần ba số tiền còn lại	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27}$ hay $\frac{64x - 14800}{27}$
Thế là ông ta giàu gấp đôi lúc khởi đầu	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$

Để tìm số tiền ban đầu, chỉ cần giải phương trình trên.

Loài người đã biết giải phương trình khá sớm. Người Ba-bi-lon, người Ai Cập đã giải các phương trình bậc nhất và cả phương trình bậc hai từ nhiều thế kỉ trước Công nguyên. Người Hi Lạp coi trọng Hình học, ít chú ý đến Số học và Đại số, tuy nhiên trong cuốn *Số học* của Đi-ô-phăng (thế kỉ II – III) còn lưu lại nhiều phương trình bậc nhất, bậc hai và phương trình vô định.

Ở Trung Á, các nhà toán học đã có nhiều đóng góp to lớn cho sự phát triển của Đại số. Đầu thế kỉ IX, nhà toán học Al-Khôvarizmi (Al-Khowârizmi) đã viết một cuốn sách nổi tiếng về phương pháp "phục hồi" (al-giép) và phương pháp "so sánh" (al-mukabala), phương pháp "phục hồi" tương tự việc chuyển vế và đổi dấu một hạng tử, phương pháp "so sánh" tương tự việc thu gọn các hạng tử đồng dạng. Từ "al -giép" sau này trở thành tên gọi của môn Đại số (tiếng Anh : *Algebra,* tiếng Pháp : *Algèbre*).

Al - Khôvarizmi

Các nhà toán học Trung Quốc cũng đạt được nhiều thành tựu về phương trình. Trong cuốn *Cửu chương toán thuật* (xuất hiện khoảng thế kỉ I và đến năm 263 được Lưu Huy thời Tam quốc chú thích cho hoàn chỉnh), chương thứ tám của cuốn sách là chương *Phương trình*. Từ "phương trình" có nguồn gốc là do người Trung Quốc viết các hệ số của ẩn vào các ô vuông *(phương)*, các số trong ô vuông đó được tính toán theo một trình tự, một quy tắc *(trình)*.

Các phương trình trước kia chưa được viết gọn như ngày nay. Chẳng hạn phương trình $3x^2 = 2x^2 + 2x - 1$, theo cách viết của Bra-ma-gúp-ta (Ấn Độ) thế kỉ VII có dạng sau :

ia va 3

ia va 2 ia 2 ru •1

(số 1 có dấu chấm đứng trước để chỉ số −1)

Theo tiếng Việt : ẩn bình phương 3

ẩn bình phương 2, ẩn 2, hạng tử tự do −1.

Đến năm 1545, Cac-đa-nô (I-ta-li-a) còn viết phương trình $x^3 + 2x = 3$ như sau :

cubus. $\overline{\text{p}}$.2. positionibus xquantur 3

(Theo tiếng Việt : lập phương của ẩn cộng 2 ẩn bằng 3).

Nhiều nhà toán học đã đưa ra những kí hiệu để viết gọn các bài toán và các phương trình : dấu cộng và trừ (+, −) bởi Uýt-man (*Widman*, người Tiệp) năm 1489, dấu nhân (×) bởi Ô-tơ-rit (Oughtred, người Anh) năm 1631, dấu nhân và chia (., :) bởi Lep-nit (Leibniz, người Đức) năm 1698, dấu bằng (=) bởi Ri-co (*Recorde,* người Anh) năm 1557, số mũ của luỹ thừa (x^2, x^3,...) bởi Đề-cac (*Descartes,* người Pháp) năm 1637.

Ngoài phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai, người ta còn tìm ra cách giải các phương trình bậc ba, bậc bốn và nghiên cứu vấn đề giải các phương trình có bậc cao hơn bốn (xem *Nâng cao và phát triển Toán 9* tập hai).

Có thể nói phương trình là một sản phẩm của trí tuệ con người, và các phương trình ngày càng có vai trò quan trọng không chỉ trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên mà còn trong cả lĩnh vực khoa học xã hội.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§13. ĐỊNH LÍ TA-LÉT

Chương III bắt đầu bằng việc nghiên cứu *tỉ số của hai đoạn thẳng,* đó là tỉ số các độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

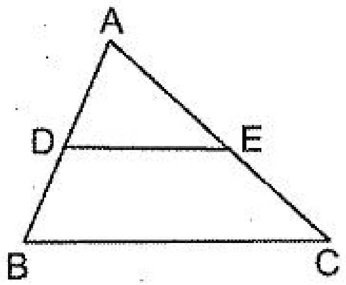
Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\frac{m}{n} > 0$, tồn tại duy nhất một điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$. Điểm C gọi là *điểm chia trong* đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n}$ (khi đó điểm C chia trong đoạn thẳng BA theo tỉ số $\frac{n}{m}$).

Cho đoạn thẳng AB và một tỉ số $\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} > 0,\ \frac{m}{n} \neq 1\right)$, tồn tại duy nhất một điểm D thuộc đường thẳng AB nhưng nằm ngoài đoạn thẳng AB sao cho $\frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$. Điểm D gọi là *điểm chia ngoài* đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{m}{n}$ (khi đó điểm D chia ngoài đoạn thẳng BA theo tỉ số $\frac{n}{m}$).

Trên hình 1, điểm C chia trong đoạn AB theo tỉ số 1 : 2, điểm D chia ngoài AB theo tỉ số 1 : 2.

Hình 1

Nếu $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ thì ta có các *cặp đoạn thẳng tỉ lệ :* cặp đoạn thẳng AB và CD tỉ lệ với cặp đoạn thẳng A'B' và C'D'. *Định lí Ta-lét* cho ta các cặp đoạn



Hình 2

thẳng tỉ lệ : Đường thẳng song song với một cạnh của tam giác thì định ra trên hai đường thẳng chứa hai cạnh kia các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ (do đó tạo với các đường thẳng chứa hai cạnh kia một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác ban đầu).

$$DE \,//\, BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ (h.2)}$$

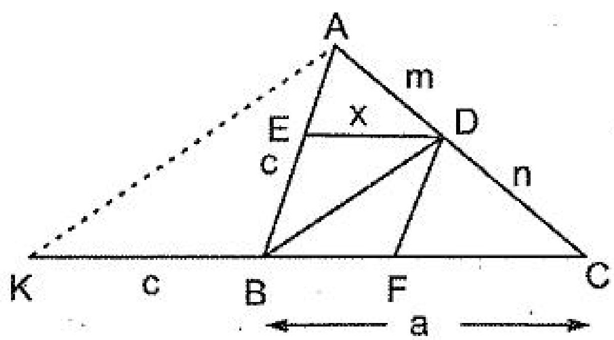
Ví dụ 31. Cho hình thoi BEDF nội tiếp tam giác ABC (E thuộc AB, D thuộc AC, F thuộc BC).

a) Tính cạnh hình thoi biết AB = 4cm, BC = 6cm ; Tổng quát với AB = c, BC = a.

b) Chứng minh rằng $BD < \frac{2ac}{a + c}$ với AB = c, BC = a.

c) Tính độ dài AB, BC, biết AD = m, DC = n, cạnh hình thoi bằng d.

Giải : (h.3)



Hình 3

a) Gọi cạnh hình thoi là x. Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔABC với ED // BC ta có :

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4 - x}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2{,}4 \text{ cm.}$$

Tổng quát, $x = \dfrac{ac}{a + c}$.

b) Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho BK = BA. Ta có ΔABK cân, từ đó BD // KA. Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔCAK với BD // KA ta có :

$$\frac{BD}{AK} = \frac{CB}{CK} \Rightarrow \frac{BD}{AK} = \frac{a}{a + c}. \qquad (1)$$

Trong ΔABK, ta có :

$$AK < AB + BK = c + c = 2c. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$BD < \frac{a}{a + c}.2c = \frac{2ac}{a + c}.$$

c) Áp dụng định lí Ta-lét vào ΔABC với $ED \parallel BC$ ta có :

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{d}{BC} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow BC = \frac{d(m+n)}{m}.$$

Tương tự $AB = \dfrac{d(m+n)}{n}$.

Chú ý : Từ kết quả của câu b, ta có :

$$\frac{1}{BD} > \frac{a+c}{2ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right).$$

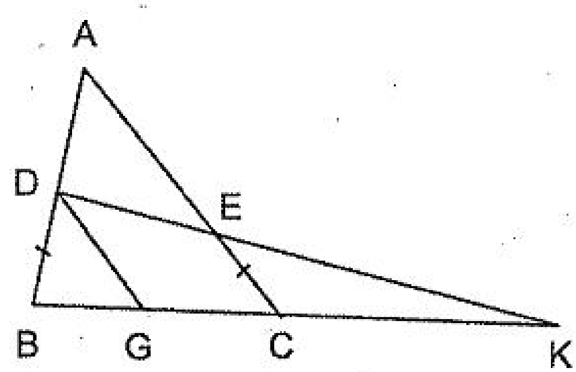
Do đó, nếu gọi AM, BD, CN là các đường phân giác của ΔABC và $AC = b$ thì

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{BD} + \frac{1}{CN} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ví dụ 32. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tuỳ ý theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng DE, BC. Chứng minh rằng tỉ số $\dfrac{KE}{KD}$ không phụ thuộc vào cách chọn các điểm D và E.

Gợi ý cách giải

Cách 1. Để làm xuất hiện một tỉ số bằng $\dfrac{KE}{KD}$ ta vẽ qua D đường thẳng $DG \parallel AC$ (h.4).

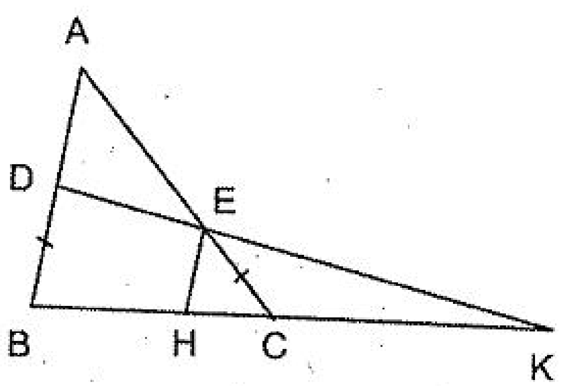


Hình 4

Theo định lí Ta-lét, ta có :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{KC}{KG}, \quad \frac{KE}{KD} = \frac{EC}{DG}.$$

Trong hai tỉ số trên, ta chú ý đến tỉ số sau, vì độ dài EC được nêu trong giả thiết ($EC = BD$).



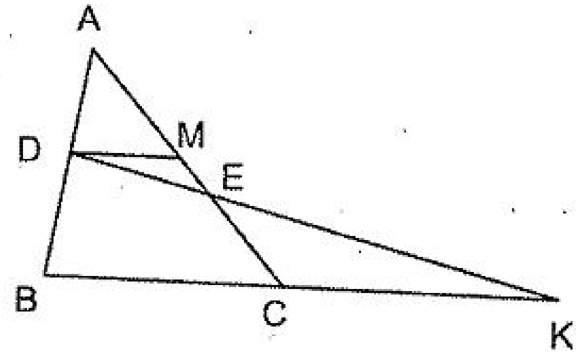
Hình 5

Ta thay $\dfrac{EC}{DG}$ bằng $\dfrac{BD}{DG}$ và tỉ số này bằng $\dfrac{BA}{AC}$ (vì $DG \parallel AC$).

Cách 2. Vẽ $EH \parallel AB$ (h.5) ta có :

$$\frac{KE}{KD} = \frac{EH}{BD} = \frac{EH}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Cách 3. Vẽ DM // BC (h.6). Bạn đọc tự giải.



Hình 6

Nhận xét :

Trong các bài tập vận dụng định lí Ta-lét, nhiều khi ta cần vẽ thêm một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

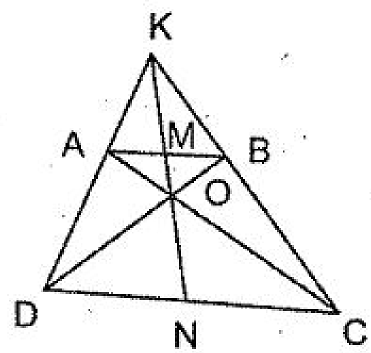
Đây là một cách vẽ đường phụ hay dùng, vì nhờ đó mà tạo thêm được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Ví dụ 33. Cho hình thang ABCD có AB // CD, AB < CD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, K là giao điểm của AD và BC. Đường thẳng KO cắt AB, CD theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{MA}{ND} = \dfrac{MB}{NC}$; b) $\dfrac{MA}{NC} = \dfrac{MB}{ND}$;

c) MA = MB, NC = ND.

Giải : (h.7)



Hình 7

a) Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác KDN, KNC với AB // CD, ta có :

$$\frac{MA}{ND} = \frac{KM}{KN}, \ \frac{MB}{NC} = \frac{KM}{KN}, \text{ suy ra } \frac{MA}{ND} = \frac{MB}{NC} \quad (1)$$

b) Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ONC, OND với AB // CD, ta có :

$$\frac{MA}{NC} = \frac{OM}{ON}, \ \frac{MB}{ND} = \frac{OM}{ON}, \text{ suy ra } \frac{MA}{NC} = \frac{MB}{ND} \quad (2)$$

c) Nhân từng vế (1) với (2) ta được :

$$\frac{MA^2}{ND.NC} = \frac{MB^2}{NC.ND}, \text{ suy ra } MA^2 = MB^2 \text{ tức là } MA = MB.$$

Từ đó NC = ND.

Nhận xét : Từ ví dụ trên, ta suy ra :

Trong hình thang có hai cạnh đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai cạnh đáy

Tính chất này có nhiều ứng dụng quan trọng, được gọi là *bổ đề hình thang*.

Bài tập

171. Trong hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 28cm, CD = 70cm, AD = 35cm, vẽ một đường thẳng song song với hai cạnh đáy, cắt AD, BC theo thứ tự ở E và F. Tính độ dài EF, biết rằng DE = 10cm.

172. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên AD, BC của hình thang ABCD. Đường thẳng đi qua O và song song với AB cắt các đường thẳng AC, BD theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng OM = ON.

173. Cho hình thang ABCD có các cạnh đáy AB = a, CD = b. Qua giao điểm O của hai đường chéo, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự ở E và G. Chứng minh rằng $\frac{1}{OE} = \frac{1}{OG} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

174. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Một đường thẳng d song song với hai cạnh đáy cắt hai cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N và cắt hai đường chéo BD, AC theo thứ tự ở H, K.

a) Chứng minh rằng MH = KN.

b) Hãy nêu cách dựng đường thẳng d sao cho MH = HK = KN.

175. Tam giác ABC có AC > AB, AC = 45cm. Hình chiếu của AC và AB trên BC theo thứ tự là 27cm và 15cm. Đường trung trực của BC cắt AC ở N. Tính độ dài CN.

176. Cho hình bình hành ABCD, điểm G chia trong cạnh DC theo tỉ số 1 : 2, điểm K chia trong cạnh BC theo tỉ số 3 : 2. Tính độ dài ba đoạn thẳng do AG, AK định ra trên BD, biết rằng BD = 16cm.

Vẽ đường thẳng song song trong các bài từ 177 đến 187 để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ

177. a) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, AB = 3cm, AC = 6cm.

Tính độ dài đường phân giác AD.

b) Cho tam giác ABC với đường phân giác AD thoả mãn $\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Tính số đo góc BAC.

178. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu một đường thẳng cắt cạnh AB ở D, cắt cạnh BC ở K, và cắt tia đối của tia CA ở E sao cho BD = CE thì tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không đổi.

179. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong cạnh BA theo tỉ số 1 : 2, điểm E chia trong cạnh AC theo tỉ số 2 : 5. Gọi F là giao điểm của các đường thẳng ED và BC. Tính tỉ số FB : FC.

180. Cho tam giác ABC, điểm D chia trong BC theo tỉ số 1 : 2, điểm O chia trong AD theo tỉ số 3 : 2. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số AK : KC.

181. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt AB ở K, đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt AM, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng DE = BK.

182. Tứ giác ABCD có E, F theo thứ tự là trung điểm của CD, CB ; O là giao điểm của AE, DF ; OA = 4OE, $OD = \frac{2}{3}OF$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

183. Đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh đối AB, CD của tứ giác ABCD cắt các đường thẳng AD và BC theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng

$$IA : ID = KB : KC.$$

184. a) Qua điểm M thuộc cạnh BC của tam giác ABC, vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia, chúng cắt AB, AC theo thứ tự ở H, K. Chứng minh rằng tổng $\frac{AH}{AB} + \frac{AK}{AC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên cạnh BC.

b) Xét trường hợp tương tự khi điểm M chạy trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn thẳng BC.

185. a) Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua trung điểm O của AM, vẽ đường thẳng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở B', C'. Chứng minh rằng khi đường thẳng thay đổi vị trí mà vẫn đi qua O thì tổng $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'}$ không đổi.

b) Tổng quát hoá bài toán trên khi O là một điểm cố định trên đoạn thẳng AM.

186. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho BD = 2DC. Chứng minh rằng BM vuông góc với AD.

187. Cho tam giác ABC vuông tại A. Các điểm D, E thuộc cạnh BC sao cho BD = DE = EC. Biết AD = 10cm, AE = 15cm. Tính độ dài BC.

188. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân tại B, ACF vuông cân tại C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng :

a) AH = AK.

b) $AH^2 = BH . CK$.

189. Tứ giác ABCD có M là trung điểm của CD, N là trung điểm của CB. Biết rằng AM và AN cắt đường chéo BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

190. Trên cạnh BC của hình vuông ABCD cạnh 6, lấy điểm E sao cho BE = 2. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CF = 3. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính $\widehat{AMC}$.

191. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng cắt các cạnh BC, AC theo thứ tự ở D, E và cắt đường thẳng BA ở F. Vẽ hình bình hành BDEH. Đường thẳng đi qua F và song song với BC cắt HA ở I. Chứng minh rằng FI = DC.

192. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Qua điểm I thuộc đoạn thẳng AD, kẻ IH vuông góc với AB, IK vuông góc với AC. Gọi N là giao điểm của HK và AM. Chứng minh rằng NI vuông góc với BC.

193. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, trực tâm H. Một đường thẳng đi qua H cắt AB, AC theo thứ tự ở P, Q sao cho HP = HQ. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng HM vuông góc với PQ.

Hướng dẫn : Qua C vẽ đường thẳng song song với PQ, cắt AB ở N. Chứng minh rằng HM vuông góc với NC.

194. Hình chữ nhật ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kì thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng NM là tia phân giác của góc KNE.

195. Cho hình bình hành ABCD, điểm M thuộc cạnh BC, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho BN = CM. Các đường thẳng DN, DM cắt AB theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng $AE^2 = EB.EF$.

196. Một đường thẳng đi qua đỉnh A của hình bình hành ABCD cắt BD, BC, DC theo thứ tự ở E, K, G. Chứng minh rằng :

a) $AE^2 = EK . EG$;

b) $\dfrac{1}{AE} = \dfrac{1}{AK} + \dfrac{1}{AG}$;

c) Khi đường thẳng thay đổi vị trí nhưng vẫn đi qua A thì tích BK. DG có giá trị không đổi.

197. Cho tam giác đều ABC. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho AD = CE. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MH song song với CD (H thuộc AB), vẽ MK song song với BE (K thuộc AC). Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì tổng MH + MK có giá trị không đổi.

198. Cho tam giác đều ABC, trọng tâm G, M là một điểm bất kì nằm bên trong tam giác. Đường thẳng MG cắt các đường thẳng BC, AC, AB theo thứ tự ở A', B', C'. Chứng minh rằng

$$\frac{A'M}{A'G}+\frac{B'M}{B'G}+\frac{C'M}{C'G}=3.$$

199. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo cùng một tỉ số. Chứng minh rằng : AE = DF, AE vuông góc với DF.

200. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có diện tích S, $AB=\frac{2}{3}CD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Tính diện tích tứ giác EMFN theo S.

201*. a) Cho hình bình hành ABCD, M là trung điểm của BC. Điểm N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2$. Gọi giao điểm của AM, AN với BD là P, Q. Chứng minh rằng $S_{APQ}=\frac{1}{2}S_{AMN}$.

b) Chứng minh rằng kết luận ở câu a vẫn đúng nếu thay điều kiện "M là trung điểm của BC, N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2$" bởi điều kiện tổng quát hơn "M trên cạnh BC, N trên cạnh CD sao cho $\frac{CN}{ND}=2.\frac{BM}{MC}$".

202. Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng thay đổi vị trí nhưng luôn đi qua M cắt các tia Ox, Oy theo thứ tự ở A, B. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác MOA, MOB. Chứng minh rằng tổng $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}$ có giá trị không đổi.

Hướng dẫn : Xét vị trí giới hạn của đường thẳng khi nó song song với Ox để dự đoán giá trị không đổi.

203*. Cho góc xOy. Các điểm A và B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox và Oy sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$ (k là hằng số). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

204*. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc cạnh BC sao cho $\frac{DE}{DA} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EF với BD, AC. Chứng minh rằng EM = NF.

205. a) Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm A' sao cho BA' : A'C = 3. Trên cạnh CA lấy điểm B' sao cho CB' : B'A = 1 : 3. Gọi C' là giao điểm của A'B' và AB. Chứng minh rằng C' là trung điểm của AB.

b) Chứng minh bài toán tổng quát : Nếu một đường thẳng không đi qua các đỉnh của tam giác ABC và cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự ở A', B', C' thì $\frac{AB'}{B'C} . \frac{CA'}{A'B} . \frac{BC'}{C'A} = 1$ (định lí Mê-nê-la-uýt).

Mê-nê-la-uýt, nhà toán học Hi Lạp thế kỉ I – II.

206. a) Chứng minh rằng nếu trên các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC, ta lấy các điểm tương ứng A', B', C' sao cho AA', BB', CC' đồng quy thì $\frac{AB'}{B'C} . \frac{CA'}{A'B} . \frac{BC'}{C'A} = 1$ (định lí Xê-va).

Xê-va (Céva, 1648 – 1734), nhà toán học I-ta-li-a.

b) Chứng minh rằng kết luận trên vẫn đúng nếu các điểm A', B', C' thuộc các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác, trong đó có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.

207. Cho tam giác ABC. Tâm O của các hình chữ nhật MNPQ thay đổi nhưng luôn có M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc BC, chuyển động trên đường nào ?

~ **Bài tập :** 362.

§14. ĐỊNH LÍ TA-LÉT ĐẢO

Định lí Ta-lét đảo cho ta một dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song :

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh ấy các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

Định lí vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng cắt phần kéo dài của hai cạnh của tam giác.

Ví dụ 34. Cho tứ giác ABCD, điểm M thuộc cạnh AB. Lần lượt vẽ ME song song với BD (E thuộc AD), EG song song với AC (G thuộc CD), GH song song với BD (H thuộc BC).

a) Chứng minh rằng MEGH là hình bình hành.

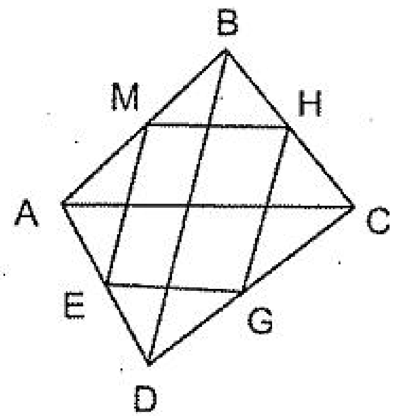
b) Tính chu vi tứ giác MEGH, nếu ABCD là hình chữ nhật có đường chéo bằng m.

Giải : a) (h.8) Ta có ME // BD, EG // AC, GH // BD nên áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ABD, ADC, BCD ta có

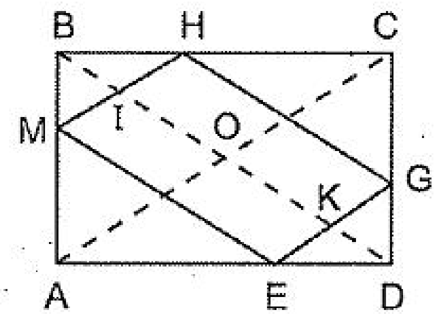
$$\frac{BM}{MA} = \frac{DE}{EA} = \frac{DG}{GC} = \frac{BH}{HC}.$$

Do đó MH // AC (định lí Ta-lét đảo).

Ta có MH // EG, ME // HG nên MEGH là hình bình hành.



Hình 8



Hình 9

b) (h.9). Gọi I , K là giao điểm của BD với MH, EG ; O là giao điểm của AC và BD. Ta có OA = OC nên dễ dàng chứng minh được IM = IH, KE = KG, suy ra IM = IH = BI, KE = KG = KD.

Do đó chu vi tứ giác MEGH bằng

$$2(IH + HG + GK) = 2(BI + IK + KD) = 2BD = 2m.$$

Ví dụ 35. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CA theo tỉ số 1 : 2. Các điểm I, K theo thứ tự chia trong các đoạn thẳng ED, FE theo tỉ số 1 : 2. Chứng minh rằng IK // BC.

Giải

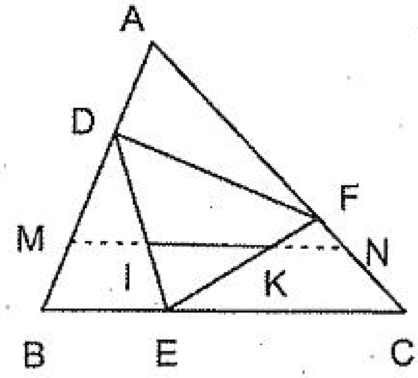
Cách 1. (h.10) Vẽ các điểm M, N theo thứ tự chia trong các đoạn thẳng BD, FC theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Ta có $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{EI}{ID}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$

nên MI // BE (định lí Ta-lét đảo).

$$\dfrac{FK}{KE} = \dfrac{FN}{NC}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$$

nên KN // EC (định lí Ta-lét đảo).



Hình 10

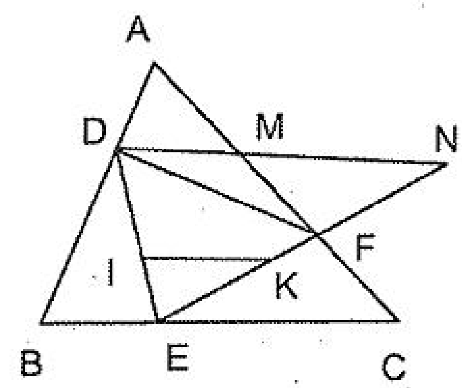
Ta lại có $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BM}{BD}.\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

$$\dfrac{CN}{CA} = \dfrac{CN}{CF}.\dfrac{CF}{CA} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$$

nên $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{CN}{CA}$, suy ra MN // BC (định lí Ta-lét đảo).

Từ MN // BC, MI // BC, NK // BC nên theo tiên đề Ơ-clit bốn điểm M, I, K, N thẳng hàng và IK // BC.

Cách 2. (h.11) Gọi M là trung điểm của AF. Gọi N là giao điểm của DM và EF.



Hình 11

Ta có $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AM}{MC}\left(= \dfrac{1}{2}\right)$

nên DM // BC (định lí Ta-lét đảo)

MN // EC, mà MF = FC nên EF = FN.

Ta có $\dfrac{EK}{EN} = \dfrac{EK}{EF}.\dfrac{EF}{EN} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$, mà $\dfrac{EI}{ED} = \dfrac{1}{3}$

nên $\dfrac{EK}{EN} = \dfrac{EI}{ED}$ suy ra IK // DN (định lí Ta-lét đảo).

Vậy IK // BC.

Bài tập

208. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh rằng IK // AB.

b) Đường thẳng IK cắt AD , BC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng

$$EI = IK = KF.$$

209. Điểm E thuộc cạnh bên BC của hình thang ABCD. Vẽ đường thẳng đi qua C và song song với AE, cắt AD ở K. Chứng minh rằng BK song song với DE.

210. Cho tam giác ABC, điểm I thuộc cạnh AB, điểm K thuộc cạnh AC. Vẽ IM // BK ($M \in AC$), vẽ KN // CI ($N \in AB$).

Chứng minh rằng MN // BC.

211. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt BD ở E. Đường thẳng đi qua B và song song với AD cắt AC ở G.

a) Chứng minh rằng EG song song với DC.

b) Giả sử AB song song với CD. Chứng minh rằng $AB^2 = EG \cdot DC$.

212. Tứ giác ABCD có AC vuông góc và bằng BD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự chia trong các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số 1 : 2. Chứng minh rằng EG = FH, EG vuông góc với FH.

213*. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA. Chứng minh rằng bốn điểm I, K, M, N thẳng hàng.

214. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC, điểm M nằm giữa A và D. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của MB, MC. Gọi E là giao điểm của DI và AB, gọi F là giao điểm của DK và AC. Chứng minh rằng EF // IK.

215*. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD, CE. Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MG song song với BD (G thuộc AC), vẽ MH song song với CE (H thuộc AB).

a) Chứng minh rằng BD và CE chia HG thành ba phần bằng nhau.

b) Chứng minh rằng OM đi qua trung điểm của HG (O là trọng tâm ΔABC).

216*. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Các điểm M, N thuộc các cạnh AD, BC sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NB}$. Gọi các giao điểm của MN với BD, AC theo thứ tự là E, F. Qua M kẻ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở H.

a) Chứng minh rằng HN // BD.

b) Gọi I là giao điểm của HO và MN. Chứng minh rằng IE = IF, ME = NF (O là giao điểm hai đường chéo AC và BD).

217*. Cho tam giác ABC cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC, E là trọng tâm của tam giác ABM. Chứng minh rằng EO vuông góc với BM.

218*. Chia mỗi cạnh của một tứ giác thành ba phần bằng nhau rồi nối các điểm chia tương ứng trên các cạnh đối diện, ta được bốn đoạn thẳng (hai đoạn thẳng nối các điểm chia tương ứng trên một cặp cạnh đối thì không cắt nhau). Chứng minh rằng :

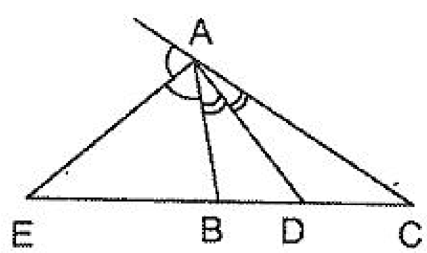
a) Mỗi đoạn thẳng trong bốn đoạn thẳng ấy đều bị chia thành ba phần bằng nhau.

b) Diện tích tứ giác ở giữa bằng $\frac{1}{9}$ diện tích tứ giác ban đầu.

§15. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Đường phân giác của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn thẳng ấy.

AD là đường phân giác của góc A $\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (h.12)



Hình 12

Đường phân giác góc ngoài của tam giác cũng có tính chất tương tự :

AE là tia phân giác ngoài của góc A

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \text{ (h.12)}$$

Ta có thể nói : Nếu tam giác ABC có $\frac{AB}{AC} = k$ thì đường phân giác trong của góc A chia trong đoạn thẳng BC theo tỉ số k, và nếu $k \neq 1$ thì đường phân giác ngoài của góc A chia ngoài đoạn thẳng BC cũng theo tỉ số k.

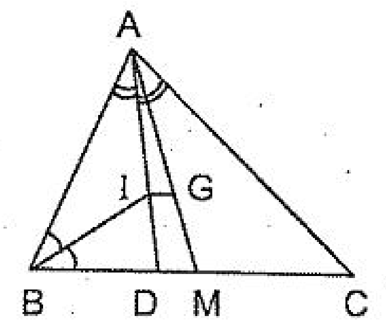
Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c, đường phân giác AD.

a) Tính các độ dài BD, DC.

b) Tia phân giác của góc B cắt AD ở I. Tính tỉ số AI : ID.

c) Cho BC bằng trung bình cộng của AB và AC, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng IG // BC.

Giải : (h.13)



Hình 13

a) AD là đường phân giác của ΔABC nên

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Suy ra

$$\frac{BD}{BD + DC} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow BD = \frac{ac}{c+b}$$

Do đó $DC = a - \dfrac{ac}{c+b} = \dfrac{ab}{c+b}$.

b) BI là đường phân giác của ΔABD nên

$$AI : ID = AB : BD = c : \frac{ac}{c+b} = \frac{c+b}{a}.$$

c) Theo câu b ta có $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{c+b}{a}$. Nếu $a = \dfrac{b+c}{2}$ thì $\dfrac{AI}{ID} = 2$.

Ta lại có $\dfrac{AG}{GM} = 2$ (M là trung điểm của BC).

Như vậy $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{AG}{GM}$, suy ra IG // DM, tức là IG // BC.

Cách khác giải câu c mà không dùng kết quả của các câu a và b :

Kẻ $II' \perp BC$. Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a+b+c}{2}.II'$. Nếu $b + c = 2a$ thì $S_{ABC} = \dfrac{3a}{2}.II'$.

Ta lại có $S_{IBC} = \dfrac{a}{2}.II'$. Do đó

$$S_{IBC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \qquad (1)$$

Dễ chứng minh
$$S_{GBC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{IBC} = S_{GBC}$, từ đó IG // BC.

Bài tập

219. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết AD = 3cm, DC = 5cm. Tính các độ dài AB, BC.

220. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho BM = BD, CN = CD. Chứng minh rằng MN song song với BC.

221. Cho tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 6cm, đường phân giác AD. Điểm O chia trong AD theo tỉ số 2 : 1. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số AK : KC.

222. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc AMB, AMC cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E.

a) Chứng minh rằng DE song song với BC.

b) Cho BC = a, AM = m. Tính độ dài DE.

c) Giao điểm I của AM và DE chuyển động trên đường nào nếu tam giác ABC có BC cố định, đường trung tuyến AM bằng m không đổi ?

d) Tam giác ABC có điều kiện gì để DE là đường trung bình của tam giác đó ?

223. Trong tam giác ABC, đường phân giác AD chia cạnh đối diện thành các đoạn thẳng BD = 2cm, DC = 4cm. Đường trung trực của AD cắt đường thẳng BC ở K. Tính độ dài KD.

224. Cho tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 12cm, BC = 10cm. Gọi I là giao điểm của các đường phân giác, G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng IG // BC.

b) Tính độ dài IG.

225. Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N. Chứng minh rằng MN // CD.

226. Cho tam giác ABC có các đường phân giác BE, CF cắt nhau ở O và $\frac{BO}{BE}.\frac{CO}{CF}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

227*. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng AB = 14cm, AC = 35cm, đường phân giác AD bằng 12cm.

Hướng dẫn : Vẽ DE // AB và tính diện tích tam giác ADE.

228. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c (b > c), các đường phân giác BD, CE.

a) Tính các độ dài CD, BE rồi suy ra CD > BE.

b) Vẽ hình bình hành BEKD. Chứng minh rằng CE > EK.

c) Chứng minh rằng CE > BD.

~ **Bài tập :** 332.

§16. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

Hai tam giác *đồng dạng* với nhau nếu :

– Ba cạnh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia (trường hợp cạnh – cạnh – cạnh).

– Hai cạnh của tam giác này tương ứng tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và các góc xen giữa hai cạnh ấy bằng nhau (trường hợp cạnh – góc – cạnh).

– Hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia (trường hợp góc – góc).

Ví dụ 37. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Giả sử AC = b, AB = c, DB = m, DC = n. Kẻ tia Cx sao cho $\widehat{DCx} = \widehat{BAD}$ (tia Cx khác phía với A đối với BC).

a) Chứng minh rằng AD. DI = mn.

b) Chứng minh rằng $AD^2 = bc - mn$.

Giải : (h.14)

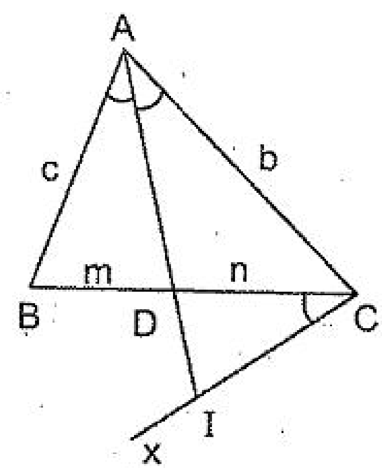
a) Xét ΔABD và ΔCID, ta có :

$$\widehat{BAD} = \widehat{ICD} \text{ (giả thiết)},$$

$$\widehat{BDA} = \widehat{IDC} \text{ (đối đỉnh)}.$$

Do đó ΔABD và ΔCID đồng dạng (g.g), suy ra $\hat{B} = \hat{I}$, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{CD}{ID}$, từ đó

$$AD.DI = DB.DC = mn. \qquad (1)$$



Hình 14

b) Xét ΔABD và ΔAIC, ta có :

$$\widehat{BAD} = \widehat{IAC} \text{ (theo giả thiết)}$$

$$\hat{B} = \hat{I} \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó ΔABD và ΔAIC đồng dạng (g.g), suy ra $\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AD}{AC}$, từ đó

$$AD.\ AI = AC.\ AB = bc \qquad (2)$$

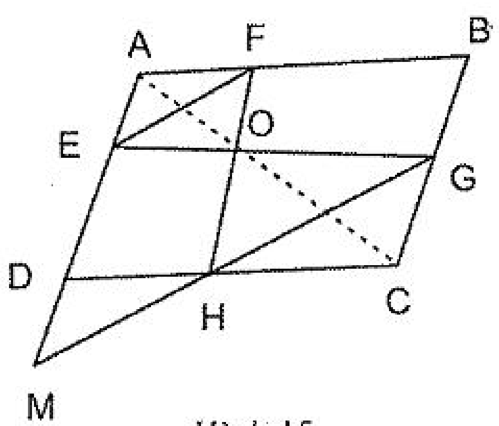
Từ (1) và (2) suy ra

$$AD.AI - AD.DI = bc - mn \Rightarrow AD\,(AI - DI) = bc - mn$$

$$\Rightarrow AD^2 = bc - mn.$$

Ví dụ 38. Một hình thang có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của một hình bình hành. Chứng minh rằng tồn tại một đường chéo của hình bình hành đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang.

Giải : Gọi O là giao điểm các đường chéo EG và FH của hình thang EFGH nội tiếp hình bình hành ABCD (h.15).



Hình 15

Xét ΔOEF và ΔOGH, ta có EF // GH nên ΔOEF và ΔOGH đồng dạng, suy ra

$$\frac{OE}{OG} = \frac{EF}{GH}. \qquad (1)$$

Xét ΔAEF và Δ CGH, ta có

$\widehat{A} = \widehat{C}$ (góc đối của hình bình hành)

$\widehat{AEF} = \widehat{CGH}$ (cùng bằng $\widehat{M}$).

Do đó ΔAEF và ΔCGH đồng dạng (g.g), suy ra

$$\frac{AE}{CG} = \frac{EF}{GH}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$.

Xét ΔAOE và ΔCOG, ta có :

$\dfrac{AE}{CG} = \dfrac{OE}{OG}$ (chứng minh trên) ;

$\widehat{AEO} = \widehat{CGO}$ (so le trong, AD // BC).

Do đó ΔAOE và ΔCOG đồng dạng(c.g.c), suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{COG}$.

Ta lại có $\widehat{AOE} + \widehat{AOG} = 180^o$ nên $\widehat{COG} + \widehat{AOG} = 180^o$.

Do đó ba điểm A, O, C thẳng hàng. Vậy đường chéo AC của hình bình hành ABCD đi qua giao điểm hai đường chéo của hình thang EFGH.

Bài tập

Trường hợp cạnh – cạnh – cạnh

229. Tứ giác ABCD có AB = 4cm, BC = 20cm, CD = 25cm, AD = 8cm, BD = 10cm. Hãy xác định dạng của tứ giác.

230. a) Hai tam giác sau có đồng dạng hay không nếu độ dài các cạnh của chúng bằng 8cm, 12cm, 18cm, và 27cm, 18cm, 12cm ?

b) Có thể khẳng định rằng hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau thì hai tam giác ấy bằng nhau hay không ?

231. Tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c và $a^2 = bc$. Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh bằng độ dài ba đường cao của tam giác ABC.

Trường hợp cạnh – góc – cạnh

232. Tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 6cm, BC = 8cm, M là trung điểm của BC, D là trung điểm của BM. Tính độ dài AD.

233. Tam giác ABC có AB = 12cm, AC = 18cm, BC = 27cm, điểm D thuộc cạnh BC sao cho CD = 12cm. Tính độ dài AD.

234. Tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 5cm , BC = 6cm. Chứng minh rằng $\widehat{A} = 2\widehat{C}$.

235. Cho hình thoi ABCD cạnh a có $\widehat{A} = 60^o$. Một đường thẳng bất kì đi qua C cắt tia đối của các tia đối của các tia BA và DA theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh rằng tích BM.DN có giá trị không đổi.

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\widehat{BKD}$.

Trường hợp góc – góc

236. Cho tam giác ABC (AB < AC) đường phân giác AD. Đường trung trực của AD cắt BC ở K.

a) Chứng minh rằng ΔKAB đồng dạng với ΔKCA.

b) Tính độ dài KD biết rằng BD = 2cm, DC = 4cm.

237. Cho tam giác ABC (AB ≤ AC), đường phân giác AD. Vẽ tia Dx sao cho $\widehat{CDx} = \widehat{BAC}$ (tia Dx và A cùng phía đối với BC), tia Dx cắt AC ở E. Chứng minh rằng :

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEC.

b) DE = DB.

238. Trên cạnh huyền CB của tam giác vuông ABC, lấy điểm D sao cho CD = CA. Gọi E là điểm đối xứng với D qua C.

a) Chứng minh rằng các tam giác ABD và EBA đồng dạng.

b) Gọi BC = a, AC = b, AB = c. So sánh a^2 với $b^2 + c^2$ mà không dùng định lí Py-ta-go.

239. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Chứng minh rằng

$$AD^2 < AB.AC.$$

240. a) Tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$, AB = 4cm, BC = 5cm. Tính độ dài AC.

b*) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC có $\hat{B} = 2\hat{C}$ biết rằng số đo các cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

241. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Tính độ dài BD biết rằng BC = 5cm, AC = 20cm.

242. Các đường phân giác các góc ngoài tại các đỉnh B và C của tam giác ABC cắt nhau ở K. Đường thẳng vuông góc với AK tại K cắt các đường thẳng AB, AC theo thứ tự ở D, E. Chứng minh rằng :

a) Các tam giác DBK và EKC đồng dạng.

b) $DE^2 = 4BD.CE$.

243. Cho tam giác ABC cân tại A, góc đáy α. Các điểm D, M, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\widehat{DME} = \alpha$. Chứng minh rằng các tam giác BDM và CME đồng dạng.

244. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AM, cắt AB và AC theo thứ tự ở E và F.

a) Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cạnh BC thì tổng DE + DF có giá trị không đổi.

b) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt EF ở K. Chứng minh rằng K là trung điểm của EF.

245. Cho các tam giác ABC và A'B'C' có $\hat{A} + \widehat{A'} = 180^o$, $\hat{B} = \widehat{B'}$. Gọi BC = a, AC = b, AB = c, B'C' = a', A'C' = b', A'B' = c'. Chứng minh rằng aa' = bb' + cc'.

246. Cho tam giác ABC, I là giao điểm của ba đường phân giác. Đường thẳng vuông góc với CI tại I cắt AC, BC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

a) Tam giác AIM đồng dạng với tam giác ABI.

b) $\dfrac{AM}{BN} = \left(\dfrac{AI}{BI}\right)^2$.

247. Tam giác ABC có AB < AC, các đường phân giác BD và CE. Kẻ tia Bx sao cho $\widehat{DBx} = \widehat{DCE}$ (tia Bx và A nằm cùng phía đối với BD), Bx cắt DA ở F, cắt CE ở G. Chứng minh rằng :

a) CG < CE ; b) BD < CE.

Phối hợp các trường hợp cạnh – góc – cạnh và góc – góc

248. a) Cho đoạn thẳng AB = a. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B. Vẽ điểm D sao cho DA = a, DC = 2a. Gọi M là trung điểm của AB. Tính độ dài DM.

b) Chỉ bằng compa, hãy dựng trung điểm M của đoạn thẳng AB cho trước, cho biết tia Bx là tia đối của tia BA.

249. Cho điểm M nằm trong hình bình hành ABCD sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MCB}$. Qua M vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AB và CD theo thứ tự ở G và H. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt BC ở F. Chứng minh rằng :

a) Tam giác AGM đồng dạng với tam giác CFM.

b) $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$.

250. Tam giác ABC cân tại A có BC = 2a, M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$.

a) Chứng minh rằng tích BD. CE không đổi.

b) Chứng minh rằng DM là tia phân giác của góc BDE.

c) Tính chu vi ΔAED nếu ΔABC là tam giác đều.

251*. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Lấy điểm G thuộc cạnh BC, điểm H thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{GOH} = 45^{o}$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng :

a) Tam giác HOD đồng dạng với tam giác OGB.

b) MG song song với AH.

252. Lục giác ABCDEF có $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F}$, AB = BC, CD = DE, EF = FA. Gọi K là điểm đối xứng với F qua AE. Chứng minh rằng BCDK là hình bình hành.

Dựng hình

253. Dựng tam giác ABC, biết độ dài ba đường cao của nó bằng h_a, h_b, h_c cho trước.

254. Cho tam giác ABC. Dựng hình bình hành AEMD có D, M, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho các tam giác MDE và ABC đồng dạng.

255. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M thuộc cạnh AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $BM = CN = \frac{1}{2}MN$.

256. Cho bốn điểm A, C', D', B thẳng hàng theo thứ tự ấy. Vẽ về một phía của AB các hình vuông ABCD và A'B'C'D'. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC', DD' đồng quy.

~ **Ví dụ :** 66.

§17. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Hai tam giác vuông đồng dạng với nhau nếu :

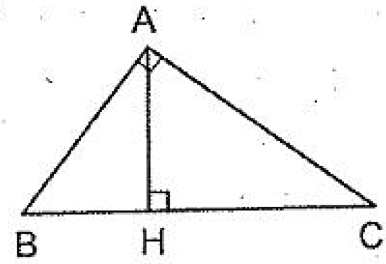
– Hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh – góc – cạnh).

– Một góc nhọn của tam giác này bằng một góc nhọn của tam giác kia (trường hợp góc – góc).

– Cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác kia (trường hợp cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Ví dụ 39. Tính chu vi của tam giác ABC vuông tại A, biết rằng đường cao AH chia tam giác đó thành hai tam giác AHB và AHC có chu vi theo thứ tự bằng 18cm và 24cm.

Giải : (h.16)



Hình 16

Xét ΔAHB và ΔCHA, ta có

$$\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^o,$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{CAH} \text{ (cùng phụ với góc HAB).}$$

Do đó ΔAHB và ΔCHA đồng dạng (g.g), suy ra

$$\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{HB}{HA} = \frac{AH + AB + HB}{CH + CA + HA} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Xét ΔAHB và ΔCAB, chúng có :

$$\widehat{AHB} = \widehat{CAB} = 90^o,$$

$$\hat{B} \text{ là góc chung.}$$

Do đó ΔAHB và ΔCAB đồng dạng (g.g), suy ra

$$\frac{AH}{CA} = \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} = \frac{AH + AB + HB}{CA + CB + AB} = \frac{18}{CA + CB + AB} \quad (2).$$

Từ (1) , ta đặt AB = 3k, CA = 4k. Xét ΔABC vuông tại A :

$$CB^2 = AB^2 + CA^2 = (3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$$

nên CB = 5k. Do đó $\frac{AB}{CB} = \frac{3}{5}$.

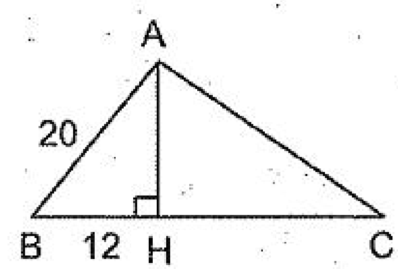
Từ (2) suy ra $\frac{3}{5} = \frac{18}{\text{chu vi } \Delta\ ABC}$. Vậy chu vi ΔABC bằng $18.\ \frac{5}{3} = 30(cm)$.

Ví dụ 40. Tam giác ABH vuông tại H có AB = 20cm, BH = 12cm. Trên tia đối của tia HB lấy điểm C sao cho $AC = \frac{5}{3}AH$.

a) Chứng minh rằng các tam giác ABH và CAH đồng dạng.

b) Tính $\widehat{BAC}$.

Giải : (h.17) a) Ta có



Hình 17

$$\frac{AB}{BH} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{AH}.$$

Xét ΔABH và ΔCAH, ta có :

$$\widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90^o,$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó ΔABH và ΔCAH đồng dạng (cạnh huyền – cạnh góc vuông).

b) Từ câu a suy ra $\widehat{CAH} = \widehat{ABH}$. Ta lại có $\widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^o$ nên $\widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 90^o$. Do đó $\widehat{BAC} = 90^o$.

Bài tập

257. Cho tam giác ABC vuông tại A, hình vuông EFGH nội tiếp tam giác sao cho E thuộc AB, F thuộc AC, H và G thuộc BC. Tính độ dài của cạnh hình vuông biết rằng BH = 2cm, GC = 8 cm.

258. Cho hình bình hành ABCD, các đường cao CE, CF. Kẻ DH, BK vuông góc với AC. Chứng minh rằng $AC^2 = AD.DF + AB.AE$.

259. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Chứng minh rằng $BC^2 = BH.BD + CH.CE$.

260. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Gọi E và F theo thứ tự là các hình chiếu của B và C trên tia phân giác của góc A. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng FB và CE. Chứng minh rằng AK là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

261. Tính tỉ số hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông biết rằng đường cao và đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác tỉ lệ với 12 : 13.

262. Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = 3AB. Lấy các điểm D, E thuộc AC sao cho AD = DE = EC. Chứng minh rằng $\widehat{AEB} + \widehat{ACB} = 45^o$.

263. Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, AB = 4cm, DC = 9cm, BC = 13cm. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AD đến BC.

264. Hình thang vuông ABCD có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, AB = 7cm, DC = 13cm, BC = 10cm. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng AD ở N. Tính độ dài MN (M là trung điểm của BC).

265*. Cho hình bình hành ABCD. Hai đường thẳng đi qua tâm của hình bình hành chia nó ra bốn tứ giác có diện tích bằng nhau. Đường thẳng thứ nhất cắt BC ở E, đường thẳng thứ hai cắt CD ở F. Chứng minh rằng điểm E chia cạnh BC và điểm F chia cạnh CD theo cùng một tỉ số.

266. Cho hai điểm A, M. Dựng hình vuông ABCD sao cho điểm M chia cạnh BC theo tỉ số 1 : 2.

267. Cho tam giác ABC. Hình chữ nhật DEGH có D thuộc AB, E thuộc AC, G và H thuộc BC.

a) Vẽ Ax song song với BC, vẽ CK vuông góc với Ax (K thuộc Ax). Gọi I là giao điểm của BK và DE. Chứng minh rằng GC = DI.

b) Suy ra cách dựng hình chữ nhật nói trên biết tam giác ABC và độ dài đường chéo của hình chữ nhật.

~ **Ví dụ :** 56.

~ **Bài tập :** 333, 334, 336, 356, 374.

§18. TỈ SỐ CÁC ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Nếu hai tam giác đồng dạng thì :

– Tỉ số các đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.

– Tỉ số các diện tích bằng bình phương của tỉ số đồng dạng.

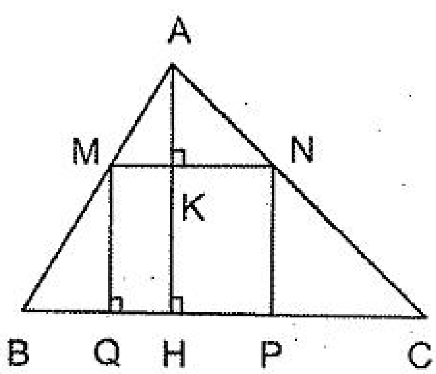
Ví dụ 41. Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, BC = a, đường cao AH = h. Tính cạnh của hình vuông MNPQ có M thuộc AB, N thuộc AC, P và Q thuộc BC.

Giải : (h.18) Gọi giao điểm của AH và MN là K.

Do MN // BC nên AK ⊥ MN.

Ta có MN // BC nên ΔAMN và ΔABC đồng dạng, do đó tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng :

$$\frac{AK}{AH} = \frac{MN}{BC}.$$



Hình 18

Đặt MN = KH = x ta có

$$\frac{h - x}{h} = \frac{x}{a} \Rightarrow xh = ah - ax$$

$$\Rightarrow x(h + a) = ah$$

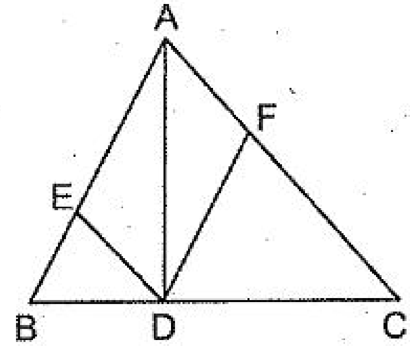
$$\Rightarrow x = \frac{ah}{a + h}.$$

Cạnh của hình vuông MNPQ bằng $\frac{ah}{a + h}$.

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC và hình bình hành AEDF có E thuộc AB, D thuộc BC, F thuộc AC. Tính diện tích hình bình hành, biết rằng $S_{EBD} = 3cm^2$, $S_{FDC} = 12cm^2$.

Giải : (h.19) ΔEBD và ΔFDC đồng dạng (g.g) nên

$$\frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \left(\frac{BE}{DF}\right)^2 = \left(\frac{ED}{FC}\right)^2.$$



Hình 19

Ta có $S_{EBD} : S_{FDC} = 3 : 12 = 1 : 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Do đó $\frac{BE}{DF} = \frac{ED}{FC} = \frac{1}{2}$.

Suy ra : $AE = DF = 2BE$.

$$AF = ED = \frac{1}{2}FC.$$

Vậy $S_{ADE} = 2S_{BED} = 2.3 = 6\ (cm^2)$,

$$S_{ADF} = \frac{1}{2}S_{FDC} = \frac{1}{2}.12 = 6\ (cm^2),$$

$$S_{AEDF} = S_{ADE} + S_{ADF} = 6 + 6 = 12\ (cm^2).$$

Chú ý : Tổng quát, nếu $S_{EBD} = m, S_{FDC} = n$ thì $S_{AEDF} = 2\sqrt{mn}$.

Bài tập

Tỉ số các đường cao

268. Hình thang ABCD có cạnh đáy AB dài 8cm, cạnh đáy CD dài 12cm. Điểm M nằm trên đường thẳng AB sao cho đường thẳng DM chia hình thang thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính độ dài BM.

269. Điểm M chuyển động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD. Gọi O là giao điểm của các đường thẳng chứa các cạnh bên của hình thang, G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh AB thì tổng $\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC}$ không đổi.

270. Cho ba đường thẳng song song a, b, c theo thứ tự ấy, điểm A thuộc a, điểm B thuộc b. Gọi M là một điểm bất kì thuộc c. MA cắt b ở B', MB cắt a ở A'. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên c thì đường thẳng A'B' luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Tỉ số diện tích

271. Cho tam giác ABC có diện tích S, các đường trung tuyến AD, BE, CF. Gọi S' là diện tích tam giác có độ dài ba cạnh bằng AD, BE, CF. Chứng minh rằng $S' = \frac{3}{4}S$.

272. Đường cao của một tam giác dài 16cm, nó chia cạnh đáy thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với 1 : 8. Tính độ dài đoạn thẳng song song với đường cao ấy và chia tam giác đã cho ra hai phần có diện tích bằng nhau.

273. Hình thang ABCD có các đáy AB = b, CD = a (a > b). Đoạn thẳng MN song song với đáy, có hai đầu thuộc hai cạnh bên chia hình thang ra hai phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng $MN^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$.

274. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 2cm. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, H theo thứ tự là giao điểm của AF với BE, BD. Tính diện tích tứ giác EIHD.

275. Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số đồng dạng là một số tự nhiên. Một cạnh của tam giác nhỏ bằng 3cm, diện tích của tam giác nhỏ này cũng là một số tự nhiên (đơn vị cm^2). Tính diện tích của mỗi tam giác, biết hiệu diện tích của chúng bằng $18cm^2$.

276*. Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^o$, $\hat{C} = 20^o$, BC = 4cm. Gọi D là trung điểm của AC. Trên cạnh CB lấy điểm E sao cho CE = CD. Tính tổng diện tích các tam giác ECD và ABD.

277*. Cho tam giác ABC cân tại A, trực tâm H chia đường cao AE theo tỉ số 7 : 1. Giao điểm I các đường phân giác của tam giác chia AE theo tỉ số nào ?

278*. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy các điểm I và K sao cho AI = IK = KB, trên cạnh BC lấy các điểm D và E sao cho BD = DE = EC, trên cạnh AC lấy các điểm F và G sao cho AF = FG = GC. Gọi M là giao điểm của AD và BF, N là giao điểm của BG và CK, P là giao điểm của AE và CI.

a) Chứng minh rằng các cạnh của tam giác MNP song song với các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác MNP theo diện tích tam giác ABC.

279*. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường cao AH và đường phân giác BE. Đường vuông góc với BE tại E cắt cạnh BC ở G, cắt tia đối của tia AB ở D. Kẻ EF vuông góc với BC. Cho biết AD = 15cm, HF = 20cm, tính diện tích tam giác ABC.

~ **Ví dụ** : 57, 59, 60.

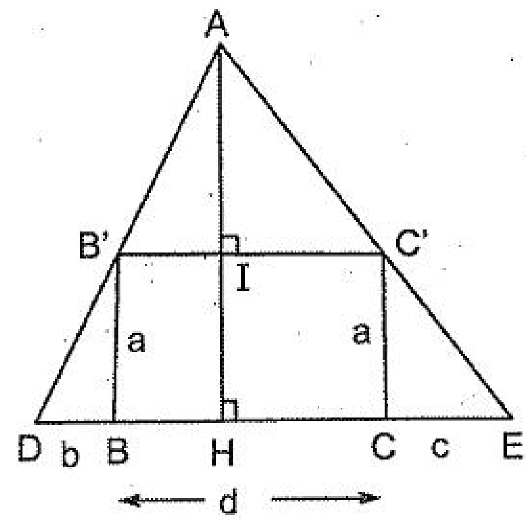
Bài tập : 375 đến 377.

§19. ỨNG DỤNG THỰC TẾ CỦA TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Nhờ các tam giác đồng dạng, ta có thể xác định được các chiều cao, các khoảng cách... mà không cần đo trực tiếp.

Ví dụ 43. Một ngọn đèn đặt trên cao ở vị trí A, hình chiếu vuông góc của nó trên mặt đất là H. Người ta đặt một chiếc cọc dài 1,6m thẳng đứng ở hai vị trí B và C thẳng hàng với H, khi đó bóng của chiếc cọc dài 0,4m và 0,6m. Biết BC = 1,4m, hãy tính độ cao AH.

Giải : (h.20) Gọi BD, CE là bóng của cọc và B', C' là vị trí tương ứng của đỉnh cọc. Đặt BB' = CC' = a, BD = b, CE = c, BC = d, AH = x. Gọi I là giao điểm của AH và B'C'.



Hình 20

$\Delta AB'C'$ và ΔABC đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{B'C'}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{x} = \frac{d}{b+d+c}$$

$$\Rightarrow xb + xd + xc - ab - ad - ac = xd$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab+ac+ad}{b+c}$$

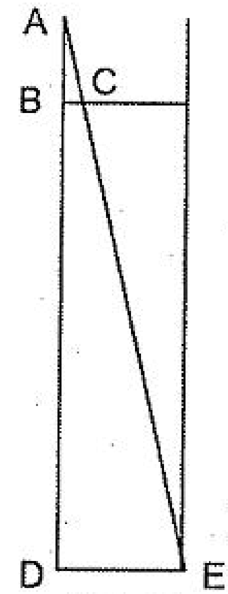
$$\Rightarrow x = a\left(1 + \frac{d}{b+c}\right)$$

Áp dụng thay số : $AH = 1,6\left(1 + \dfrac{1,4}{0,4+0,6}\right) = 3,84$ (m).

Bài tập

280. Một người đứng cách một ngôi nhà 200m, đặt một que dài 5cm, cách mắt 40 cm theo phương thẳng đứng thì vừa vặn che lấp chiều cao của ngôi nhà. Tính chiều cao của ngôi nhà.

281. Một giếng nước có đường kính DE = 0,8m (h.21). Để xác định độ sâu BD của giếng, người ta đặt một chiếc gậy ở vị trí AC, A chạm miệng giếng, AC nhìn thẳng tới vị trí E ở góc của đáy giếng. Biết AB = 0,9m, BC = 0,2m. Tính độ sâu BD của giếng.



Hình 21

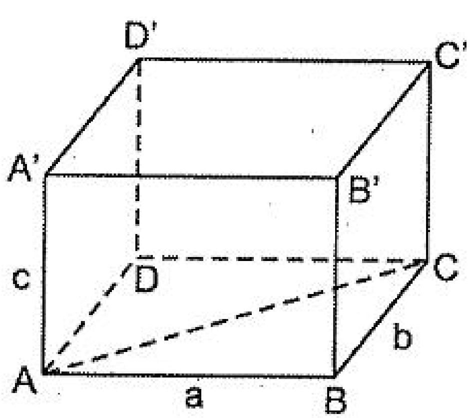
Chương IV

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

§20. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, các mặt là những hình chữ nhật (h.22). Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có các mặt là những hình vuông.

Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài a, chiều rộng b, chiều cao c. Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức : $S_{xq} = 2(a + b)c$. Thể tích của hình hộp chữ nhật tính bởi công thức : $V = abc$.



Hình 22

Mô hình của hình hộp chữ nhật cho ta hình ảnh các quan hệ không gian sau (xem h.22) :

– Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, chẳng hạn AB // A'B'.

– Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, chẳng hạn AB // D'C' vì chúng cùng song song với A'B'.

– Đường thẳng A'B' không nằm trong mặt phẳng (ABCD) và song song với đường thẳng AB của mặt phẳng (ABCD), ta có A'B' // mp (ABCD).

– Mặt phẳng (A'B'C'D') chứa hai đường thẳng cắt nhau A'B', B'C' cùng song song với mặt phẳng (ABCD), ta có mp (A'B'C'D') // mp (ABCD).

– Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung A thì chúng có chung một đường thẳng đi qua A, gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Chẳng hạn AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD) và (ABB'A').

– Đường thẳng A'A vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AB, AD của mặt phẳng (ABCD), ta có A'A ⊥ mp (ABCD).

– Khi A'A ⊥ mp (ABCD) thì A'A vuông góc với mọi đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng (ABCD), chẳng hạn A'A ⊥ AC.

– Mặt phẳng (A'B'BA) chứa đường thẳng A'A vuông góc với mặt phẳng (ABCD), ta có mp (A'B'BA) ⊥ mp (ABCD).

Ví dụ 44. Trong các hình hộp chữ nhật có các kích thước là số nguyên a, b, c mà a + b + c = 9, hình nào có thể tích lớn nhất ?

Giải : Xét tất cả các trường hợp hình hộp chữ nhật có các kích thước nguyên và tổng bằng 9 :

$V_1 = 1.1.7 = 7$ $\qquad$ $V_5 = 2.2.5 = 20$

$V_2 = 1.2.6 = 12$ $\qquad$ $V_6 = 2.3.4 = 24$

$V_3 = 1.3.5 = 15$ $\qquad$ $V_7 = 3.3.3 = 27$

$V_4 = 1.4.4 = 16$

Ta thấy hình hộp chữ nhật có các kích thước 3, 3, 3 (hình lập phương) có thể tích lớn nhất (là 27).

Chú ý : Tổng quát, ta chứng minh được : Trong các hình hộp chữ nhật có các kích thước a, b, c mà a + b + c = 9, hình lập phương có thể tích lớn nhất. Để chứng minh điều này, phải dùng bất đẳng thức Cô-si với ba số dương a, b, c (xem *Nâng cao và phát triển Toán 9*, tập một).

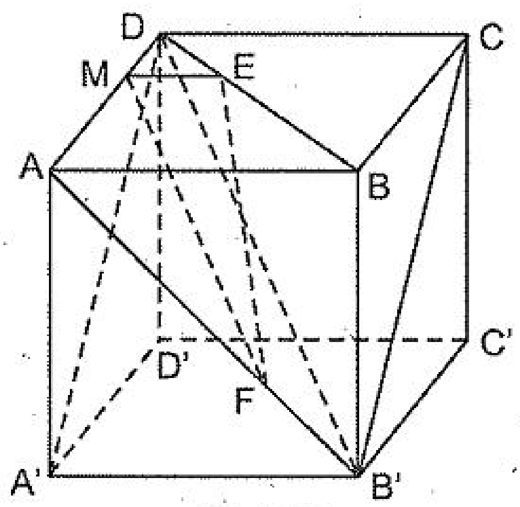
Ví dụ 45. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Điểm E chia DB theo tỉ số 1 : 3, điểm F chia B'A theo tỉ số 1 : 3.

a) Chứng minh rằng A'B'CD là hình chữ nhật. Tính diện tích hình chữ nhật đó nếu cạnh hình lập phương bằng a.

b) Gọi M là điểm chia DA theo tỉ số 1 : 3. Chứng minh rằng mặt phẳng (EMF) song song với mặt phẳng (A'B'CD).

c) Chứng minh rằng EF song song với mặt phẳng (A'B'CD).

d) Chứng minh EF song song với mặt phẳng (A'B'CD) mà không sử dụng kết quả của câu b.



Hình 23

Giải : (h.23)

a) A'B' // CD (vì cùng song song với AB),

A'B' = CD (vì cùng bằng AB)

nên tứ giác A'B'CD là hình bình hành.

Ta có $DC \perp CC'$ và $DC \perp CB$ nên $DC \perp mp(BCC'B')$, suy ra $DC \perp CB'$.

Hình bình hành A'B'CD có $\widehat{DCB'} = 90^o$ nên là hình chữ nhật.

Ta tính được $B'C = a\sqrt{2}$ nên

$$S_{A'B'CD} = A'B'.B'C = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

b) ΔDAB có $\dfrac{DM}{MA} = \dfrac{DE}{EB}\left(= \dfrac{1}{3}\right)$ nên ME // AB. Ta lại có AB // A'B' nên ME // A'B'. Suy ra ME // mp (A'B'CD). MF // DB' $\Rightarrow$ MF // mp (A'B'CD).

Mặt phẳng (MEF) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mp (A'B'CD) nên mp (MEF) // mp (A'B'CD).

c) Từ câu b suy ra EF // mp (A'B'CD).

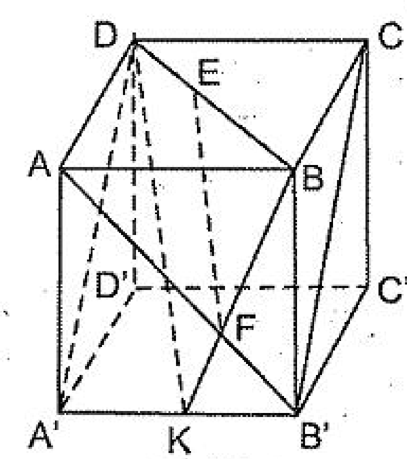
d) (h.24) Trong mp (ABB'A'), gọi K là giao điểm của BF và A'B'. Ta có AB // A'B' nên

$$\frac{KF}{FB} = \frac{B'F}{FA} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{KF}{FB} = \frac{DE}{EB} \Rightarrow EF \,//\, DK.$$

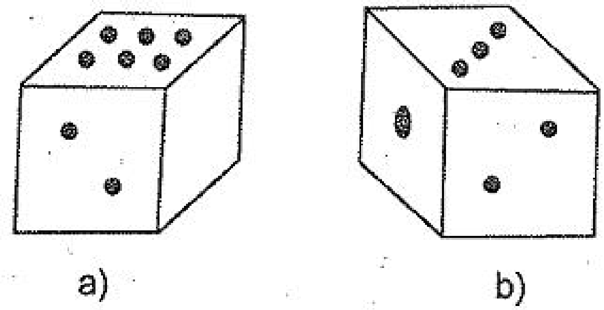
Ta lại có DK nằm trong mp (A'B'CD) nên

EF // mp (A'B'CD).



Hình 24

Ví dụ 46. Hãy điền các dấu chấm vào mặt để trống của viên súc sắc hình lập phương ở hình 25a sao cho viên súc sắc thỏa mãn hình 25b (chú ý rằng ở viên súc sắc, tổng hai số ở hai mặt đối nhau bao giờ cũng bằng 7).



Hình 25

Giải

Quan sát hình 25b ta thấy : Khi nhìn thẳng vào mặt chứa số 2 sao cho mặt chứa số 6 ở trên thì mặt chứa số 3 ở bên trái. Áp dụng nhận xét này vào hình 25a thì mặt đối diện với mặt để trống chứa số 3, do đó mặt để trống chứa số 4. Bạn đọc tự điền các dấu chấm vào hình.

Ví dụ 47. Một hình lập phương lớn cạnh 4 được ghép lại từ 64 hình lập phương nhỏ cạnh 1. Người ta sơn tất cả sáu mặt của hình lập phương lớn. Tính số hình lập phương nhỏ cạnh 1 mà :

a) có đúng một mặt được sơn ;

b) có đúng hai mặt được sơn ;

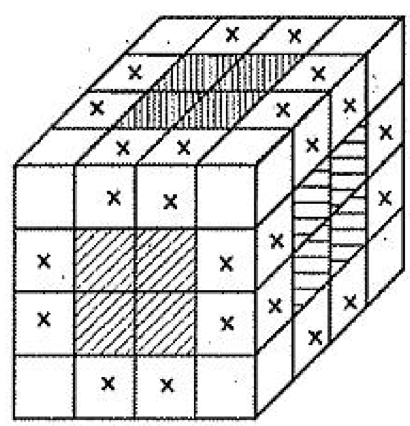
c) có đúng ba mặt được sơn ;

d) không có mặt nào được sơn.

Giải : (h.26)

a) Ở mỗi mặt, có 4 hình lập phương nhỏ được sơn một mặt (các hình được gạch sọc). Ở sáu mặt có :

$$4.6 = 24 \text{ (hình)}$$



Hình 26

b) Ở mỗi cạnh, có 2 hình lập phương được sơn hai mặt (các hình ghi dấu "×"). Ở 12 cạnh có :

$$2.12 = 24 \text{ (hình)}$$

c) Ở mỗi đỉnh, có một hình lập phương được sơn ba mặt (là hình ở góc). Ở 8 đỉnh có : 8 hình.

d) Các hình lập phương nhỏ không có mặt nào được sơn là các hình lập phương nhỏ "ở bên trong", chúng tạo thành một hình lập phương có cạnh 2, gồm : $2.2.2 = 8$ (hình)

Bài tập

Hình hộp chữ nhật

282. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, DC. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của B'A', B'C'. Chứng minh rằng MN song song với IK.

Diện tích

283. Tính diện tích toàn phần của một hình hộp chữ nhật có chiều dài 4cm, chiều rộng 3cm, đường chéo của hình hộp bằng 13cm.

284. Một hình hộp chữ nhật có tổng độ dài các cạnh bằng 140cm, khoảng cách từ một đỉnh đến đỉnh xa nhất bằng 21 cm. Tính diện tích toàn phần.

285. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm của CC'.

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (ABB'A') và (B'C'M).

b) Xác định giao điểm của đường thẳng DM và mặt phẳng (A'B'C'D').

c) Xác định giao điểm của đường thẳng B'M và mặt phẳng (ABCD).

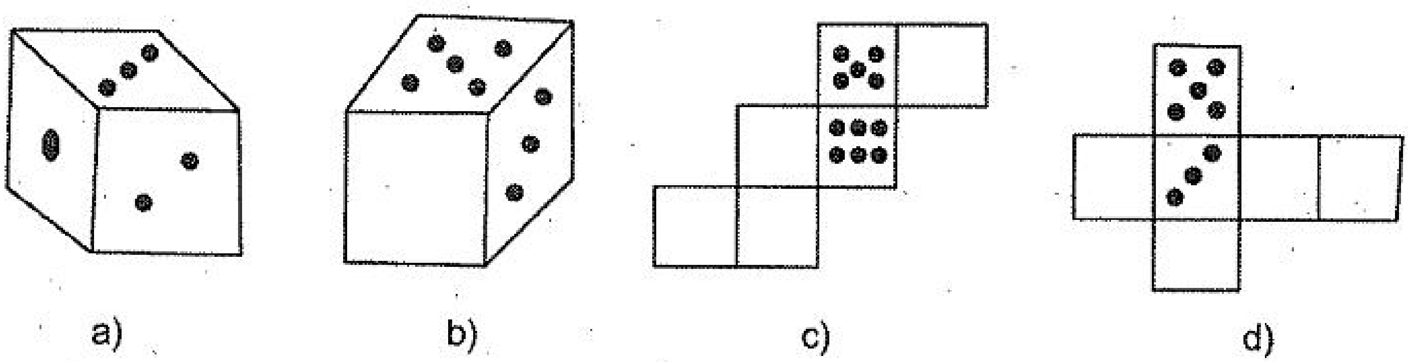
286. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, I theo thứ tự là trung điểm của AA', CC'. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ADI) và (B'C'M) song song với nhau.

287. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Gọi H, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AA', C'D'. Chứng minh rằng mặt phẳng (HIK) song song với mặt phẳng (ACD').

288. Cho một viên súc sắc thoả mãn hình 27a.

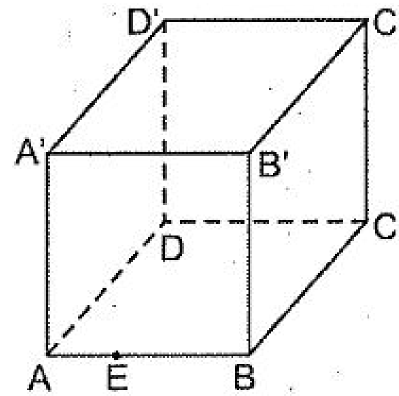
a) Hãy điền các dấu chấm vào mặt để trống ở hình 27b.

b) Hãy điền các dấu chấm vào các hình khai triển (h.27c, d).



Hình 27

289*. Một con nhện đang ở vị trí E trong một gian phòng hình lập phương (h.28, E nằm trên AB và $AE = \frac{1}{3}AB$). Con nhện muốn bò qua cả sáu mặt của gian phòng rồi trở về E. Tìm đường đi ngắn nhất của con nhện.



Hình 28

Thể tích

290. Tính diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và diện tích hình chữ nhật ADC'B' bằng $2a^2$.

291. Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông, diện tích mặt chéo (BDD'B') bằng $80cm^2$, M và N theo thứ tự là trung điểm của AA' và CC', MN = 8cm. Tính thể tích hình hộp chữ nhật.

292. Một cái hòm hình hộp chữ nhật có chiều dài 36cm, chiều rộng 15cm, chiều cao 16cm. Số hình lập phương cạnh 3cm nhiều nhất chứa trong hòm đó là :

A) 180 ; B) 300 ; C) 320 ; D) 192.

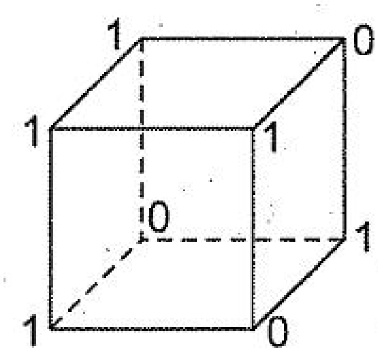
Hãy chọn câu trả lời đúng

293. Một hình hộp chữ nhật được ghép bởi 42 hình lập phương cạnh 1cm. Biết chu vi đáy của hình hộp chữ nhật là 18cm. Tính các cạnh của hình hộp chữ nhật.

Các dạng khác

294. Cho một hình lập phương. Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai mút của nó là hai đỉnh của hình lập phương ?

295. Người ta ghi vào các đỉnh của một hình lập phương các số 0 hoặc 1 như trên hình 29. Cứ mỗi bước, ta cộng thêm 1 đơn vị vào mỗi số thuộc cùng một cạnh của hình lập phương. Sau một số bước, có thể xảy ra tám số bằng nhau ở tám đỉnh của hình lập phương được không ?



Hình 29

296. Người ta viết vào sáu mặt của một hình lập phương sáu số có tổng bằng 21. Sau đó ở mỗi đỉnh của hình lập phương, ta ghi một số bằng tổng các số ở các mặt chứa đỉnh đó. Tính tổng các số ở các đỉnh.

297. Mỗi hình lập phương cạnh 5 được ghép bởi 125 hình lập phương nhỏ cạnh 1. Tính số hình lập phương nhỏ giáp với :

a) 6 mặt của các hình lập phương nhỏ khác ;

b) 5 mặt của các hình lập phương nhỏ khác ;

c) 4 mặt của các hình lập phương nhỏ khác ;

d) 3 mặt của các hình lập phương nhỏ khác.

298. Có 125 hình lập phương đơn vị ghép lại thành một hình lập phương lớn cạnh 5. Người ta sơn sáu mặt của hình lập phương lớn. Tính số hình lập phương đơn vị có ít nhất một mặt được sơn.

299. Để sơn một hình lập phương sao cho hai mặt kề nhau có màu khác nhau, số màu ít nhất cần dùng là :

A) 2 ; B) 6 ; C) 4 ; D) 3 ; E) 5.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

300. Một hình lập phương cạnh 10 được tạo thành bởi 1000 hình lập phương đơn vị. Ta có thể nhìn thấy nhiều nhất bao nhiêu hình lập phương đơn vị ?

301. Một hình lập phương cạnh 5 gồm 125 hình lập phương đơn vị. Người ta khoan thủng hình lập phương lớn theo ba đường khoan từ mỗi mặt đến mặt đối diện, mũi khoan lọt vào hình lập phương đơn vị ở chính giữa. Có bao nhiêu hình lập phương đơn vị bị xuyên thủng ?

302*. Một khối gỗ hình lập phương có cạnh 3dm. Ở chính giữa mỗi mặt của hình lập phương, người ta đục một lỗ vuông có cạnh 1dm thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh của lỗ vuông song song với cạnh của hình lập phương. Sau khi đã đục ba lỗ thông, diện tích toàn phần của khối còn lại bằng bao nhiêu ?

§21. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Hình lăng trụ đứng có hai đáy là hai đa giác, các mặt bên là những hình chữ nhật (h.30).

Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp đứng.

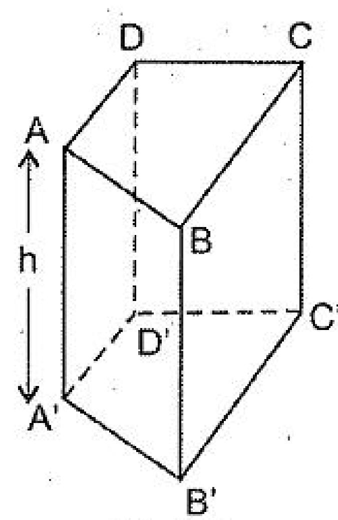
Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng : Chu vi đáy × chiều cao

$$\boxed{S_{xq} = 2ph}$$

Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng :

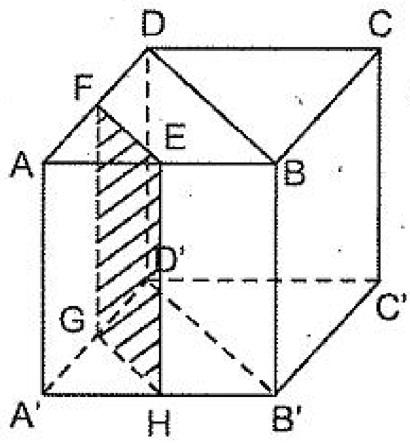
Diện tích đáy × chiều cao

$$\boxed{V = Sh}$$



Hình 30

Ví dụ 48. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D'. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, AD. Người ta cắt hình lập phương theo mặt phẳng chứa EF và song song với mặt chéo (BDD'B') thì hình lập phương đó được chia thành hai hình lăng trụ. Tính số mặt, số đỉnh, số cạnh của mỗi hình lăng trụ.



Hình 31

Giải : (h.31)

Hình lăng trụ nhỏ có 5 mặt, 6 đỉnh, 9 cạnh.

Hình lăng trụ lớn có 7 mặt, 10 đỉnh, 15 cạnh.

Chú ý : Nếu gọi M là số mặt, Đ là số đỉnh, C là số cạnh thì ở hai hình lăng trụ trên, ta thấy : M + Đ – C = 2. Đề-các đã phát hiện ra công thức trên khi nghiên cứu các đa diện đều. Năm 1755, Ơ-le đã chứng minh công thức tuyệt diệu đó với mọi đa diện lồi tuỳ ý.

Bài tập

303. a) Tính số mặt, số đỉnh, số cạnh của một hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác 100 cạnh ; n cạnh ($n \geq 3$).

b) Chứng minh công thức M + Đ – C = 2 đối với hình lăng trụ đứng (M, Đ, C theo thứ tự là số mặt, số đỉnh, số cạnh).

304. a) Trong các số : 36, 25, 18, 17, 11, 6, 4, số nào không thể là số đỉnh của một hình lăng trụ đứng ?

b) Trong các số : 12, 20, 9, 15, 32, 6, số nào không thể là số cạnh của một hình lăng trụ đứng ?

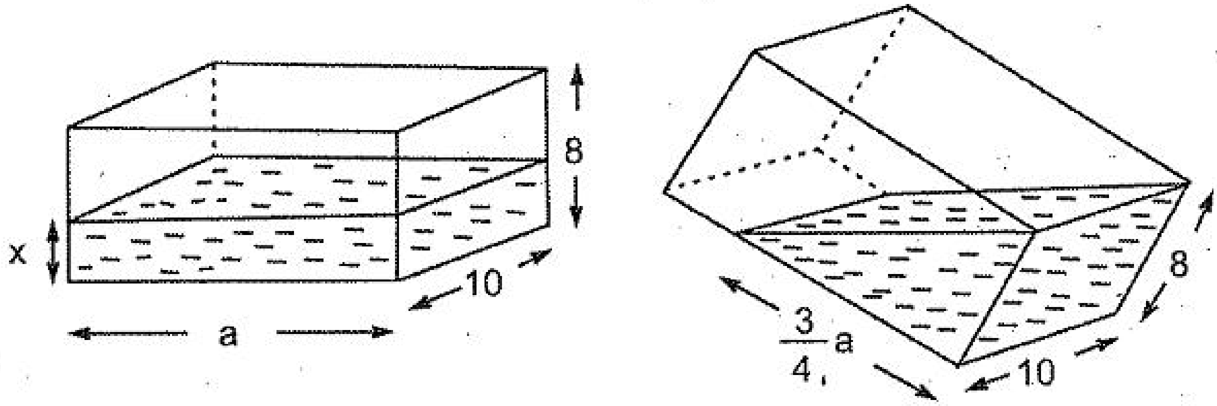
305. Cho hình lăng trụ đứng ABCD. A'B'C'D' có đáy là hình thoi. Biết đường cao AA' = 5cm, các đường chéo AC' = 15cm, DB' = 9cm. Tính cạnh AB của đáy.

306. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều, M là trung điểm của BC, AA' = AM = a.

a) Tính cạnh đáy của hình lăng trụ.

b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình lăng trụ.

307. Một thùng hình hộp chữ nhật có chiều rộng 10dm, chiều cao 8dm, trong thùng đựng một phần nước. Khi nghiêng thùng cho nước trong thùng vừa vặn phủ kín



Hình 32

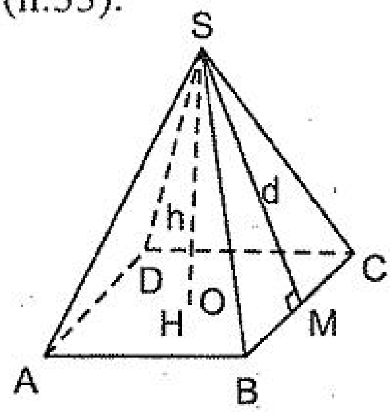
mặt bên 10dm × 8dm thì nước còn phủ $\frac{3}{4}$ đáy của thùng (h.32).

Tính chiều cao của mực nước khi thùng đặt nằm ngang.

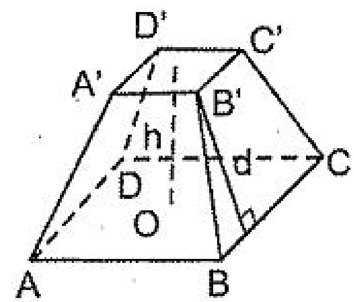
§22. HÌNH CHÓP ĐỀU. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp có đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh, là đỉnh của hình chóp.

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân (h.33).



Hình 33



Hình 34

Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy, phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy là một hình chóp cụt đều (h.34). Trong hình chóp cụt đều, các mặt bên là những hình thang cân.

Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng : Nửa chu vi đáy × Trung đoạn

$$\boxed{S_{xq} = pd}$$

Diện tích xung quanh của hình chóp cụt đều bằng :

Nửa tổng chu vi hai đáy × Trung đoạn

$$\boxed{S_{xq} = (p + p')d.}$$

Thể tích của hình chóp bằng : $\frac{1}{3}$ diện tích đáy × Chiều cao.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Ví dụ 49. Một hình chóp và một hình lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng nhau. Chiều cao của hình chóp gấp đôi chiều cao của hình lăng trụ. Tỉ số các thể tích của hình chóp và hình lăng trụ bằng :

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{2}{3}$; C) 1 ; D) $\frac{3}{2}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

Giải

Gọi S và h theo thứ tự là diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ. Khi đó hình chóp có diện tích đáy S và chiều cao 2h.

Thể tích hình chóp : $V_1 = \frac{1}{3}S.2h = \frac{2}{3}Sh.$

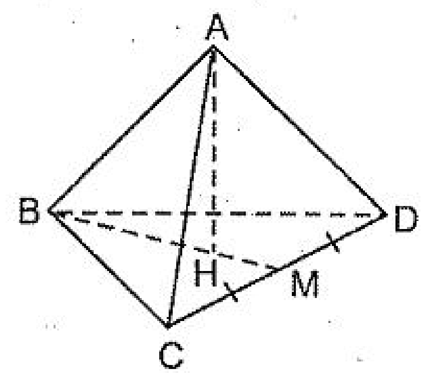
Thể tích hình lăng trụ : $V_2 = Sh.$

Tỉ số các thể tích của hình chóp và hình lăng trụ bằng $\frac{2}{3}$. Vậy câu trả lời B là đúng.

Ví dụ 50. Tính thể tích hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$ và các cạnh bên bằng 1.

Giải : (h.35)

Cách 1. Kí hiệu như trên hình vẽ. Xét tam giác CBM vuông tại M :



Hình 35

$$BM^2 = BC^2 - CM^2 = (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Xét ΔAHB vuông tại H :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}CD.BM = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$V = \frac{1}{3}.S_{BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}.$$

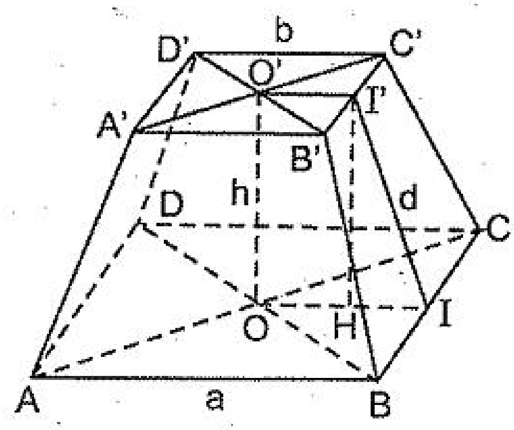
Cách 2. ΔCAD có $CD^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$, $AC^2 + AD^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ nên $CD^2 = AC^2 + AD^2$, suy ra $\widehat{CAD} = 90^o$. Tương tự $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 90^o$.

Xét hình chóp có đáy là tam giác vuông CAD, đường cao là BA, thể tích hình chóp bằng :

$$V = \frac{1}{3}S_{CAD}.BA = \frac{1}{3}.\frac{1.1}{2}.1 = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 51*. Một hình chóp cụt đều có đáy là hình vuông, các cạnh đáy bằng a và b. Tính chiều cao của hình chóp cụt đều, biết rằng diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy.

Giải : Kí hiệu như trên hình 36.



Hình 36

Diện tích xung quanh hình chóp cụt đều bằng tổng diện tích hai đáy nên

$$(2a + 2b)d = a^2 + b^2.$$

Do đó $$d = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)} \qquad (1)$$

Gọi I, I' theo thứ tự là trung điểm của BC, B'C'. Ta có O'I' // A'B' // AB // OI, O'I' và OI xác định mặt phẳng (O'I'IO). Trên mặt phẳng đó kẻ $I'H \perp OI$.

Đặt I'I = d, I'H = O'O = h. Ta có :

$$HI = OI - OH = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

$$h^2 = I'I^2 - HI^2 = d^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$h^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{4(a+b)^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{4(a+b)^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

Do đó $\quad h = \dfrac{ab}{a+b}.$

Ví dụ 52. Cho hình chóp A.BCD có đáy là tam giác BCD. Gọi E, F theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD.

a) Chứng minh rằng EF song song với AB.

b) Gọi K là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BF, DK đồng quy.

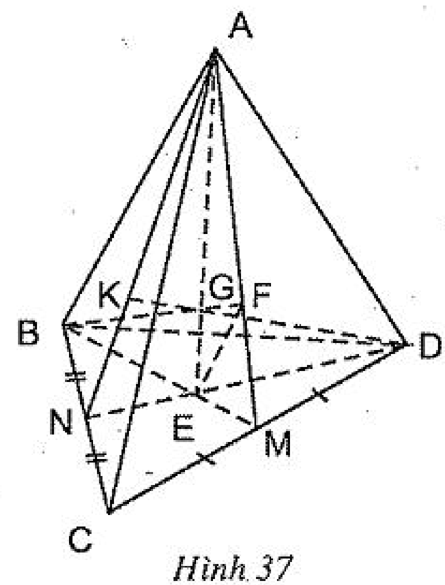
Giải : (h.37)

a) Gọi M là trung điểm của CD. Theo tính chất đường trung tuyến ta có

$$E \in BM,\ ME = \frac{1}{3}MB\ ;$$

$$F \in AM,\ MF = \frac{1}{3}MA\ .$$

Ta có $\dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3}$ nên EF // AB (định lí Ta-lét đảo).



Hình 37

b) AE cắt BF tại G. Ta có EF // AB nên $\dfrac{GE}{GA} = \dfrac{EF}{AB}$.

Ta lại có $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{1}{3}$. Do đó G chia trong EA theo tỉ số 1 : 3.

Chứng minh tương tự, DK cắt AE tại điểm G', cũng chia trong EA theo tỉ số 1 : 3 suy ra $G \equiv G'$. Vậy AE, BF, DK đồng quy.

Hình chóp đều

308. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy 20cm, chiều cao 10cm. Tính độ dài cạnh bên.

309. Hình chóp tam giác đều S.ABC có tất cả các cạnh bằng 2dm. Tính độ dài đoạn thẳng MN nối trung điểm hai cạnh đối AB và SC.

310. Tính thể tích hình chóp lục giác đều có cạnh đáy 5cm, cạnh bên 13cm.

311. Cho một khối gỗ hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh 4. Tại đỉnh A, người ta cưa lấy ra một hình chóp có một đỉnh là A, ba đỉnh còn lại nằm trên ba cạnh xuất phát từ A và cách A là 1. Tại các đỉnh khác của hình lập phương, ta cũng làm như vậy. Số cạnh của phần gỗ còn lại là :

A) 24 ; B) 12 ; C) 16 ; D) 36 ; E) 30.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

312. Cho một khối gỗ hình lập phương. Người ta cưa khối gỗ theo một mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh xuất phát từ một đỉnh của hình lập phương.

a) Tính thể tích của phần gỗ nhỏ bị cưa rời ra, biết cạnh của hình lập phương bằng 2.

b) Phần gỗ còn lại có bao nhiêu mặt, đỉnh, cạnh ?

313*. Cho một khối gỗ hình lập phương. Tại mỗi đỉnh của hình lập phương, người ta cưa khối gỗ theo một mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh xuất phát từ đỉnh ấy.

a) Phần gỗ còn lại có bao nhiêu mặt, đỉnh, cạnh ?

b) Tính tỉ số các thể tích của phần gỗ còn lại so với khối gỗ ban đầu.

314*. Hình chóp tam giác đều S.ABC có các mặt là tam giác đều. Gọi O là trung điểm của đường cao SH của hình chóp. Chứng minh rằng

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ.$$

Hình chóp cụt đều

315. Cho hình chóp cụt đều có hai đáy là các hình vuông cạnh a và 2a, cạnh bên bằng a. Tính :

a) Trung đoạn ; b) Diện tích xung quanh ; c) Đường cao.

316. Cho hình chóp cụt đều có hai đáy là các hình vuông cạnh a và 2a, trung đoạn bằng a. Tính :

a) Diện tích xung quanh ;   b) Cạnh bên ;   c) Đường cao.

Hình chóp

317. Chứng minh công thức M + Đ – C = 2 đối với hình chóp (M, Đ, C theo thứ tự là số mặt, số đỉnh, số cạnh).

318. Cho hình chóp tam giác S.ABC, điểm G là trọng tâm của tam giác SBC. Gọi K là trung điểm của SA. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng KG và mặt phẳng (ABC).

319. Hình chóp A.BCD có AB = a, CD = b. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $MN < \dfrac{a+b}{2}$.

320. Cho hình chóp A.BCD. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối của hình chóp gặp nhau tại một điểm (AB và CD là một cặp cạnh đối của hình chóp).

321. Cho hình chóp S.ABC. Trên SA, SB, SC lấy theo thứ tự các điểm A', B', C' sao cho các đường thẳng A'B', B'C', C'A' theo thứ tự không song song với AB, BC, CA. Gọi D là giao điểm của A'B' và AB, E là giao điểm của B'C' và BC, F là giao điểm của C'A' và CA. Chứng minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng.

322*. Chứng minh rằng trong một hình chóp tam giác bất kì, tồn tại ba cạnh xuất phát từ cùng một đỉnh mà một cạnh nhỏ hơn tổng của hai cạnh kia.

323*. Hình chóp A.BCD có độ dài sáu cạnh bằng 7, 13, 18, 27, 36, 41. Cạnh nào đối diện với cạnh có độ dài 41 ?

CHUYÊN ĐỀ

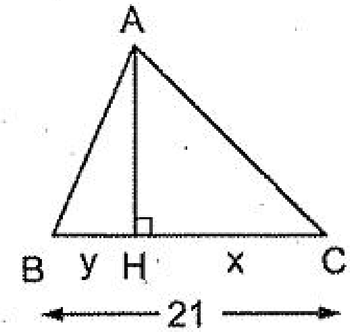
TÍNH CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình đại số là một công cụ giúp ta giải nhiều bài toán hình học, nhất là các bài tập về tính toán.

Ví dụ 53(12). Tính diện tích tam giác có độ dài ba cạnh bằng 10cm, 17cm, 21cm.

Giải : (h.38)

Xét ΔABC có AB = 10cm, AC = 17cm, BC = 21 cm. Gọi AH là đường cao của tam giác. Vì BC là cạnh lớn nhất của tam giác nên $\widehat{B}, \widehat{C} < 90^o$, do đó H nằm giữa B và C.



Hình 38

Đặt HC = x, HB = y, ta có :

$$x + y = 21 \qquad (1)$$

Mặt khác $AH^2 = 10^2 - y^2$, $AH^2 = 17^2 - x^2$ nên

$$x^2 - y^2 = 17^2 - 10^2 = 289 - 100 = 189 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x + y = 21$, $x - y = 9$.

Do đó $x = 15$, $y = 6$. Ta có $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ nên $AH = 8$.

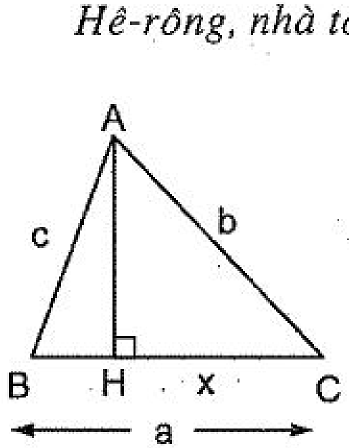
Vậy $$S_{ABC} = \frac{21.8}{2} = 84(cm^2).$$

Chú ý : Trong ví dụ 53, ta tính được diện tích tam giác khi biết độ dài ba cạnh.

Ví dụ 54 dưới đây cho ta công thức tổng quát tính diện tích tam giác theo ba cạnh.

Ví dụ 54(12). Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c, diện tích S. Chứng minh rằng $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với p là nửa chu vi của tam giác (công thức Hê-rông).

Hê-rông, nhà toán học Hi Lạp thế kỉ I.



Hình 39

Giải : (h.39) Giả sử $a \geq b \geq c$. Vẽ đường cao AH. Do a là cạnh lớn nhất của tam giác nên B và C là các góc nhọn, do đó H nằm giữa B và C (chú ý rằng nếu không sắp xếp $a \geq b \geq c$ thì phải xét hai trường hợp : H thuộc hoặc không thuộc đoạn thẳng BC, phức tạp hơn).

Trước hết ta tính CH theo a, b, c. Đặt CH = x, ta có :

$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ (cùng bằng AH^2), do đó :

$$c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2 \Rightarrow 2ax = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Trong ΔAHC ta có :

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Suy ra

$$S^2 = \left(\frac{1}{2}BC.\,AH\right)^2 = \frac{1}{4}BC^2.\,AH^2 = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}.$$

Tử của phân thức trên có thể biến đổi thành

$$(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) =$$

$$= [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2] =$$

$$= (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b) =$$

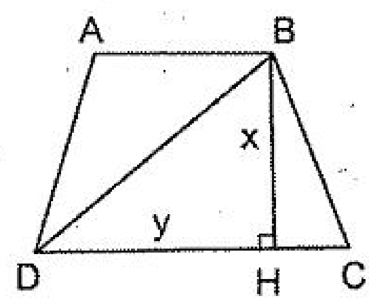
$$= 2p(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a) = 16p(p - c)(p - b)(p - a).$$

Vậy $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

Ví dụ 55(12). Tính chiều cao một hình thang cân có diện tích bằng $12cm^2$, đường chéo bằng 5cm.

Giải

Gọi BH là đường cao của hình thang cân ABCD (h.40). Dễ thấy $DH = \frac{AB + CD}{2}$. Do đó đặt $BH = x$, $DH = y$, ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$



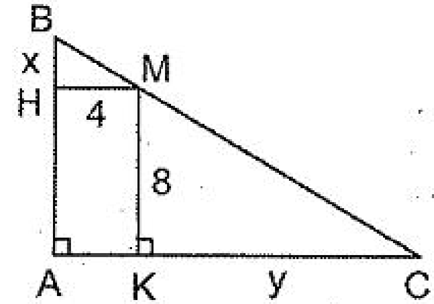
Hình 40

Suy ra $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 25 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 49 \\ (x - y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = \pm 1 \end{cases}$

Do đó : $x = 4$; $y = 3$ hoặc $x = 3$; $y = 4$.

Đường cao của hình thang cân bằng 4cm hoặc 3cm.

Ví dụ 56 (17). Điểm M nằm trên cạnh huyền của một tam giác vuông diện tích $100cm^2$ và có khoảng cách đến hai cạnh góc vuông bằng 4cm và 8cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông.



Hình 41

Giải : (h.41)

Vẽ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$. Đặt $BH = x$, $KC = y$.

ΔBHM và Δ MKC đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{x}{8} = \dfrac{4}{y} \Rightarrow xy = 32$. (1)

Mặt khác, $AB.AC = 2S_{ABC} \Rightarrow (x + 8)(y + 4) = 200$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y^2 - 17y + 16 = 0$ nên $(y - 1)(y - 16) = 0$.

Vậy $y_1 = 1$; $y_2 = 16$.

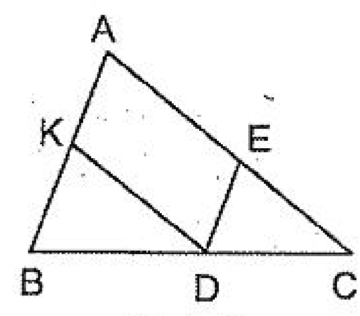
Với $y = 1$ thì $x = 32$, ta có $AC = 1 + 4 = 5$ (cm), $AB = 32 + 8 = 40$ (cm).

Với $y = 16$ thì $x = 2$, ta có $AC = 16 + 4 = 20$ (cm), $AB = 2 + 8 = 10$ (cm).

Đáp số : AC = 5 cm, AB = 40 cm và AC = 20 cm, AB = 10 cm.

Ví dụ 57 (18). Cho tam giác ABC. Qua điểm D thuộc cạnh BC, vẽ các đường thẳng song song với AB, AC tạo thành một hình bình hành có diện tích bằng $\dfrac{3}{8}$ diện tích tam giác ABC. Tính tỉ số BD : BC.

Giải : (h.42)



Hình 42

Đặt $\dfrac{BD}{BC} = x$ thì $\dfrac{DC}{BC} = 1 - x$. Ta có

$$S_{AKDE} = \frac{3}{8}S_{ABC}$$

nên $$\frac{S_{KBD} + S_{EDC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{8}. \quad (1)$$

ΔKBD và ΔABC đồng dạng nên

$$\frac{S_{KBD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = x^2.$$

ΔEDC và ΔABC đồng dạng nên $\dfrac{S_{EDC}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{DC}{BC}\right)^2 = (1-x)^2$.

Suy ra $$\frac{S_{KBD} + S_{EDC}}{S_{ABC}} = x^2 + (1-x)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$x^2 + (1-x)^2 = \frac{5}{8} \Leftrightarrow (4x-3)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}\ ;\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Vậy tỉ số $\dfrac{BD}{BC}$ bằng $\dfrac{3}{4}$ hoặc $\dfrac{1}{4}$.

Bài tập

324(12) Đường phân giác của các góc tù ở một cạnh đáy của một hình thang cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh đáy kia. Tính các cạnh của hình thang, biết chiều cao bằng 12cm, các đường phân giác nói trên dài 15cm và 13cm.

325(12). Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC diện tích S, lấy các điểm D, E sao cho $AD = \dfrac{1}{4}AB$, $AE = \dfrac{1}{4}AC$. Gọi K là giao điểm của BE và CD. Tính diện tích tứ giác ADKE.

326(12). Trên các cạnh AB, BC của tam giác ABC diện tích S, lấy các điểm D, E sao cho $AD = \dfrac{1}{3}AB$, $BE = \dfrac{1}{3}BC$. Gọi K là giao điểm của AE và CD. Tính diện tích tam giác BKC.

327(12). Tính diện tích của một tam giác cân có chiều cao ứng với cạnh đáy bằng 10cm, chiều cao ứng với cạnh bên bằng 12cm.

328(12). Tính diện tích một tam giác có ba đường trung tuyến bằng 30cm, 51cm, 63cm.

329(12). Hình vuông EFGH nội tiếp hình vuông ABCD sao cho E, F, G, H chia các cạnh của hình vuông ABCD theo tỉ số k. Tính k, biết rằng $S_{EFGH} = \dfrac{5}{9}S_{ABCD}$.

330(12). Một tứ giác có mỗi đường chéo bằng a, tổng các "đường trung bình của tứ giác" bằng b ("đường trung bình của tứ giác" là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ giác). Tính diện tích tứ giác theo a và b.

331 (12). Tính diện tích tứ giác ABCD, biết rằng AB vuông góc với CD, AB = 6cm, BC = 15cm, CD = 8cm, DA = 5cm.

332 (15). Tính độ dài đường phân giác AD của tam giác ABC biết rằng AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm.

333*(17). Tính diện tích tam giác ABC có đường cao AH = 6cm, biết rằng AH chia góc A theo tỉ số 1 : 2 và chia cạnh BC thành hai đoạn mà đoạn nhỏ bằng 3cm.

334* (17). Cho tam giác ABC nhọn, AC > AB, trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC, O là giao điểm các đường trung trực của tam giác ABC. Biết HO song song với BC, OH = 11cm, OM = 5cm. Tính độ dài BC.

TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

I – BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Các bài toán cực trị trong hình học có dạng chung như sau : Trong tất cả các hình có chung một tính chất, tìm những hình sao cho một đại lượng nào đó (như độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất.

Các bài toán cực trị thường được trình bày theo hai cách :

– *Cách 1 :* Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình, rồi chứng minh rằng mọi hình khác đều có giá trị (của đại lượng phải tìm cực trị) lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) giá trị của đại lượng đó ở hình đã chỉ ra.

– *Cách 2 :* Thay điều kiện một đại lượng đạt cực trị (lớn nhất hoặc nhỏ nhất) bằng các điều kiện tương đương, cuối cùng dẫn đến một điều kiện mà ta xác định được vị trí của các điểm để đạt cực trị.

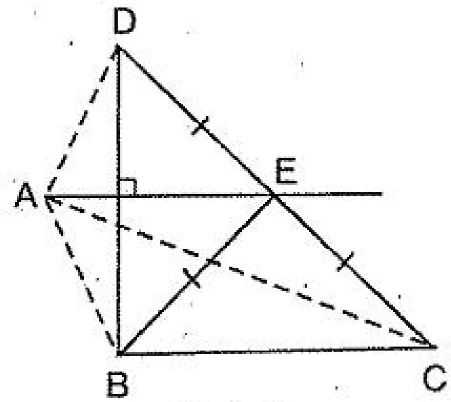
Lời giải trình bày theo cách 2 tự nhiên hơn vì nó mang tính chất tìm kiếm. Dưới đây là một ví dụ giải theo hai cách trên.

Ví dụ 58(12). Trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, hãy tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Giải

Cách 1. (h.43) Xét ΔEBC cân tại E và ΔABC bất kì có cùng diện tích (A và E nằm cùng phía đối với BC, A khác E), ta có AE // BC. Ta sẽ chứng minh rằng chu vi ΔEBC nhỏ hơn chu vi ΔABC, bằng cách chứng minh

$$BE + EC < BA + AC.$$



Hình 43

Gọi D là điểm đối xứng với C qua E, ta có

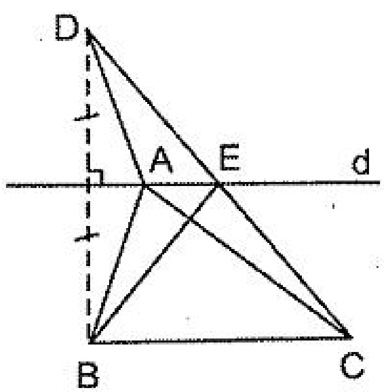
$$BE + EC = DC \qquad (1)$$

ΔBDC có $DE = EC$, $EA \mathbin{//} BC$ nên EA đi qua trung điểm của BD. Ta lại có $DB \perp BC$ (vì tam giác BDC có đường trung tuyến BE bằng nửa CD) nên $EA \perp BD$. Suy ra EA là đường trung trực của BD, nên $AB = AD$. Do đó

$$BA + AC = DA + AC. \qquad (2)$$

ΔADC có $\quad DC < DA + AC. \qquad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $BE + EC < BA + AC$. Vậy trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, tam giác cân đáy BC có chu vi nhỏ nhất.



Hình 44

Cách 2. Xét các ΔABC có cạnh đáy BC không đổi và có cùng diện tích. Do chiều cao ứng với BC không đổi nên A chuyển động trên đường thẳng $d \mathbin{//} BC$ (h.44).

Gọi D là điểm đối xứng với B qua d, ta có $AB = AD$.

Chu vi ΔABC nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB + AC$ nhỏ nhất.

Ta có $\quad AB + AC = DA + AC \geq DC$ (không đổi) ;

$AB + AC = DC \Leftrightarrow$ D, A, C thẳng hàng.

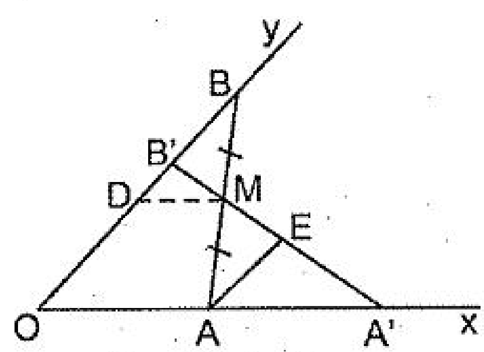
Khi đó A ở vị trí giao điểm E của DC và d, ΔEBC cân tại E.

Vậy trong các tam giác ABC có cùng cạnh BC và cùng diện tích, tam giác cân với cạnh đáy BC có chu vi nhỏ nhất.

Ví dụ 59 (18). Cho góc xOy khác góc bẹt và một điểm M thuộc miền trong của góc. Dựng đường thẳng đi qua M và cắt hai cạnh của góc thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Giải

Cách 1. (h.45)

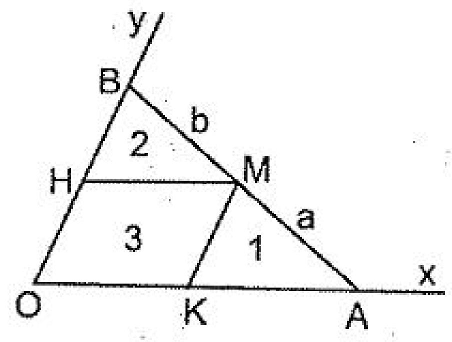


Hình 45

Qua M dựng đường thẳng song song với Ox, cắt Oy ở D. Dựng B đối xứng với O qua D ; BM cắt Ox ở A. Ta sẽ chứng minh rằng ΔOAB có diện tích nhỏ nhất.

Qua M, vẽ đường thẳng bất kì (không trùng với AB), cắt Ox, Oy theo thứ tự ở A', B'. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{OAB} < S_{OA'B'}$. Thật vậy, có duy nhất một đường thẳng qua M cắt Ox, Oy ở A, B sao cho M là trung điểm của AB nên MA', MB' không bằng nhau. Giả sử MA' > MB', trên tia MA' ta lấy ME = MB' thì $S_{MBB'} = S_{MAE} < S_{MAA'}$. Do đó $S_{OAB} < S_{OA'B'}$.

Cách 2. Vẽ MH // OH, MK // OB (h.46) thì S_{OHMK} không đổi. Đặt $S_{OHMK} = S_3$, $S_{AKM} = S_1$, $S_{MHB} = S_2$, $S_{ABC} = S$. Đặt MA = a, MB = b. Ta có



Hình 46

$$S_3 = S - (S_1 + S_2)$$

nên
$$\frac{S_3}{S} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S}.$$

Các tam giác AKM, MHB, AOB đồng dạng nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_3}{S} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} = \frac{2ab}{(a+b)^2} \Rightarrow \frac{S}{S_3} = \frac{(a+b)^2}{2ab} \geq 2$$

(áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \geq 4ab$, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a = b).

Vậy $S \geq 2S_3$, do đó diện tích AOB nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b, khi đó M là trung điểm của AB.

II – CÁC BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG DÙNG ĐỂ GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

1. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên

Quan hệ này thường được sử dụng dưới dạng :

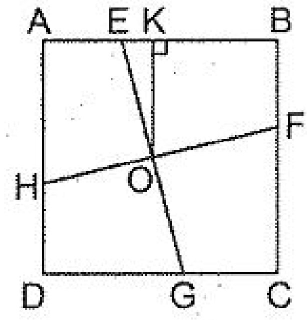
– Trong các tam giác vuông (có thể suy biến thành đoạn thẳng) có các cạnh góc vuông AH và cạnh huyền AB thì AB ≥ AH, xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi B trùng H.

– Trong các đoạn thẳng nối từ một điểm đến các điểm thuộc một đường thẳng, đoạn thẳng vuông góc với đường thẳng có độ dài nhỏ nhất.

– Trong các đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song, đoạn thẳng vuông góc với hai đường thẳng song song có độ dài nhỏ nhất.

Ví dụ 60 (18). Cho hình vuông ABCD. Hãy nội tiếp trong hình vuông đó một hình vuông có diện tích nhỏ nhất.

Giải : (h.47) Gọi EFGH là hình vuông nội tiếp trong hình vuông ABCD. Tâm của hai hình vuông này phải trùng nhau tại một điểm O.



Hình 47

Ta có $S_{EFGH} = \dfrac{EG.FH}{2} = \dfrac{2OE.2OE}{2} = 2OE^2$. Như vậy S nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất. Gọi K là trung điểm của AB, ta có OE ≥ OK (hằng số) ; OE = OK ⇔ E trùng K.

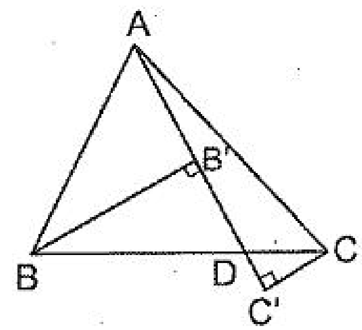
Vậy diện tích EFGH nhỏ nhất khi các đỉnh E, F, G, H là trung điểm các cạnh của hình vuông ABCD.

2. Quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu

Trong hai đường xiên cùng kẻ từ một điểm nằm ngoài một đường thẳng đến đường thẳng đó, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

Ví dụ 61 (12). Cho tam giác ABC. Qua A dựng đường thẳng d cắt cạnh BC của tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến d có giá trị nhỏ nhất.

Giải : (h.48) Gọi D là giao điểm của d và cạnh BC. Vẽ BB', CC' vuông góc với d. Với mọi vị trí của D trên cạnh BC ta có :



Hình 48

$$S_{BAD} + S_{CAD} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AD.BB' + \frac{1}{2}AD.CC' = S \Rightarrow BB' + CC' = \frac{2S}{AD}.$$

Do đó BB' + CC' nhỏ nhất ⇔ $\dfrac{2S}{AD}$ nhỏ nhất ⇔ AD lớn nhất.

Giả sử AC ≥ AB thì trong hai đường xiên AD, AC, đường xiên AD có hình chiếu nhỏ hơn, do đó AD ≤ AC (hằng số) ; AD = AC ⇔ D trùng C.

Vậy đường thẳng d phải dựng là đường thẳng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC.

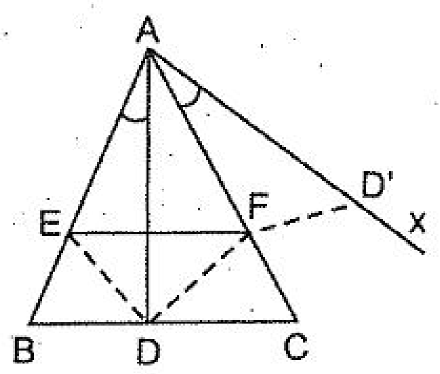
Chú ý : Bỏ điều kiện đường thẳng d cắt cạnh BC, xem bài 369.

3. Bất đẳng thức tam giác

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta có AC + CB ≥ AB ; AC + CB = AB ⇔ C thuộc đoạn thẳng AB.

Để sử dụng bất đẳng thức tam giác, đôi khi ta phải thay đổi phía của một đoạn thẳng đối với một đường thẳng.

Ví dụ 62 (3). Cho tam giác ABC cân tại A và điểm D cố định thuộc cạnh đáy BC. Hãy dựng một đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh bên ở E và F sao cho DE + DF có giá trị nhỏ nhất.



Hình 49

Phân tích cách giải (h.49) Ta đổi phía của đoạn thẳng DE đối với đường thẳng AC bằng cách tạo ra một đoạn thẳng D'E' sao cho D'E' = DE, E' trùng F và D' cố định. Muốn vậy ta quay D quanh A một góc bằng góc BAC (trên nửa mặt phẳng không chứa D, có bờ AC, dựng tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$, trên Ax lấy D' sao cho AD' = AD). Như vậy D' là điểm cố định và D'F = DE (vì $\Delta D'AF = \Delta DAE$ theo trường hợp cạnh – góc – cạnh).

Ta có DF + DE = DF + FD' ≥ DD' (hằng số).

Do đó DF + DE nhỏ nhất ⇔ DF + FD' nhỏ nhất ⇔ F là giao điểm của DD' và AC.

4. Các bất đẳng thức đại số

Các bất đẳng thức thường được sử dụng là :

– Bất đẳng thức về luỹ thừa bậc chẵn :

$$x^2 \geq 0 \qquad (1)$$

$$-x^2 \leq 0 \qquad (2)$$

– Bất đẳng thức Cô-si : $(x + y)^2 \geq 4xy$ hay $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (3)

với x, y không âm, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi x = y.

Chú ý rằng từ bất đẳng thức (3), ta còn suy ra với hai số không âm x, y :

– Nếu x + y là hằng số thì $xy_{max} \Leftrightarrow x = y$;

– Nếu xy là hằng số thì $(x + y)_{min} \Leftrightarrow x = y$.

Để sử dụng các bất đẳng thức đại số, ta thường đặt một độ dài thay đổi bằng x, biểu thị đại lượng cần tìm cực trị bằng một biểu thức của x, rồi tìm điều kiện để biểu thức có cực trị.

Ví dụ 63 (12). Giải ví dụ 60 bằng các cách khác.

Giải : (h.50) Xét hình vuông EFGH nội tiếp hình vuông ABCD, ta có AE = BF = CG = DH. Gọi AB = a, AE = x thì

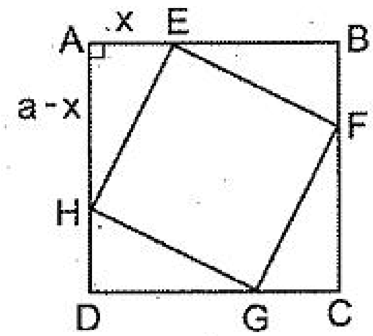
$$EB = FC = DG = HA = a - x.$$

Cách 1. Gọi diện tích hình vuông EFGH là S, ta có :

$$S = a^2 - 4.\frac{x(a-x)}{2} =$$

$$= a^2 - 2ax + 2x^2 =$$

$$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2};$$



Hình 50

$$\min S = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \text{E là trung điểm của AB.}$$

Lưu ý : Ta kí hiệu minS là giá trị nhỏ nhất của S, maxS là giá trị lớn nhất của S.

Cách 2. S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4S_{AEH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow 4.\frac{x(a-x)}{2}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow x(a-x) \text{ lớn nhất.}$$

Chú ý rằng x và a – x là hai số dương có tổng không đổi (bằng a) nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số ấy bằng nhau. Khi đó

$$x = a - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \text{E là trung điểm của AB.}$$

Ví dụ 64 (12). Cho tam giác ABC vuông cân có AB = AC = 10cm. Tam giác DEF vuông cân ở D nội tiếp tam giác ABC (D thuộc AB, F thuộc AC, E thuộc BC). Xác định vị trí của điểm D để diện tích tam giác DEF nhỏ nhất.

Giải : (h.51) Gọi AD = x. Kẻ EH ⊥ AB thì AD = EH = BH = x, DH = 10 – 2x. Ta có

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE.DF = \frac{1}{2}DE^2 =$$

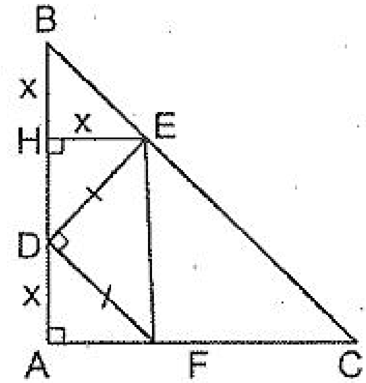
$$= \frac{1}{2}(EH^2 + DH^2) = \frac{1}{2}[x^2 + (10-2x)^2] =$$

$$= \frac{1}{2}(5x^2 - 40x + 100) = \frac{5}{2}(x^2 - 8x + 20) =$$

$$= \frac{5}{2}(x - 4)^2 + 10 \geq 10.$$

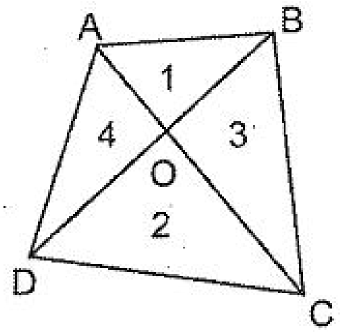
$\min S_{DEF} = 10$ (cm^2) $\Leftrightarrow x = 4$. Do đó AD = 4cm.

Chú ý : Tổng quát, $\min S_{DEF} = \frac{1}{5}S_{ABC}$.



Hình 51

Ví dụ 65 (12). Các đường chéo của tứ giác ABCD cắt nhau ở O. Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác, biết $S_{AOB} = 4cm^2$, $S_{COD} = 9cm^2$.



Hình 52

Giải : (h. 52)

Kí hiệu như hình vẽ. Ta có :

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_1}{S_3} \Rightarrow S_1S_2 = S_3S_4 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$S_3 + S_4 \geq 2\sqrt{S_3S_4} = 2\sqrt{4.9} = 12.$$

Ta có

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq 4 + 9 + 12 = 25.$$

$\max S = 25$ (cm^2) khi và chỉ khi :

$$S_3 = S_4 \Leftrightarrow S_{ADC} = S_{BCD} \Leftrightarrow AB \parallel CD.$$

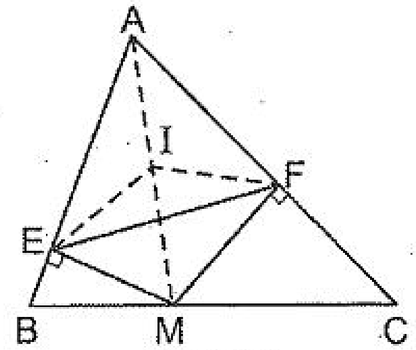
Chú ý : Tổng quát, thay 4 và 9 bởi a và b, ta có $\max S = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

III – CÁC CHÚ Ý KHI GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

Chú ý 1. Khi giải các bài toán cực trị, nhiều khi ta cần biến đổi tương đương điều kiện cực trị của đại lượng này thành điều kiện cực trị của đại lượng khác.

Ví dụ 66(16). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, M là một điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, AC. Tìm vị trí của M để EF có độ dài nhỏ nhất.

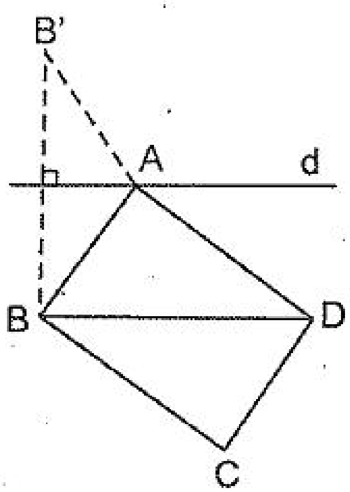
Giải : (h.53) Chú ý đến hai tam giác vuông chung cạnh huyền là AEM, AFM, ta gọi I là trung điểm của AM, ta có IA = IE = IM = IF. Như vậy EF là cạnh đáy của tam giác cân IEF. Dễ thấy $\widehat{EIF} = 2\widehat{EAF}$, mà $\widehat{EAF}$ không đổi nên $\widehat{EIF}$ không đổi. Tam giác cân EIF có số đo góc ở đỉnh không đổi nên cạnh đáy nhỏ nhất khi và chỉ khi cạnh bên nhỏ nhất. Do đó EF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất. Khi đó M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC.



Hình 53

Chú ý 2. Nhiều bài toán cực trị có liên quan đến bài toán tìm tập hợp điểm : Trong tập hợp các hình có chung một tính chất, khi ta cố định một số yếu tố không đổi của hình, các điểm còn lại có thể chuyển động trên một đường nhất định, việc theo dõi vị trí của chúng giúp ta tìm được cực trị của bài toán.

Ví dụ 67(12). Trong các hình bình hành có diện tích và một đường chéo không đổi, hình nào có chu vi nhỏ nhất ?



Hình 54

Giải : Xét các hình bình hành ABCD có BD cố định (h.54). Diện tích hình bình hành không đổi nên diện tích tam giác ABD không đổi, do đó A chuyển động trên đường thẳng d // BD.

Cần xác định vị trí của A trên d để BA + AD nhỏ nhất. Ta đổi phía của BA đối với d bằng cách lấy B' đối xứng với B qua d. Khi đó B' cố định,

$$BA + AD = B'A + AD \geq B'D \text{ (hằng số)}.$$

BA + AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ B'A + AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ A là giao điểm của d và đoạn B'D. Khi đó AB = AD.

Vậy hình bình hành có chu vi nhỏ nhất khi nó là hình thoi.

Chú ý 3. Khi giải các bài toán cực trị, có khi ta phải tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong từng trường hợp, rồi so sánh các giá trị ấy với nhau để tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của cả bài toán.

Ví dụ 68(12). Cho tam giác ABC. Dựng đường thẳng d đi qua A sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến d có giá trị lớn nhất.

Giải : Gọi BB', CC' là khoảng cách từ B và C đến d. Xét hai trường hợp :

1. Đường thẳng d cắt cạnh BC tại D (h.55) :

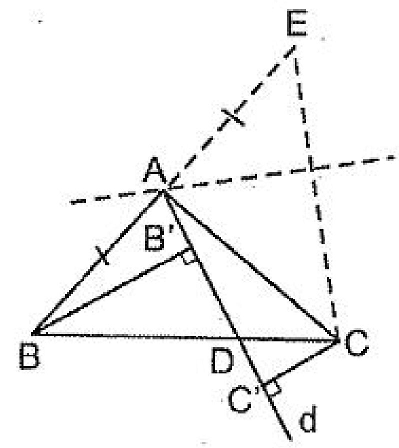
$$BB' + CC' \le BD + CD = BC.$$

(Chú ý rằng nếu $\hat{B}$ hoặc $\hat{C}$ lớn hơn 90^o thì dấu bằng không đạt được, nhưng điều đó không ảnh hưởng đến bài toán).

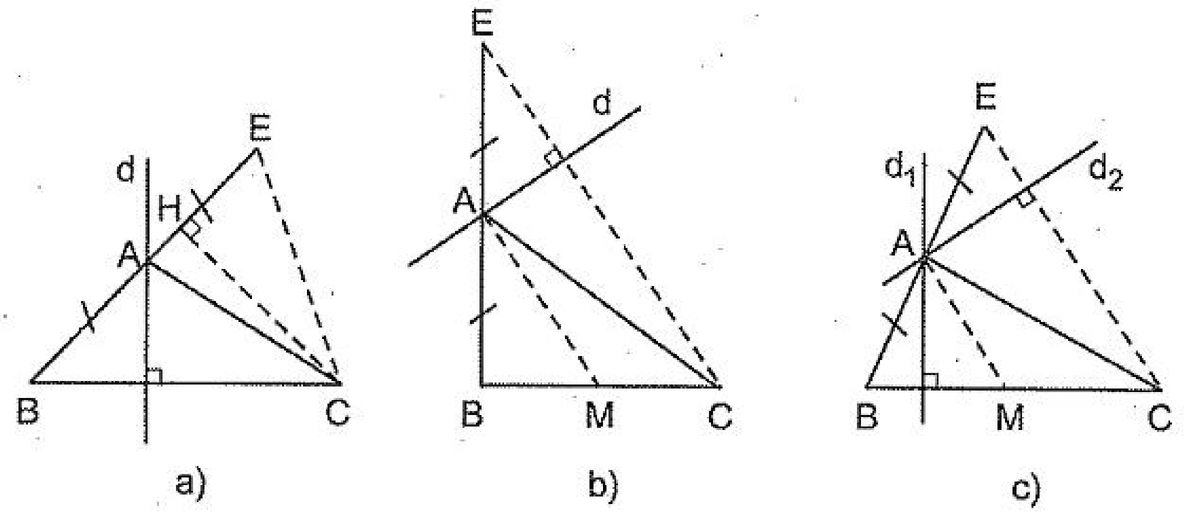
2. Đường thẳng d không cắt cạnh BC. Khi đó d cắt cạnh CE với E là điểm đối xứng với B qua A.

Giải như trường hợp 1, ta được $BB' + CC' \le CE$.

Bây giờ ta so sánh BC và CE :



Hình 55



Hình 56

a) Trường hợp $\widehat{BAC} > 90^o$ (h. 56a). Nếu kẻ $CH \perp BE$ thì H thuộc tia đối của tia AB nên HB > HE, do đó BC > CE. Ta có

$$\max(BB' + CC') = BC \Leftrightarrow d \perp BC.$$

b) Trường hợp $\widehat{BAC} < 90^o$ (h. 56b). Nếu kẻ $CH \perp BE$ thì H thuộc tia đối của tia AE nên HE > HB, do đó CE > BC. Ta có

$$\max(BB' + CC') = CE \Leftrightarrow d \perp CE.$$

c) Trường hợp $\widehat{BAC} = 90^o$ (h. 56c). Ta có BC = CE. Do đó

$$\max(BB' + CC') = BC = CE \Leftrightarrow d \perp BC \text{ hoặc } d \perp CE.$$

Chú ý

1. Nếu gọi M là trung điểm của BC thì CE // AM, CE = 2AM nên kết luận của bài toán còn được diễn đạt như sau :

– Nếu $\widehat{BAC} > 90^o$ thì $\max(BB' + CC') = BC \Leftrightarrow d \perp BC$.

– Nếu $\widehat{BAC} < 90^o$ thì $\max(BB' + CC') = 2AM \Leftrightarrow d \perp AM$.

– Nếu $\widehat{BAC} = 90^o$ thì $\max(BB' + CC') = BC = 2AM \Leftrightarrow d \perp BC$ hoặc $d \perp AM$.

2. Đặc biệt hoá ví dụ trên khi tam giác ABC vuông cân tại A, ta có bài toán : Cho hình vuông ABCD. Dựng đường thẳng d đi qua tâm của hình vuông sao cho tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh của hình vuông đến đường thẳng đó có giá trị lớn nhất.

Trả lời : Các đường thẳng phải dựng gồm hai đường thẳng chứa đường trung bình của hình vuông.

Bài tập

335(12). Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD, biết AB = AD = a, BC = CD = b.

336(12). Trong các hình chữ nhật có đường chéo bằng d không đổi, hình nào có diện tích lớn nhất ? Tính diện tích lớn nhất đó.

337(7). Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm M nằm giữa B và C. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của M trên AC, AB. Tìm vị trí của M để DE có độ dài nhỏ nhất.

338(7). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{DHE} = 90^o$. Tìm vị trí của D, E để DE có độ dài nhỏ nhất.

339(12). Cho tam giác ABC vuông cân tại A, BC = 2a. Một đường thẳng d bất kì đi qua A và không cắt cạnh BC. Gọi I và K theo thứ tự là các hình chiếu của B và C trên d, gọi H là trung điểm của BC. Tính diện tích lớn nhất của tam giác HIK.

340(12). Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho AE = AH = CF = CG. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H để tứ giác EFGH có diện tích lớn nhất, nếu :

a) AB = 40cm, BC = 20cm ;

b) AB = a, BC = b (b < a < 3a).

341(12). Người ta dùng một đoạn dây căng thành ba đoạn thẳng tạo với một bức tường làm thành một hình chữ nhật. Hãy chỉ ra cách căng dây để hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất.

342(11). Tìm điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của một lục giác đều cho trước là nhỏ nhất.

343(12). Chứng minh rằng trong các tam giác có cùng cạnh đáy và cùng chu vi, tam giác cân có diện tích lớn nhất.

344(12). a) Trong các hình chữ nhật cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn nhất ?

b) Trong các hình chữ nhật cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất ?

345(12). Trong các hình thoi cùng chu vi, tìm hình có diện tích lớn nhất.

346(12). Trong các hình thoi có cùng diện tích, hình nào có chu vi nhỏ nhất ?

347(12). Chứng minh rằng :

a) Trong các tứ giác cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Trong các tứ giác cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

348(12). Tứ giác ABCD có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^o$, AD = BC, AB = b, CD = a (a > b). Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, DC, DB. Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác EFGH.

349(12). Trong các tứ giác có tổng hai đường chéo bằng s, tứ giác nào có diện tích lớn nhất ?

350(4). Cho góc nhọn xOy và điểm A thuộc miền trong của góc. Dựng điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

351(4). Cho góc nhọn xOy và các điểm A, B thuộc miền trong của góc. Dựng điểm C thuộc tia Ox, điểm D thuộc tia Oy sao cho đường gấp khúc ACDB có độ dài ngắn nhất.

352(7). Cho hình chữ nhật ABCD. Tìm tứ giác có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình chữ nhật sao cho chu vi tứ giác có giá trị nhỏ nhất.

353(7). Cho điểm E thuộc cạnh AB của hình chữ nhật ABCD. Dựng các điểm F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD, DA sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

354(12). Cho hình chữ nhật ABCD diện tích S. Tìm diện tích nhỏ nhất của các tứ giác EFGH có bốn đỉnh lần lượt thuộc bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình chữ nhật và AE + CG ≤ AB, AH + CF ≥ AD.

355(12). Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm diện tích lớn nhất của các hình thang có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh của hình vuông và hai cạnh đáy song song với một đường chéo của hình vuông.

356(17). Cho hình vuông ABCD cạnh 6cm. Điểm E thuộc cạnh AB sao cho AE = 2cm, điểm F thuộc cạnh BC sao cho BF = 3cm. Dựng các điểm G, H theo thứ tự thuộc các cạnh CD, AD sao cho EFGH là hình thang :

a) có đáy EH, FG và có diện tích nhỏ nhất ;

b) có đáy EF, GH và có diện tích lớn nhất.

357(12). Cho hình chữ nhật ABCD có các kích thước là a và b. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật EFGH ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD (mỗi đỉnh của hình chữ nhật ABCD nằm trên một cạnh của hình chữ nhật EFGH).

358(12). Cho tam giác ABC. Xác định vị trí của các điểm D, E trên các cạnh AB, AC sao cho BD + CE = BC và DE có độ dài nhỏ nhất.

359(12). Trong các tam giác vuông có tổng hai cạnh góc vuông không đổi, tam giác nào có chu vi nhỏ nhất ?

360(7). Chứng minh rằng trong các tam giác vuông có cạnh huyền không đổi, tam giác vuông cân có chu vi lớn nhất.

361(12). Cho tam giác ABC có các góc B và C nhọn, BC = a, đường cao AH = h. Xét hình chữ nhật MNPQ nội tiếp tam giác có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Hình chữ nhật MNPQ ở vị trí nào thì diện tích của nó có giá trị lớn nhất ?

362(13). Từ một tấm kim loại hình tam giác vuông, cắt ra một hình vuông theo hai cách :

Cách 1 : Một góc của hình vuông trùng với góc vuông của tam giác, đỉnh đối diện thuộc cạnh huyền của tam giác.

Cách 2 : Một cạnh của hình vuông nằm trên cạnh huyền của tam giác, hai đỉnh kia thuộc hai cạnh góc vuông của tam giác.

Cách cắt nào cho hình vuông có diện tích lớn hơn ?

363(12). Cho tam giác ABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Các điểm D, E theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC. Gọi H và K theo thứ tự là các hình chiếu của D và E trên BC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác DEKH.

364(12). Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thuộc miền trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác sao cho tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị nhỏ nhất.

365(12). Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thuộc cạnh BC sao cho tổng các khoảng cách từ M đến AB và đến AC có giá trị nhỏ nhất.

366(12). Cho hình thang ABCD. Tìm điểm M thuộc miền trong hoặc nằm trên cạnh của hình thang sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các cạnh của hình thang có giá trị nhỏ nhất.

367(12). Hỏi như ví dụ 61, trong đó đường thẳng d có thể cắt hoặc không cắt cạnh BC.

368(10). Cho hình vuông ABCD và một điểm K nằm bên trong không trùng với tâm hình vuông. Dựng qua K một đường thẳng sao cho nó cắt hình vuông thành hai phần có hiệu các diện tích lớn nhất.

369(12). Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm M, N theo thứ tự chuyển động trên các cạnh AB, AC sao cho AM = CN. Xác định vị trí của M, N để :

a) MN có giá trị nhỏ nhất ;

b) diện tích tam giác AMN có giá trị lớn nhất.

370(10). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm M thuộc cạnh BC, gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh rằng khi điểm M chuyển động trên cạnh BC thì :

a) Chu vi tứ giác MEAF không đổi ;

b) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn luôn đi qua một điểm K cố định ;

c) Tam giác KEF có diện tích nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC.

371(12). Cho tam giác ABC diện tích S. Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CF}{CA} = k$. Với giá trị nào của k thì diện tích tam giác DEF có giá trị nhỏ nhất ?

372*(12). Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}$ có giá trị nhỏ nhất, trong đó x, y, z theo thứ tự là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC, AB.

373*(10). Cho tam giác ABC có các góc nhỏ hơn 120^o. Tìm điểm M nằm bên trong tam giác sao cho tổng MA + MB + MC có giá trị nhỏ nhất.

374(17). Cho hình vuông ABCD cạnh a, điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc cạnh AD sao cho CE = AF. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự ở M, N.

a) Chứng minh rằng CM. DN = a^2.

b) Gọi K là giao điểm của NA và MB. Chứng minh rằng $\widehat{MKN} = 90^o$.

c) Các điểm E và F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất ?

375(18). Cho tam giác ABC. Qua một điểm bất kì thuộc cạnh BC, vẽ các đường thẳng song song với hai cạnh kia tạo với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của điểm M để hình bình hành có diện tích lớn nhất.

376 (18). Cho tam giác ABC. Qua điểm O nằm bên trong tam giác, vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chia tam giác thành ba hình bình hành và ba tam giác nhỏ.

a) Biết diện tích tam giác ABC bằng 81cm^2, hai trong ba tam giác nhỏ có diện tích 4cm^2 và 16cm^2. Tính diện tích tam giác còn lại.

b) Chứng minh rằng tổng diện tích của ba tam giác nhỏ lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ diện tích tam giác ABC. Điểm O ở vị trí nào thì xảy ra dấu bằng ?

377*(18). a) Cho hình thang ABCD và một điểm N thuộc cạnh đáy AD. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc cạnh đáy BC sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{ND}$ thì phần chung của hai tam giác AMD, BNC có diện tích lớn nhất.

b) Cho hình thang ABCD. Dựng các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh đáy BC, AD sao cho phần chung của hai tam giác AMD, BNC có diện tích lớn nhất.

Bài đọc thêm

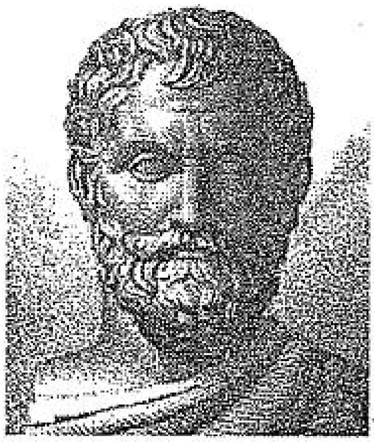
TA-LÉT VÀ PY-TA-GO

Ta-lét và Py-ta-go là hai nhà toán học xa xưa nhất mà lịch sử Toán học còn ghi lại được. Ta-lét sinh trước Py-ta-go nửa thế kỉ, từng là thầy dạy Py-ta-go và đã đánh giá cao tài năng của cậu học trò nhỏ tuổi.

Ta-lét sinh khoảng năm 624 và mất khoảng 547 trước Công nguyên. Ông sinh ra ở thành phố Mi-lê giàu có của xứ I-ô-ni thịnh vượng ven biển phía tây Tiểu Á. Ta-lét đã đến Ba-bi-lon, Ai Cập và thu thập từ những xứ sở ấy nhiều kiến thức toán học. Ông được coi là người sáng lập nền Toán học Hi Lạp.

Ta-lét là nhà buôn, nhà chính trị và triết học, nhà toán học và thiên văn học. Ông là người đầu tiên trong lịch sử Toán học đưa ra những phép chứng minh. Ông đã chứng minh được định lí về sự tạo thành các đoạn thẳng tỉ lệ (định lí Ta-lét) và các định lí về hai góc đối đỉnh, hai góc ở đáy của tam giác cân, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn.

Ta-lét đã đo được chiều cao của các Kim tự tháp bằng cách đo bóng của chúng, tính được khoảng cách từ con tàu đến cảng nhờ các tam giác đồng dạng. Ta-lét là người đầu tiên trong lịch sử đoán trước được các ngày nhật thực : hiện tượng này đã



Ta-lét
(624 - 547 tr.C.N)

xảy ra đúng vào ngày mà ông dự đoán, ngày 28 tháng 5 năm 585 trước Công nguyên, trong sự khâm phục của mọi người.

Đáng tiếc là chúng ta không biết gì về các chứng minh cụ thể của Ta-lét. Có lẽ ông cũng sử dụng rộng rãi phương pháp gấp và chồng hình, "có lúc ông xem xét vấn đề một cách tổng quát, có lúc lại dựa vào trực giác là chủ yếu" (theo Prô-clơ, thế kỉ V, nhà bình luận về toán học cổ Hi Lạp). Phải đến Py-ta-go, hình học mới có những biến đổi sâu sắc, và ba thế kỉ sau, với Ơ-clit, hình học mới thực sự trở thành một khoa học suy diễn.

Ta-lét chết lúc già một cách đột ngột khi đang xem một đại hội thế vận. Trên mộ ông có khắc dòng chữ : "Nấm mồ này nhỏ bé làm sao ! Nhưng quang vinh của con người này, ông vua của các nhà thiên văn, mới vĩ đại làm sao !".

Py-ta-go sinh khoảng năm 580 và mất khoảng năm 500 trước Công nguyên. Ông sinh trưởng trong một gia đình quý tộc ở đảo Xa-môt, một đảo giàu có ở ven biển Ê-giê thuộc Địa Trung Hải.

Py-ta-go

Mới 16 tuổi, cậu bé Py-ta-go đã nổi tiếng về trí thông minh khác thường. Cậu theo học nhà toán học nổi tiếng Ta-lét, và chính Ta-lét cũng phải kinh ngạc về tài năng của cậu.

Để tìm hiểu nền khoa học của các dân tộc, Py-ta-go đã dành nhiều năm đến Ấn Độ, Ba-bi-lon, Ai Cập và đã trở nên uyên bác trong hầu hết các lĩnh vực quan trọng : số học, hình học, thiên văn, địa lí, âm nhạc, y học, triết học.

Vào tuổi 50, Py-ta-go mới trở về tổ quốc của mình. Ông thành lập một ngôi trường ở miền Nam I-ta-li-a, nhận hàng trăm môn sinh, kể cả phụ nữ, với thời gian học 5 năm gồm bốn bộ môn : hình học, toán học, thiên văn, âm nhạc. Chỉ những học sinh giỏi vào cuối năm thứ ba mới được chính Py-ta-go trực tiếp dạy. Trường phái Py-ta-go đã đóng một vai trò quan trọng trong việc phát triển khoa học thời cổ, đặc biệt là về số học và hình học.

Py-ta-go đã chứng minh hệ thức giữa độ dài các cạnh của một tam giác vuông (định lí Py-ta-go). Hệ thức này đã được người Ai Cập, người Ba-bi-lon, người Trung Quốc, người Ấn Độ biết đến từ trước, nhưng Py-ta-go là người đầu tiên chứng minh hệ thức ấy.

Trường phái Py-ta-go khảo sát hình vuông có cạnh dài một đơn vị và nhận ra rằng không thể biểu thị độ dài đường chéo của nó bằng một số nguyên hay phân số, tức là tồn tại các đoạn thẳng không biểu thị được theo đoạn thẳng đơn vị bởi một số hữu tỉ. Sự kiện này được so sánh với việc tìm ra hình học phi Ơ-clit ở thế kỉ XIX.

Trường phái Py-ta-go cũng nghiên cứu âm nhạc. Họ giải thích rằng độ cao của âm thanh tỉ lệ nghịch với chiều dài của dây và ba sợi dây đàn có chiều dài tỉ lệ với 6, 4, 3 sẽ cho một hợp âm êm tai.

Py-ta-go còn nghiên cứu cả kiến trúc và thiên văn. Ông cho rằng Trái Đất có hình cầu và ở tâm của vũ trụ.

Py-ta-go và các môn đệ của ông tôn thờ các con số và gán cho mỗi con số một ý nghĩa thần bí : họ cho rằng số 1 là nguồn gốc của mọi số, biểu thị cho lẽ phải ; số lẻ là "số nam", số chẵn là "số nữ" ; số 5 biểu thị việc xây dựng gia đình ; số 7 mang tính chất của sức khoẻ ; số 8 biểu thị cho tình yêu... Trước lúc vào nghe giảng, các học trò của Py-ta-go đọc những câu kinh như : "Hãy ban ơn cho chúng tôi, hỡi những con số thần linh đã sáng tạo ra loài người !".

Py-ta-go cũng viết nhiều văn thơ và nêu lên những phương châm xử thế như :

– Hãy sống giản dị, không xa hoa.

– Hãy tôn trọng cha mẹ.

– Hãy tập chiến thắng sự đói khát, sự lười biếng và sự giận dữ.

– Chớ coi thường sức khoẻ. Hãy cung cấp cho cơ thể đúng lúc những đồ ăn, thức uống và sự luyện tập cần thiết.

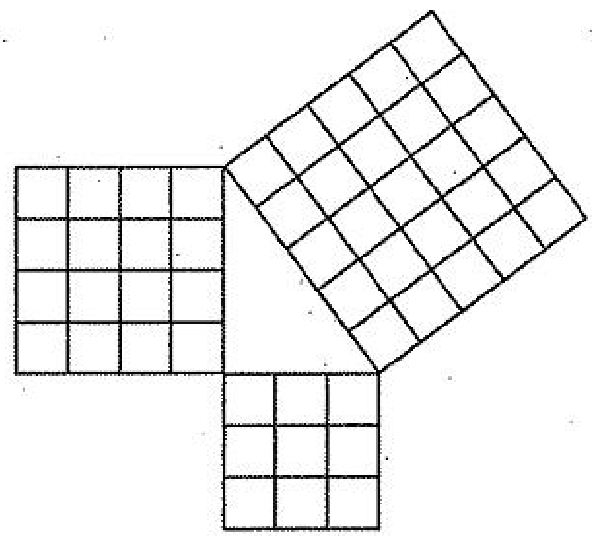
– Chưa nhắm mắt ngủ nếu chưa soát lại tất cả các việc đã làm trong ngày.

– Đừng thấy cái bóng to của mình trên vách tường mà tưởng mình vĩ đại.

– Hãy chỉ làm những việc mà sau đó mình không hối hận và bạn mình không phiền lòng.

– Trong xã giao đừng đổi bạn thành thù mà hãy đổi thù thành bạn.

– Hoa quả của đất chỉ có một lần trong năm, còn hoa quả của tình bạn thì nở suốt bốn mùa.



Hình 57

Ngày 8-9-1977, khi phát những tín hiệu vào vũ trụ nhằm tìm kiếm sự liên lạc với một nền văn minh ngoài Trái Đất, người ta đã phát một hình vẽ đặc trưng cho định lí Py-ta-go (h.57). Có lẽ các chuyên gia vũ trụ cho rằng nếu có những sinh vật thông minh ở ngoài Trái Đất, chắc hẳn họ cũng phải biết đến định lí Py-ta-go.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA NHÀ VĂN LÉP TÔN-XTÔI

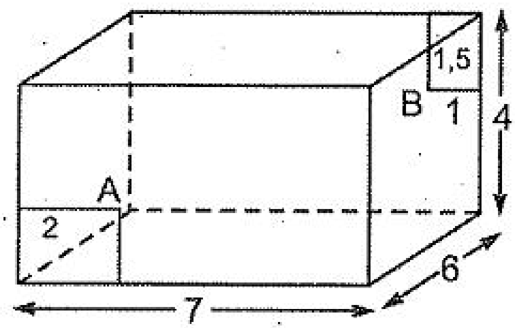
Ai cũng biết Lép Tôn-xtôi là nhà văn lớn của nước Nga (1828 – 1910). Nhưng ít người biết rằng ông đồng thời cũng là tác giả của nhiều bài toán hay. Tư duy văn học hình tượng và tư duy toán học chính xác cùng hoà chung trong bộ óc của ông. Dưới đây là bốn bài toán của ông.

1. Bài toán đẳng chu

Trong câu chuyện "Con người có cần nhiều đất không ?", Tôn-xtôi có kể về một nông dân có quyền nhận mảnh ruộng mà anh ta chạy được vòng quanh nó trong một ngày. Để có nhiều ruộng nhất, anh ta phải chạy theo đường nào : theo cạnh hình vuông, theo cạnh lục giác đều, hay theo đường tròn ? Vấn đề tác giả đặt ra chính là một bài toán cực trị : bài toán đẳng chu (cùng chu vi) : Trong các đường có cùng một chu vi, đường nào bao bọc một diện tích lớn nhất ? (đó là đường tròn).

2. Bài toán ruồi và nhện

Một con nhện và một con ruồi đậu trên hai mặt tường đối diện của một căn phòng. Tôn-xtôi không mô tả sự việc dưới khía cạnh của một cuộc đuổi bắt sinh động và hấp dẫn. Với cách nhìn toán học, ông đặt ra câu hỏi mà ngay cả những người làm toán cũng ít để ý đến : Con đường nào ngắn nhất dẫn con nhện bò đến chỗ con mồi ?

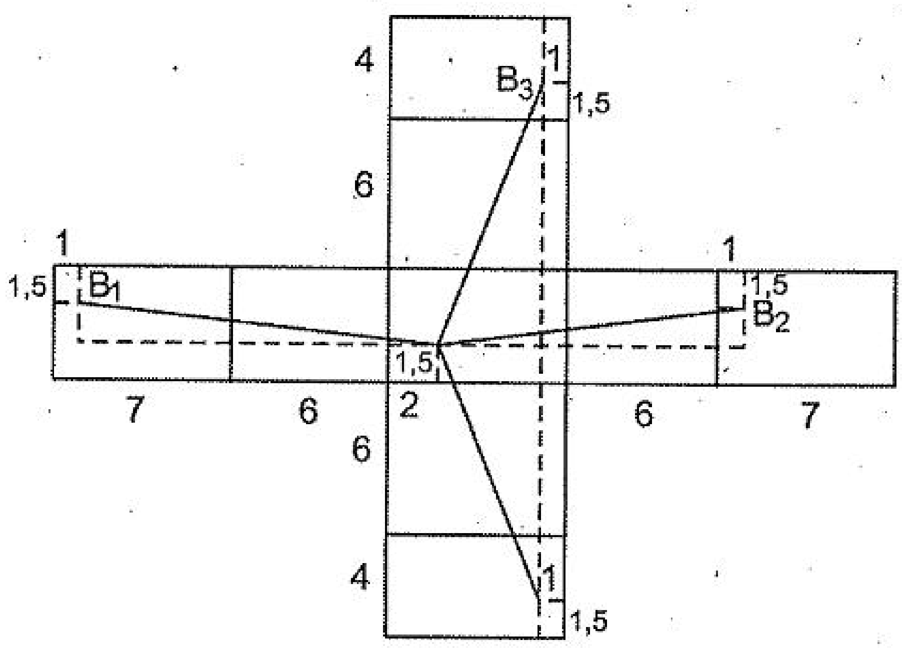


Hình 58

Chẳng hạn căn phòng dài 7m, rộng 6m, cao 4m, con nhện ở cách mép tường 2m, cách sàn 1,5m (thuộc mặt tường 7m × 4m), còn con ruồi đậu cách mép tường đối diện 1m, cách trần 1,5m (h.58).

Con nhện có thể bò theo đường qua mặt tường bên trái, hoặc qua mặt tường bên phải, hoặc qua trần, hoặc qua sàn. Quãng đường ngắn nhất là một trong bốn đoạn AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 trên mặt khai triển của căn phòng (h.59)

Bằng định lí Py-ta-go ta tính được $AB_1 = 14{,}04$m, $AB_2 = \sqrt{197} \approx 12{,}04$m, $AB_3 = \sqrt{116} \approx 10{,}77$m, $AB_4 = \sqrt{116} \approx 10{,}77$m. Như vậy hành trình ngắn nhất mà chú nhện phải thực hiện là 10,77m bằng cách hoặc bò qua trần, hoặc bò qua sàn.



Hình 59

3. Bài toán vòi nước

Lép Tôn-xtôi viết nhiều truyện kể cho thiếu nhi. Ông cũng viết nhiều bài toán cho học sinh. Dưới đây là một bài toán mà Tôn-xtôi viết trong cuốn sách cho trẻ nhỏ :

Người ta cho nước chảy đầy một thùng qua hai ống. Nhưng thùng có một lỗ rò dưới đáy nên sau 2 giờ nước trong thùng sẽ chảy ra hết. Biết rằng nếu thùng không bị chảy thì mỗi ống sẽ chảy một mình đầy thùng trong 15 phút và 24 phút . Hỏi nếu mở cả hai ống thì sau bao lâu chiếc thùng bị rò sẽ đầy nước ?

Bài toán trên phù hợp với trình độ học sinh lớp 6 của ta. Trong 1 phút, lượng nước chảy vào được :

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}=\frac{1}{10}\text{ thùng}$$

nên thùng sẽ đầy nước sau 10 phút.

4. Bài toán cắt cỏ

Một đội cắt cỏ trên hai cánh đồng, cánh đồng lớn có diện tích gấp đôi cánh đồng nhỏ. Cả đội cắt cỏ ở cánh đồng lớn được nửa ngày thì nửa đội tách ra cắt cỏ ở cánh đồng nhỏ. Đến hết ngày hôm đó, cánh đồng lớn được cắt xong, cánh đồng nhỏ còn lại một phần, một người trong đội được giao cắt nốt phần đó trong cả ngày hôm sau. Tính số người của cả đội (năng suất của mỗi người như nhau).

Lời giải bằng cách lập phương trình : Gọi số người của cả đội là x và năng suất (trong một ngày) của mỗi người là y (đơn vị diện tích) thì diện tích cánh đồng lớn là :

$$\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4},$$

diện tích cánh đồng nhỏ là :

$$\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}.$$

Bài toán dẫn đến phương trình :

$$\frac{3xy}{4}=\frac{2(xy+4y)}{4}\text{ , suy ra } x=8.$$

Toàn đội có 8 người.

Tôn-xtôi không giải như trên. Ông đã giải bằng một cách giải số học gọn gàng và đầy vẻ đẹp sáng tạo : Trên cánh đồng lớn, cả đội cắt nửa ngày rồi nửa đội cắt nửa ngày thì xong, chứng tỏ rằng nửa đội cắt nửa ngày được 1/3 cánh đồng này. Cánh đồng nhỏ có diện tích bằng 1/2 cánh đồng lớn mà nửa đội cắt nửa ngày được 1/3 cánh đồng lớn nên phần còn lại chưa cắt xong bằng : $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ diện tích cánh đồng lớn. Do đó trong một ngày, một người cắt được 1/6 cánh đồng lớn.

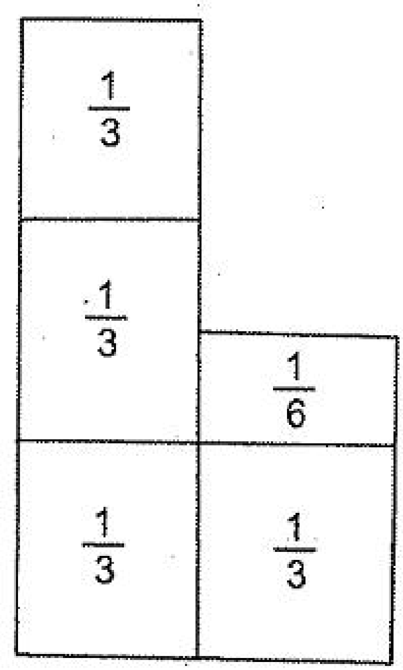
Phần cỏ đã cắt của cả đội trong một ngày bằng :

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{8}{6} \text{ cánh đồng lớn.}$$

Vậy số người của cả đội là :

$$\frac{8}{6}:\frac{1}{6}=8 \text{ người.}$$

Tôn-xtôi còn dùng hình vẽ để minh hoạ lời giải của bài toán (h.60), trong đó ba ô bên trái là diện tích cánh đồng lớn (mỗi ô do nửa đội làm nửa ngày), hai ô bên phải là diện tích cánh đồng nhỏ (ô phía dưới do nửa đội làm nửa ngày, ô phía trên do một người làm nốt trong ngày hôm sau).



Hình 60

Cách giải của Tôn-xtôi thật gần gũi với suy nghĩ đơn giản của những người nông dân Nga mà ông mô tả trong các tác phẩm của mình.

Phải chăng chính tư duy lô gíc của môn toán làm cho nhiều chuyện kể của Tôn-xtôi có kết cấu chặt chẽ, mang tính triết lí sâu sắc ? Và phải chăng những cảm xúc của nhà văn đã làm cho nhiều bài toán và cách giải của ông giàu tính thẩm mĩ và rất nên thơ ?

Xin dẫn ra đây câu nói thú vị của Tôn-xtôi bàn về tính khiêm tốn : "Con người ta là một phân số mà tử số là giá trị thật, còn mẫu số là giá trị mà người ta tưởng là mình có. Nếu mẫu số càng lớn thì phân số càng nhỏ. Nếu mẫu số là vô tận thì phân số bằng 0".

Thật khó mà phân biệt được đó là phát biểu của một nhà văn hay của một người nghiên cứu toán học. **Chất toán và chất thơ** đã hoà làm một trong con người Tôn-xtôi.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN HOẶC ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương III – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§7. Khái niệm về phương trình. Phương trình bậc nhất một ẩn

276. a) $x = -2$; b) $x = 1{,}2$; c) $x = -\frac{1}{3}$.

277. a) Trừ 1 vào mỗi phân thức, ta được

$$\frac{x-105}{100}+\frac{x-105}{101}+\frac{x-105}{102}=\frac{x-105}{5}+\frac{x-105}{4}+\frac{x-105}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x-105)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x = 105.$$

b) Cộng 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, cộng 5 vào vế phải, ta được :

$$(50-x)\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\right)=0.\ \text{Vậy } x = 50.$$

278. a) Biến đổi phương trình thành $(a^2 - b^2)x = -b(a + b)$.

Nếu $a \neq \pm b$ thì $x = \frac{b}{b-a}$.

Nếu $a = b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x (nếu $b = 0$) hoặc vô nghiệm (nếu $b \neq 0$).

Nếu $a = -b$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) Biến đổi phương trình thành $(a^2 - b^2)x = b(a - b)$ rồi giải tương tự như câu a.

279. a) Điều kiện : $a \neq \pm 1$. Biến đổi phương trình thành $2ax = (a-1)^2$.

Nếu $a \neq 0$ (và $a \neq \pm 1$) thì $S = \left\{\dfrac{(a-1)^2}{2a}\right\}$. Nếu $a = 0$ thì $S = \varnothing$.

b) Điều kiện : $a \neq \pm 2$. Biến đổi phương trình thành $(2a-1)x = 2(2a-1)$.

Nếu $a \neq \dfrac{1}{2}$ thì $x = 2$. Nếu $a = \dfrac{1}{2}$ thì $0x = 0$, vô số nghiệm.

c) Điều kiện : $a \neq 0$, $a \neq -1$. Biến đổi phương trình thành :

$$\frac{3a(a^2-a+1)}{a(a+1)^2}x = \frac{3a(a^2-a+1)}{(a+1)^3}.$$

Do $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a^2 - a + 1 \neq 0$ (chứng minh dễ dàng) nên $x = \dfrac{a}{a+1}$.

280. a) Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải :

$$\frac{x-a-b-c}{b+c} + \frac{x-b-c-a}{a+c} + \frac{x-c-a-b}{a+b} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) = 0.$$

Nếu $A = \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b} \neq 0$, phương trình có một nghiệm : $x = a + b + c$.

Nếu $A = 0$, phương trình có tập nghiệm là $\mathbf{R}$.

b) Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải rồi rút gọn được :

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - \frac{3}{a+b+c}\right) = 0.$$

Bạn đọc tự giải tiếp.

c) Cộng 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, cộng 3 vào vế phải rồi rút gọn được :

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a+b+c}\right) = 0.$$

d) Điều kiện : $a, b, c, a+b+c \neq 0$. Trừ 1 vào mỗi phân thức ở vế trái, trừ 3 vào vế phải :

$$\frac{a+b+c-3x}{a}+\frac{a+b+c-3x}{b}+\frac{a+b+c-3x}{c}=\frac{3(a+b+c)-9x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-3x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}\right)=0.$$

Đặt $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}=A$, nếu $A \neq 0$ thì $x=\frac{a+b+c}{3}$, nếu $A=0$ thì phương trình có vô số nghiệm.

§8. Phương trình tích

281. a) $(x+2)(x^2+1)=0$. Nghiệm : -2.

b) $(x+2)(x^2-1)=0$. Nghiệm : -2 ; -1 ; 1.

c) $(x-3)^2(x+5)=0$. Nghiệm : 3 ; -5.

d) $(x+1)(x^2+2x+2)=0$. Nghiệm : -1.

e) $(x-1)(x+2)(x^2-x+4)=0$. Nghiệm : 1 ; -2.

g) $(x-1)^2(x^2+2x+5)=0$. Nghiệm : 1.

h) Nghiệm : 3 ; $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$.

i) $(x^2-1)(2x-1)(3x+1)=0$. Nghiệm : -1 ; 1 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$.

282. a) Đặt $x^2-5x=y$. Ta được $y^2+10y+24=0$, từ đó $y_1=-6$; $y_2=-4$.

Với $y=-6$ ta được $x_1=2$; $x_2=3$.

Với $y=-4$ ta được $x_3=1$; $x_4=4$.

b) Nghiệm : -6 ; -4 ; -1 ; 1.

c) Đặt $x^2+x+1=y$. Ta được $y^2+y-12=0$, từ đó $y_1=3$; $y_2=-4$.

Với $y=3$ ta được $x_1=1$; $x_2=-2$. Với $y=-4$, vô nghiệm.

d) Nghiệm : 2 ; -3.

e) Nghiệm : 2 ; -3.

g) Chú ý rằng $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Phương trình có dạng $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0$. *Đáp số* : $x = 1$.

283. a) Nghiệm : -3 ; 2.

b) Nghiệm : -1 ; 12.

c) $(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x - 18) = 180$.

Đặt $x^2 - 3x - 14 = y$. Tìm được $y = \pm 14$.

Với $y = 14$ ta được $x_1 = 7$; $x_2 = -4$.

Với $y = -14$ ta được $x_3 = 0$; $x_4 = 3$.

d) Nhân 8 vào hai vế, ta được $8x(8x - 1)^2(8x - 2) = 72$.

Đặt $8x - 1 = y$ ta được :

$$(y + 1)\ y^2(y - 1) = 72 \Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow y^2 = 9.$$

Trường hợp $y = 3$ cho $x = \frac{1}{2}$. Trường hợp $y = -3$ cho $x = -\frac{1}{4}$.

e) Nhân hai vế với 24 ta được $(12x + 7)^2(12x + 8)(12x + 6) = 72$.

Đặt $12x + 7 = y$. *Đáp số* : $-\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{6}$.

g) Nhân hai vế với 4 rồi đặt $2x + 2 = y$. *Đáp số* : $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$.

284. a) Đặt $y = x^2 - 6x + 9 \geq 0$, ta được $y_1 = -1$ (loại), $y_2 = 16$.

Đáp số : -1 ; 7.

b) Đặt $x^2 + 1 = y$ ta được $y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$.

Đáp số : -1.

c) Thêm $36x^2$ vào hai vế. *Đáp số* : 4 ; 2.

285. a) Đặt $x + 4 = y$ ta được $y = \pm 1$.

Với $y = 1$ thì $x = -3$. Với $y = -1$ thì $x = -5$.

b) Đặt $x - 2{,}5 = y$. Nghiệm : 2 ; 3.

c) 2 ; 0 ;   d) $\frac{5}{2}$; $\frac{3}{2}$.

286. a) Đặt $x - 3 = y$ rồi rút gọn được $y^4 + 2y^2 - 3 = 0$. *Đáp số :* 4 ; 2.

b) Đặt $x + 1 = y$. *Đáp số :* 0 ; – 1 ; – 2.

287. a) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3 + (1 - 2x)^3 = 0$. Đặt $x + 1 = a$, $x - 2 = b$, $1 - 2x = c$ thì $a + b + c = 0$.

Do đó $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Vậy $abc = 0$. *Đáp số :* -1 ; 2 ; $\frac{1}{2}$.

b) Đặt $x - 7 = a$, $x - 8 = b$ ta được

$$a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0 \Leftrightarrow 4ab\left(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2\right) = 0.$$

Xét $a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2 = \left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhưng không xảy ra dấu bằng.

Đáp số : 7 ; 8.

288. a) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $y^2 - 3y + 2 = 0$. *Đáp số :* $x = 1$.

b) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $(y - 1)(3y - 10) = 0$. *Đáp số :* $\frac{1}{3}$; 3.

c) Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ ta được $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -\frac{10}{3}$. *Đáp số :* 2 ; $\frac{1}{2}$; -3 ; $-\frac{1}{3}$.

d) *Đáp số :* -1.

e) Đặt $x - \frac{1}{x} = y$. *Đáp số :* 2 ; $-\frac{1}{2}$; -3 ; $\frac{1}{3}$.

g) Chia hai vế cho x^2. *Đáp số :* 1 ; 2 ; $\frac{1}{2}$.

h) Chia hai vế cho x^2. *Đáp số :* -2 ; $\frac{1}{2}$; -3 ; $\frac{1}{3}$.

289. $(x^5 - 1) - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$

Phương trình $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm (xem ví dụ 70).

Đáp số : $x = 2$.

290. a) Đưa phương trình về dạng $(x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$;

b) Đưa phương trình về dạng $x^7 - 1 = 0$.

§9. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

291. a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 0$; c) $x = 0$: thoả mãn, $x = 5$: loại.

d) Vô nghiệm ; e) Vô nghiệm ; g) Mọi $x \neq \pm 3$.

292. a) $x = \frac{3}{2}$; b) $x = \frac{3}{8}$.

293. ĐKXĐ : $x \neq 1$. Biến đổi phương trình thành $(a - 1)x = 2a$.

Nếu $a \neq 1$ thì $x = \frac{2a}{a-1}$. Giải điều kiện $\frac{2a}{a-1} \neq 1$ được $a \neq -1$.

Nếu $a = 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Kết luận : Nếu $a \neq \pm 1$ thì $x = \frac{2a}{a-1}$.

Còn lại : vô nghiệm.

294. a) ĐKXĐ : $x \neq \pm 2a$.

Biến đổi phương trình thành $ax = -2a^2$.

Nếu $a \neq 0$ thì $x = -2a$, không thoả mãn ĐKXĐ.

Nếu $a = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với x bất kì $\neq 0$.

b) Nếu $2a = 3b$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq 2a$. Nếu $2a \neq 3b$, phương trình vô nghiệm.

295. a) ĐKXĐ : $x \neq a$, $x \neq b$. Viết phương trình dưới dạng :

$$1 + \frac{1}{1-a} - 1 - \frac{1}{x-b} = \frac{a}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Leftrightarrow x - b - x + a = a \Leftrightarrow 0x = b.$$

Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm. Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x khác a và b.

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm 1$, $x \neq -a$. Biến đổi phương trình về dạng :

$$(1 - a)(a + 2)x = a(a - 1).$$

Kết luận : Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $a \neq -2$ thì $S = \left\{-\dfrac{a}{a+2}\right\}$.

Nếu $a = 1$ thì $S = \{x \mid x \neq \pm 1\}$. Còn lại, $S = \varnothing$.

296. a) ĐKXĐ : $x \neq 0$, $x \neq a + b$. Biến đổi phương trình về dạng :

$$(a+b)(x-a)(x-b) = 0.$$

Nếu $a + b \neq 0$ thì $S = \{a\ ;\ b\}$. Nếu $a = b = 0$ thì $S = \{x \mid x \neq 0\}$.

b) ĐKXĐ : $x \neq b$, $x \neq c$. Biến đổi phương trình về dạng :

$$2(a-b)(c-x) = (a-b)(b-x).$$

Nếu $a \neq b$, $b \neq c$ thì $S = \{2c - b\}$.

Nếu $a = b$ thì $S = \{x \mid x \neq b,\ x \neq c\}$.

Còn lại, $S = \varnothing$.

297. Nếu $a \neq -1$, $a \neq 0$ thì $S = \left\{\dfrac{a^2+1}{a-1}\right\}$. Còn lại $S = \varnothing$.

298. ĐKXĐ : $x \neq a$, $x \neq b$. Biến đổi phương trình :

$$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab} = \frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\Leftrightarrow [a(x-a)+b(x-b)]\left[\frac{1}{ab} - \frac{1}{(x-a)(x-b)}\right] = 0.$$

Giải $a(x-a) + b(x-b) = 0$ được $x = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$, thoả mãn ĐKXĐ.

Giải $ab = (x-a)(x-b)$ được $x = 0$ và $x = a + b$ đều thoả mãn ĐKXĐ.

Dễ thấy 0, $a + b$, $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ là ba nghiệm phân biệt.

299. $(x-c)\left[\dfrac{a-x}{(a-b)(b-c)} + \dfrac{x-b}{(a-b)(a-c)}\right] = 1$

$$\Leftrightarrow (x-c).\frac{(a-x)(a-c)+(x-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1$$

$\Leftrightarrow (x-c)[(a^2-b^2)-x(a-b)-c(a-b)] = (a-b)(b-c)(a-c)$

$\Leftrightarrow (x-c)(a-b)(a+b-x-c) = (a-b)(b-c)(a-c)$

$\Leftrightarrow (x-c)(a+b-x-c)-(b-c)(a-c) = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x-b) = 0$. *Kết luận* : $S = \{a ; b\}$.

§10. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

300. Gọi x là tuổi thọ của Đi-ô-phăng. Ta có phương trình :

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x\ ;\ x = 84.$$

Đi-ô-phăng thọ 84 tuổi.

301. Gọi số phải tìm là $\overline{abcd}$, ta có $\overline{1abcd1} = 21.\overline{abcd}$.

Phương trình : $100\,001 + 10x = 21x$; $x = 9091$.

302. Gọi số phải tìm là $\overline{abcde4}$, ta có $\overline{abcde4}.4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x$, phương trình : $(10x + 4) . 4 = 400000 + x$; $x = 10256$. Số phải tìm : 102564.

303. Gọi tuổi con hiện nay là x, phương trình :

$$3(x+2) - 5(x-4) = 6\ ;\ x = 10.$$

Tuổi con hiện nay là 10, tuổi mẹ hiện nay là 34.

304. Gọi chiều dài là x (m). Phương trình :

$$(x+10)(180-x) - x(160-x) = 2700\ ;\ x = 90.$$

Chiều dài là 90m, chiều rộng là 70m.

305. Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h). Phương trình :

$$1\frac{1}{6}(x+2) = 1\frac{1}{2}(x-2)\ ;\quad x = 16.$$

306. Gọi quãng đường AB là x (km). Phương trình :

$$\frac{x}{24} + \frac{x-6}{32} = \frac{2x-6}{27}\ ;\ x = 30.$$

AB dài 30km, BC dài 24km.

307. Gọi quãng đường CD là x(km). Quãng đường AC + DB = 30 – x. Kể cả lúc đi và lúc về thì quãng đường nằm ngang dài 2x, quãng đường lên dốc dài 30 – x, quãng đường xuống dốc dài 30 – x.

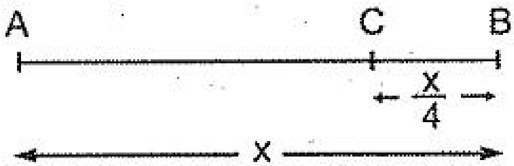
Phương trình :

$$\frac{2x}{15}+\frac{30-x}{10}+\frac{30-x}{20}=4\frac{5}{12}\ ;\ x=5.$$

308. Gọi quãng đường từ nhà An đến nhà Bích là x(km). Quãng đường An đã đi là 2x, quãng đường Bích đã đi là $2x : 4 = \frac{x}{2}$. Gọi C là chỗ hai người gặp nhau thì $BC = \frac{x}{2} : 2 = \frac{x}{4}$.

Thời gian An đi đoạn AC là : $\frac{3x}{4} : 4 = \frac{3x}{16}$.

Thời gian Bích đi đoạn BC là $\frac{x}{4} : 3 = \frac{x}{12}$.



Hình 61

Phương trình : $\frac{3x}{16}-\frac{x}{12}=\frac{1}{3}$; x = 3,2. *Đáp số :* 3,2 km.

309. Lúc 9 giờ, người đi xe đạp cách A 20km, người đi xe máy cách A 30 km. Gọi x là số giờ để ô tô ở vị trí cách đều hai người kia (kể từ lúc 9 giờ).

Phương trình :

$$50x-(20+10x)=(30+30x)-50x\ ;\ x=\frac{5}{6}.$$

Đáp số : 9 giờ 50 phút.

310. Nhiệt độ sau cùng của nước là $62^\circ C$.

311. Gọi nồng độ muối trong dung dịch I là x (%).

Phương trình : $200.\frac{x}{100}+300.\frac{x-20}{100}=500.\frac{33}{100}$; x = 45.

Nồng độ muối trong các dung dịch I và II là 45% và 25%.

312. Đội thứ nhất cần 40 giờ, đội thứ hai cần 60 giờ để làm một mình xong công việc.

313. a) Phương trình : $\frac{56n-68}{n-1}=55$; n = 13.

b) Tổng của 13 số đã cho bằng : 56.13 = 728.

Trong 13 số đó, có một số 68, tổng của 12 số còn lại bằng : 728 – 68 = 660. Số lớn nhất trong 12 số còn lại đạt được nếu 11 số bằng 1, khi đó số lớn nhất bằng : 660 – 11 = 649.

314. Gọi số học sinh của lớp 8B là x.

Bạn thứ nhất của lớp 8B (bạn Anh) quen 10 + 1 bạn của lớp 8A.

Bạn thứ hai của lớp 8B (bạn Bắc) quen 10 + 2 bạn của lớp 8A.

Bạn thứ ba của lớp 8B (bạn Châu) quen 10 + 3 bạn của lớp 8A.

...

Bạn thứ x của lớp 8B (bạn Yến) quen 10 + x bạn của lớp 8A, đó là tất cả số học sinh 8A.

Phương trình : $x + (10 + x) = 50$; $x = 20$.

Lớp 8B có 20 học sinh, lớp 8A có 30 học sinh dự họp mặt.

315. *Đáp số :* 63 quả.

316. a) Gọi số cỏ có sẵn trên mỗi cánh đồng là 1 (phần diện tích), số cỏ mọc thêm trong một tuần trên mỗi cánh đồng bằng y lần số cỏ có sẵn.

Số cỏ 9 con bò ăn trong 2 tuần ở cánh đồng I bằng $1 + 2y$ lần số cỏ có sẵn, do đó mỗi con bò trong một tuần ăn :

$$\frac{1+2y}{9.2} \text{ lần số cỏ có sẵn.} \qquad (1)$$

Số cỏ 6 con bò ăn trong 4 tuần ở cánh đồng II bằng $1 + 4y$ lần số cỏ có sẵn, do đó mỗi con bò trong một tuần ăn :

$$\frac{1+4y}{6.4} \text{ lần số cỏ có sẵn.} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1+2y}{18} = \dfrac{1+4y}{24}$, từ đó $y = \dfrac{1}{4}$.

Số cỏ mọc thêm trong một tuần bằng $\dfrac{1}{4}$ số cỏ lúc đầu.

b) Gọi số bò phải tìm là x. Lập luận tương tự ta có $\dfrac{1+4y}{6.4} = \dfrac{1+6y}{6x}$. Thay $y = \dfrac{1}{4}$ vào phương trình, ta được $x = 5$.

Vậy 5 con bò ăn hết số cỏ có sẵn và số cỏ mọc thêm của cánh đồng III trong 6 tuần.

Chú ý : Cách giải số học, xem cuốn *Nâng cao và phát triển Toán 6 tập hai.*

317. *Đáp số :* 36 con bò.

318. Gọi thời gian phải tìm là x (phút). Ta gọi thời gian người du lịch đi từ A đến B là a phút. Xét các xe buýt đi theo chiều từ B đến A : Trong a phút đi từ A đến B người đó gặp $\frac{a}{10}$ xe ngược chiều chạy lại, trong a phút đi từ B đến A người đó gặp $\frac{a}{15}$ xe cùng chiều vượt qua (đi từ B đến A). Như vậy trong 2a phút có $\frac{a}{10}+\frac{a}{15}$ xe đi qua A theo chiều từ B đến A.

Phương trình : $\frac{2a}{x}=\frac{a}{15}+\frac{a}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{x}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 12.$

Cứ 12 phút các xe buýt lại lần lượt rời bến.

Chú ý : Giải bằng phương trình số học : Giả sử người du lịch đi từ A đến B trong 30 phút rồi đi từ B về A trong 30 phút nữa thì người đó gặp 30 : 10 = 3 xe đi ngược chiều (đi từ B đến A) và 30 : 15 = 2 xe đi cùng chiều (đi từ B đến A).

Vậy cứ 60 phút có 3 + 2 = 5 xe đi từ B đến A qua địa điểm A. Do đó cứ 60 : 5 = 12 phút lại có hai xe cùng chiều rời bến.

319. Gọi thời gian phải tìm là x (phút). Biểu thị thời gian người du lịch đi từ A đến B là a phút.

Phương trình : $\frac{2a}{6}=\frac{a}{5}+\frac{a}{x}$; x = 7,5.

Chương IV – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§11. Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, phép nhân

320. a) $4x^2 + 4x + 5 = (2x + 1)^2 + 4 > 0.$

b) $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$

c) $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0.$

321. Hiệu : $\dfrac{x - x^2 + 1}{x - x^2 - 1} - 1 = \dfrac{2}{x - x^2 - 1} = \dfrac{-2}{x^2 - x + 1} < 0$ (vì $x^2 - x + 1 > 0$).

322. Rút gọn tử và mẫu cho $x^2 - x + 1 \neq 0$ được $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$. Phân thức này luôn luôn không âm.

323. a) $a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$: đúng.

b) $a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) = a^4 - a^3b + b^4 - ab^3$

$= a^3(a-b) - b^3(a-b) = (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0.$

324. a) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 =$

$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 =$

$= (ay - bx)^2 \geq 0$. Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $ay = bx$.

b) Biến đổi hiệu

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

thành $$(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2.$$

325. a) Hiệu : $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab} < 0$ (vì $b - a < 0$, $ab > 0$).

b) Hiệu : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 = \dfrac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ (vì $ab > 0$).

326. Xét hiệu :

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0.$$

327. a) Hiệu : $2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

b) Hiệu :

$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) =$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0.$

Hiệu : $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$

328. a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) Áp dụng câu a) hai lần ta có :

$$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

c) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2 \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$

§12. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

329. $x \leq 0$.

330. Ta có $x \geq 12$, $x < 13$ và $x \in \mathbf{Z}$ nên $x = 12$.

331. Ta có $x > -\dfrac{5}{2}$, $x < 1$ và $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{-2 ; -1 ; 0\}$

332. a) $A = \dfrac{2}{1-2x}$ với $x \neq \pm 1$; $x \neq \dfrac{1}{2}$. b) $A > 0$ khi $-1 \neq x < \dfrac{1}{2}$.

333. a) $B = -\dfrac{x+3}{x}$ với $x \neq 0$; $x \neq \pm 3$.

b) $B < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x+3}{x} < -1 \\ x \neq 0 ; x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3}{x} < 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

334. Cộng 1 vào mỗi phân thức rồi đặt nhân tử chung :

$$(x+91)\left(\frac{1}{89}+\frac{1}{86}-\frac{1}{83}-\frac{1}{80}\right) > 0 \Leftrightarrow x < -91.$$

335. a) $(a+2)x < a^2-4$.

Nếu $a > -2$ thì $x < a-2$.

Nếu $a < -2$ thì $x > a-2$.

Nếu $a = -2$: Vô nghiệm.

b) Nếu $a > 1$ thì $x \le a + 1$. Nếu $a < 1$ thì $x \ge a + 1$. Nếu $a = 1$ thì $0x \le 0$, nghiệm đúng với mọi x.

c) Trước hết xoá $\frac{2x}{a^2 - a + 1}$ ở hai vế. Nếu $\frac{a}{a+1} > 0$ (tức là $a < -1$ hoặc $a > 0$) thì $x < \frac{a}{4}$. Nếu $\frac{a}{a+1} < 0$ (tức là $-1 < a < 0$) thì $x > \frac{a}{4}$.

336. ĐKXĐ : $x \ne 1$. Đưa phương trình về dạng $(1 - m)x = 2$.

Nếu $m = 1$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $m \ne 1$ thì $x = \frac{2}{1 - m}$. Giải điều kiện $x \ne 1$ được $m \ne -1$.

Nghiệm của phương trình là $x = \frac{2}{1 - m}$ với $m \ne \pm 1$.

Phương trình có nghiệm là số dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \ne -1 \end{cases}$

337. Giải bất phương trình

$$4mx > x + 1 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (4m - 1)x > 1.$$

Nếu $m = \frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

Nếu $m > \frac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x > \frac{1}{4m - 1}$.

Nếu $m < \frac{1}{4}$ thì nghiệm của (1) là $x < \frac{1}{4m - 1}$.

a) Để nghiệm của (1) là $x > 9$, cần và đủ là :

$$\begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4m - 1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m = \frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{18}.$$

b) Để nghiệm của (1) là $x < -5$, cần và đủ là :

$$\begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4m - 1} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}.$$

338. $A = \dfrac{n^2+7}{n+4} = \dfrac{(n+4)(n-4)+23}{n+4}$.

A rút gọn được $\Leftrightarrow$ 23 và $n+4$ có ước chung khác $\pm 1 \Leftrightarrow n+4 \,\vdots\, 23$.

Giải bất phương trình $1 < 23k - 4 < 2000$, được $\dfrac{5}{23} < k < 87\dfrac{3}{23}$. Do $k \in \mathbf{N}^*$ nên k nhận 87 giá trị (là 1, 2, 3, ..., 87). Vậy có 87 số tự nhiên n phải tìm.

339. Giả sử ta có n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n.

Nếu xoá số 1 thì trung bình cộng của các số còn lại là :

$$\frac{2+3+...+n}{n-1} = \frac{(2+n)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{2+n}{2}.$$

Nếu xoá số n thì trung bình cộng của các số còn lại là :

$$\frac{1+2+...+(n-1)}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}.$$

Ta có $\dfrac{n}{2} \le 35\dfrac{7}{17} \le \dfrac{n+2}{2} \Leftrightarrow n \le 70\dfrac{14}{17} \le n+2 \Leftrightarrow 68\dfrac{14}{17} \le n \le 70\dfrac{14}{17}$.

Do $n \in \mathbf{N}$ nên $n = 69$ hoặc $n = 70$.

Với $n = 70$, tổng của 69 số còn lại là : $35\dfrac{7}{17}.69 \notin \mathbf{N}$, loại.

Với $n = 69$, tổng của 68 số còn lại là : $35\dfrac{7}{17}.68 = 2408$.

Số bị xoá là số : $(1 + 2 + ... + 69) - 2408 = 2415 - 2408 = 7$.

340. Do a và b nguyên, ta cộng 1 vào vế trái của bất phương trình đã cho và được :

$$a^2 - 2ab + 2b^2 - 4a + 8 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 4ab + 4b^2 - 8a + 16 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow a = 4,\ b = 2.$$

Cách khác. Biến đổi thành : $(a-b-2)^2 + (b-2)^2 < 1$.

341. $\left[\dfrac{34x+19}{11}\right] = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \dfrac{34+19}{11} - (2x+1) < 1 & (1) \\ 2x+1 \in \mathbf{Z} & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 0 \le 12x + 8 < 11 \Leftrightarrow -8 \le 12x < 3 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < 2x < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le 2x + 1 < \frac{3}{2}$. Do (2) nên $2x + 1 = 0$ hoặc $2x + 1 = 1$.

Hai nghiệm : $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 0$.

§13. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

342. a) Xét $x \ge 3$ ta được $x = 1$, loại.

Xét $x < 3$ ta được $x = -\frac{5}{3}$. *Đáp số* : $x = -\frac{5}{3}$.

b) *Cách 1.* $|x - 1| = |x - 5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = x - 5 \\ x - 1 = 5 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0x = -4 \\ 2x = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$

Cách 2. Bình phương hai vế.

$$|x - 1| = |x - 5| \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 10x + 25$$

$$\Leftrightarrow 8x = 24 \Leftrightarrow x = 3.$$

c) 2 và $\frac{3}{2}$;

d) -1 và 3.

e) Xét $x < -1$ ta được $x = -3$. Xét $-1 \le x \le 4$, phương trình vô nghiệm.

Xét $x > 4$ ta được $x = 6$. *Kết luận* : $S = \{-3 ; 6\}$

g) $3 \le x \le 5$.

343. a) $\frac{9}{4}$ và $\frac{9}{2}$; b) -2 ; c) $x = 4$; $0 \le x \le 1$.

d) Không nên máy móc xét các khoảng giá trị của x. Chú ý rằng vế trái của phương trình không âm nên vế phải không âm, do đó $x \ge 0$. Phương trình trở thành $x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x$. Từ đó $x = 6$.

344. a) Chú ý rằng $x^2 + x + 1 > 0$. *Đáp số* : $x = 1$.

b) Đặt $y = |x| > 0$. *Đáp số* : $x = \pm 1$.

345. Khử dấu giá trị tuyệt đối từ trong ra ngoài : trước hết xét $x \geq 0$, $x < 0$.

Đáp số : $-1 \leq x \leq 0$.

346. a) – Nếu $x \geq 4$ thì $x - 4 - x = 2a \Leftrightarrow 0x = a + 2$.

Nếu $a \neq -2$: vô nghiệm ; nếu $a = -2$: vô số nghiệm ($x \geq 4$).

– Nếu $x < 4$ thì $4 - x - x = 2a \Leftrightarrow x = 2 - a$. Ta phải có $2 - a < 4 \Leftrightarrow a > -2$.

– *Kết luận* : Nếu $a > -2$ thì $x = 2 - a$; nếu $a = -2$: vô số nghiệm $x \geq 4$; nếu $a < -2$: vô nghiệm.

b) Nếu $a = 1$ thì $3 \leq x \leq 5$. Nếu $a > 1$ thì $x_1 = 4 - a$, $x_2 = 4 + a$. Nếu $a < 1$: vô nghiệm.

347. – Nếu $a > 0$ thì $-a < 2a$. Xét các trường hợp $x < -a$, $-a \leq x \leq 2a$, $x > 2a$, ta được các nghiệm : $x = -7a$, $x = a$.

– Nếu $a \leq 0$ thì $2a \leq -a$. Xét các trường hợp $x < 2a$, $2a \leq x \leq -a$, $x > -a$, ta được nghiệm : $x = -a$.

§14. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

348. a) $-\dfrac{2}{3} < x < 2$; b) $\dfrac{2}{3} < x < 4$.

349. a) $x < -\dfrac{4}{3}$; $x > 2$; b) $x \leq 0$; $x \geq 1$.

350. a) $x > \dfrac{1}{2}$. b) $x < 1$.

351. a) $x < -1$; $x > 7$. b) $-3 < x < 5$.

§15. Bất phương trình tích, bất phương trình thương

352. a) *Cách 1*. Biến đổi thành bất phương trình tích $4(x + 1)(x - 2) > 0$.

Cách 2. Đưa bất phương trình về dạng $|2x - 1| > 3$.

Đáp số : $x > 2$; $x < -1$.

b) Hai nghiệm : -1 và 3.

c) $x < -2$; $-1 < x < 4$; $x > 4$.

d) $x < -2$; $x > -1$.

353. $A = -\dfrac{x^2+2x+5}{4(x+1)}$; $A < 0 \Leftrightarrow x > -1$ đồng thời $x \neq 1$.

354. $A = \dfrac{(x-y)^2}{y}$; $A > 0 \Leftrightarrow y > 0$; $x \neq 0$, $x \neq y$.

355. $A = \dfrac{x-y}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}$; $A > 1 \Leftrightarrow xy < 0$, $x + y \neq 0$.

356. $2 < x < 3$.

357. Nghiệm của phương trình : $x = \dfrac{6-m}{4-m}$ với $m \neq 4$.

Phương trình có nghiệm âm $\Leftrightarrow 4 < m < 6$.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

358. a) Ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ta có :

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2, \qquad c^4 + d^4 \geq 2c^2d^2.$$

Do đó $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2[(ab)^2 + (cd)^2] \geq 2.\ 2abcd = 4abcd$.

359. a) Áp dụng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (1) (câu a), ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Lại áp dụng (1), ta có :

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^2c + bc^2a + a^2bc = abc(a+b+c).$$

b) Giải tương tự câu c.

360. a) *Cách 1.* $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} \geq 0$.

Cách 2. $a^2 + b^2 - ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 2ab \geq 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0.$$

Cách 3. Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + b^2 \geq 0$. Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên rồi chia cho 2.

b) Giải tương tự câu a.

c) $A = a(a + b)(a + c)(a + b + c) + b^2c^2$

$$= (a^2 + ab + ac)(a^2 + ab + ac + bc) + b^2c^2.$$

Đặt $a^2 + ab + ac = m$, $bc = n$ thì $A = m(m + n) + n^2 = m^2 + mn + n^2 \geq 0$.

361. a) Biến đổi tương đương thành $a^2b^2(a - b)^2 \geq 0$.

b) Biến đổi tương đương thành $0 \leq (a - b)^2 (a^2 + ab + b^2)$.

362. a) Chia hai vế cho số dương a + b. Biến đổi tương đương thành

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

b) Hiệu : $4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 = (a + b)[4(a^2 - ab + b^2) - (a + b)]$

$$= 3(a + b)(a - b)^2 \geq 0.$$

363. Hiệu : $a^3 + b^3 + abc - ab(a + b + c) = (a + b)(a - b)^2 \geq 0$.

364. a) Từ $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$, cộng $a^4 + b^4$ vào hai vế được :

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2$$

Tương tự $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$. Từ đó suy ra $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}(a + b)^4$.

b) Xét hiệu $(a^2 + b^2)^2 - ab(a + b)^2$ được

$a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 = a^3(a - b) - b^3(a - b) = (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$.

365. a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a(b + c) \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + b^2 + c^2 \geq 0.$$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + ac + ad$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 \geq 4ab + 4ac + 4ad$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + a^2 \geq 0.$

366. a) $x^4 - 4x + 5 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 \geq 0.$

Không xảy ra đẳng thức. Do đó $x^2 - 4x + 5 > 0.$

b) $x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

Không xảy ra đẳng thức, do đó $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0.$

367. a) $(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4}) - (a + b + c)$

$= \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4}\right)$

$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

b) $a^4 + b^4 + 2 - 4ab = a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2 - 4ab + 2$

$$= (a^2 - b^2)^2 + 2(ab - 1)^2 \geq 0.$$

368. $x^3 + 4x + 1 - 3x^2 = x(x - 2)^2 + x^2 + 1 > 0$ (vì $x \geq 0$).

369. a) $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 9 = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 12) + 9.$

Đặt $x^2 - 7x + 9 = a$, biểu thức trên bằng :

$$(a - 3)(a + 3) + 9 = a^2 \geq 0.$$

b) $(a^2 + 4b^2 + 4c^2) - (4ab - 4ac + 8bc) =$

$= (a^2 - 4ab + 4b^2) + 4c^2 + (4ac - 8bc)$

$= (a - 2b)^2 + 4c^2 + 4c(a - 2b)$

$= (a - 2b + 2c)^2 \geq 0.$

370. Áp dụng bất đẳng thức $(x + y)^2 \geq 4xy$ ta được :

$$\left(\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}\right)^2 = \frac{[(a + c) + (b + d)]^2}{4} \geq (a + c)(b + d).$$

371. a) Áp dụng bất đẳng thức $4x^3 + 4y^3 \geq (x + y)^3$ với x, y > 0 (bài 363b), ta được : $4a^3 + 4b^3 \geq (a + b)^3$, $4b^3 + 4c^3 \geq (b + c)^3$, $4c^3 + 4a^3 \geq (c + a)^3$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$

$\Leftrightarrow (a + b)(ab + bc + ca + c^2) \geq 8abc$ (bạn đọc tự biến đổi)

$\Leftrightarrow a^2b + a^2c + ac^2 + ab^2 + b^2c + bc^2 - 6abc \geq 0$ (bạn đọc tự biến đổi)

$\Leftrightarrow (a^2b + bc^2 - 2abc) + (a^2c + b^2c - 2abc) + (ac^2 + ab^2 - 2abc) \geq 0$

$\Leftrightarrow b(a - c)^2 + c(a - b)^2 + a(b - c)^2 \geq 0.$

372. $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq 0.$$

373. a) Nhân hai vế của $a < b + c$ với số dương a, ta được $a^2 < ab + ac$. Tương tự $b^2 < ba + bc$, $c^2 < ca + cb$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên.

b) Đặt $b + c - a = x$, $c + a - b = y$, $a + b - c = z$ thì $2a = y + z$, $2b = x + z$, $2c = x + y$. Ta có :

$$\frac{2a}{b + c - a} + \frac{2b}{a + c - b} + \frac{2c}{a + b - c} = \frac{y + z}{x} + \frac{x + z}{y} + \frac{x + y}{z} =$$

$$= \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) \geq 6.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

c) Ta có $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.

Xét $$\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} > \frac{1}{a + b + c} + \frac{1}{b + c + a} = \frac{2}{a + b + c} >$$

$$> \frac{2}{a + b + a + b} = \frac{1}{a + b}.$$

Tương tự $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} > \frac{1}{b + c}$, $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} > \frac{1}{a + c}$.

374. a) Nhân từng vế các bất đẳng thức

$$(a + 1)^2 \geq 4a, \quad (b + 1)^2 \geq 4b, \quad (c + 1)^2 \geq 4c.$$

b) Nhân từng vế các bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$, $(ab + 1)^2 \geq 4ab$.

375. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 2ab + 2cd + ab + cd = 3(ab + cd)$.

Ta lại có $ab + cd = ab + \dfrac{1}{ab} \geq 2$.

Suy ra điều phải chứng minh.

376. Theo đề bài : $a - b = a^3 + b^3$, mà $a^3 + b^3 > a^3 - b^3$ (do $b > 0$) nên $a - b >$ $> a^3 - b^3$. Chia hai vế cho $a - b$ (chú ý rằng $a - b > 0$ vì $a - b = a^3 + b^3 > 0$).

377. a) *Cách 1.* $A(x - 1) = x^5 - 1$. Ta biết rằng nếu $x > 1$ thì $x^5 > 1$, nếu $x < 1$ thì $x^5 < 1$. Do đó :

Nếu $x > 1$ thì $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow A > 0$. Nếu $x < 1$ thì $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1} > 0 \Rightarrow A > 0$.

Nếu $x = 1$ thì hiển nhiên $A > 0$.

Cách 2. $A = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^3(x + 1) + (x + 1) + x^2$

$$= (x + 1)(x^3 + 1) + x^2 = (x + 1)^2(x^2 - x + 1) + x^2 \geq 0.$$

Dấu bằng không xảy ra.

b) Giải tương tự ví dụ 101. Xét $x \geq 1$ và $x < 1$.

378. Giả sử $a \leq 0$:

Nếu $a = 0$ thì trái với $abc > 0$.

Nếu $a < 0$: Do $a + b + c > 0$ nên $b + c > 0$. Do $abc > 0$ nên $bc < 0$.

Suy ra $a(b + c) + bc < 0$, mâu thuẫn với $ab + bc + ca > 0$.

Vậy $a > 0$. Tương tự, $b > 0$, $c > 0$.

379. Đặt $a = 3 + x$, $b = 3 + y$ thì $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ta có $a + b = 6 + (x + y)$. Ta sẽ chứng minh $x + y \geq 1$.

Giả sử $0 \leq x + y < 1$ thì $x^2 + 2xy + y^2 < 1$ nên $x^2 + y^2 < 1$ (do $2xy \geq 0$).

Khi đó

$a^2 + b^2 = (3 + x)^2 + (3 + y)^2 = 18 + 6(x + y) + (x^2 + y^2) < 18 + 6 + 1 = 25$,

trái với giả thiết $a^2 + b^2 \geq 25$.

Vậy $x + y \geq 1$, suy ra $a + b \geq 7$.

380. Giả sử $9ab \geq (a + b + c)^2$, $9bc \geq (a + b + c)^2$, $9ca \geq (a + b + c)^2$. Cộng từng vế các bất đẳng thức trên rồi chia cho 3 được :

$$3(ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow ab + bc + ca \geq a^2 + b^2 + c^2 \qquad (1)$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ với a, b, c khác nhau đôi một, mâu thuẫn với (1).

381. Giả sử tồn tại các số dương a, b, c mà $a + \frac{1}{b} < 2$, $b + \frac{1}{c} < 2$, $c + \frac{1}{a} < 2$ thì $a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6$. Hãy chứng minh điều này vô lí.

382. Giả sử $|b - c| > |a|$, $|c - a| > |b|$, $|a - b| > |c|$ thì $(b - c)^2 > a^2$, $(c - a)^2 > b^2$, $(a - b)^2 > c^2$. Do đó : $(b - c + a)(b - c - a) > 0$, $(c - a + b)(c - a - b) > 0$, $(a - b + c)(a - b - c) > 0$.

Nhân từng vế ba đẳng thức trên sẽ dẫn đến điều vô lí.

383. Giả sử $4a(1 - b) > 1$, $4b(1 - c) > 1$, $4c(1 - a) > 1$ thì nhân từng vế ta được

$$64abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 1 \qquad (1)$$

Mặt khác, ta lại có

$$4a(1 - a) = 4a - 4a^2 \leq 1 \qquad (2)$$

(vì $1 + 4a^2 + 4a = (2a + 1)^2 \geq 0$). Tương tự

$$4b(1 - b) \leq 1 \qquad (3)$$

$$4c(1 - c) \leq 1 \qquad (4)$$

Từ giả thiết phản chứng và từ a, b, c dương suy ra $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ cũng dương. Do đó ta nhân từng vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) và được :

$$64abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1, \text{ mâu thuẫn với (1).}$$

384. *Cách 1.* Giả sử $a + b > 2$. Đặt $a = x + y$, $b = x - y$, ta có

$$a + b = 2x > 2 \Rightarrow x > 1 \qquad (1)$$

Ta có $\quad a^3 + b^3 = (x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2$.

Do (1) nên $2x^3 > 2$; $6xy^2 \geq 0$. Vậy $a^3 + b^3 > 2$, trái với giả thiết.

Cách 2. Giả sử $a + b > 2$. Ta có :

$(a + b)^3 > 8 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) > 8 \Rightarrow 2 + 3ab(a + b) > 8$

$\Rightarrow ab(a + b) > 2 \Rightarrow ab(a + b) > a^3 + b^3$ (vì $a^3 + b^3 = 2$)

$\Rightarrow ab > a^2 - ab + b^2$ (chia hai vế cho số dương $a + b$)

$\Rightarrow 0 > (a - b)^2$, vô lí.

385. a) Giả sử $a \geq b \geq c > 0$ thì $a + b \geq a + c \geq b + c$.

Ta có $\dfrac{c}{a+b} \leq \dfrac{c}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a} \leq \dfrac{b}{b+c}$, $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{a}{b+c}$.

Cộng từng vế :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{b+c} + 1 < 1 + 1 = 2.$$

Chú ý : Ta cũng chứng minh được : Nếu a, b, c > 0 thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ (xem ví dụ 92b).}$$

b) Sắp xếp : $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow c(a-c)(b-c) \geq 0 \Rightarrow c^3 + abc \geq ac^2 + bc^2$.

Ta cần phải chứng minh

$$a^3 + b^3 + 2abc \geq ab(a+b) + b^2c + a^2c.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(a-b)^2(a+b-c) \geq 0$.

386. a) Hiệu : $2(a^8 + b^8) - (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$ bằng $(a^3 - b^3)(a^5 - b^5)$.

Giả sử $a \geq b$ thì $a^3 - b^3 \geq 0$ và $a^5 - b^5 \geq 0$.

b) Theo câu a ta có :

$$2(a^8 + b^8) \geq (a^3 + b^3)(a^5 + b^5)$$
$$2(b^8 + c^8) \geq (b^3 + c^3)(b^5 + c^5)$$
$$2(c^8 + a^8) \geq (c^3 + a^3)(c^5 + a^5)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được :

$$4(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^8 + b^8 + c^8) + a^3(a^5 + b^5 + c^5) + b^3(a^5 + b^5 + c^5) + {} + c^3(a^5 + b^5 + c^5)$$

$$\Rightarrow 3(a^8 + b^8 + c^8) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a^5 + b^5 + c^5).$$

387. Chú ý rằng $a + b = 2$, ta xét hiệu

$$2(a^8 + b^8) - 2(a^7 + b^7) = 2(a^8 + b^8) - (a+b)(a^7 + b^7).$$

Biến đổi hiệu này thành $(a-b)(a^7 - b^7)$.

Giả sử $a \geq b$ thì $a - b \geq 0$ và $a^7 - b^7 \geq 0$.

388. a) Sắp xếp : $a \geq b \geq c \geq 0$.

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) =$$
$$= a(a-b)[(a-b)+(b-c)] - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c) =$$
$$= a(a-b)^2 + a(a-b)(b-c) - b(a-b)(b-c) + c(a-c)(b-c) =$$
$$= a(a-b)^2 + (b-c)(a-b)^2 + c(a-c)(b-c) \geq 0.$$

b) Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Xét hiệu :

$$a^6 + b^6 + c^6 - a^5b - b^5c - c^5a = a^5(a-b) + b^5(b-c) + c^5(c-a) =$$
$$= a^5(a-b) - b^5[(a-b)+(c-a)] + c^5(c-a) =$$
$$= (a-b)(a^5-b^5) + (c-a)(c^5-b^5).$$

Do $c \leq a$, $c \leq b$ nên $c - a < 0$, $c^5 - b^5 \leq 0$, do đó $(c-a)(c^5-b^5) \geq 0$.

Còn $(a-b)(a^5-b^5)$ cũng không âm (thật vậy nếu $a - b \geq 0$ thì $a^5 - b^5 \geq 0$, nếu $a - b < 0$ thì $a^5 - b^5 < 0$).

b) Không mất tính tổng quát, giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Xét hiệu :

$$a^6 + b^6 + c^6 - a^5b - b^5c - c^5a = a^5(a-b) + b^5(b-c) + c^5(c-a) =$$
$$= a^5(a-b) - b^5[(a-b)+(c-a)] + c^5(c-a) =$$
$$= (a-b)(a^5-b^5) + (c-a)(c^5-b^5).$$

Do $c \leq a$, $c \leq b$ nên $c - a < 0$, $c^5 - b^5 \leq 0$, do đó $(c-a)(c^5-b^5) \geq 0$.

Còn $(a-b)(a^5-b^5)$ cũng không âm (thật vậy nếu $a - b \geq 0$ thì $a^5 - b^5 \geq 0$, nếu $a - b < 0$ thì $a^5 - b^5 < 0$).

389. Gọi m là số nhỏ nhất trong các hiệu $a - b$, $b - c$, $a - c$.

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì $m \geq 0$. Ta có :

$$a - b \geq m \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq m^2$$
$$b - c \geq m \geq 0 \Rightarrow (b-c)^2 \geq m^2$$
$$a - c \geq 2m \geq 0 \Rightarrow (a-c)^2 \geq 4m^2.$$

Cộng từng vế :

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 6m^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \geq 6m^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq 6m^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \geq m^2.$$

390. a) Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 2 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow b < 1, c < 1.$$

b) Từ câu a suy ra : $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$. Rút gọn ta được :

$$ab + bc + ca > 1 + abc \quad (1)$$

Ta lại có

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow 4 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$4 > a^2 + b^2 + c^2 + 2(1 + abc) \Rightarrow 4 > a^2 + b^2 + c^2 + 2 + 2abc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

391. a) $\frac{x+y}{xy} \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (vì $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$).

b) Suy ra từ câu a.

392. a) Ta có $b + c = 6 - a$, $bc = 9 - a(b+c) = 9 - a(6-a) = 9 - 6a + a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2 \geq 4bc$, ta được

$$(6-a)^2 \geq 4(9 - 6a + a^2) \Rightarrow 3a^2 - 12a \leq 0 \Rightarrow a(a-4) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 4.$$

Tương tự $0 \leq b \leq 4$, $0 \leq c \leq 4$.

b) Giải tương tự câu a). Có thể áp dụng bất đẳng thức $(b+c)^2 \geq 4bc$ hoặc áp dụng bất đẳng thức $2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2$, ta được $3a^2 - 4a \leq 0$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

393. $\left|\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} + \frac{c-b}{a}\right| < 1$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(a-c)ac + (b-a)ab + (c-b)bc}{abc}\right| < 1 \quad (1)$$

Mặt khác a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên

$\frac{|a-c|}{b} < 1$, $\frac{|b-a|}{c} < 1$, $\frac{|c-b|}{a} < 1$ suy ra $\frac{|(a-c)(b-a)(c-b)|}{abc} < 1$ (2)

Biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối của (2) và (1) đối nhau (bạn đọc tự kiểm tra), do đó từ (2) suy ra (1).

394. a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2c$ (do a, b, c > 0). Tương tự : $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y}$ với x, y > 0 (ví dụ 77b), ta có :

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4},\ \frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4},\ \frac{ca}{c+a} \leq \frac{c+a}{4}.$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

395. Do a, b, c dương nên :

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{b+c+a} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{c+a+b} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b}.$$

Cộng từng vế :
$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

396. a) $A = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Do a, b > 0 nên

$$A \geq \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 2 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - 1\right)^2 \geq 0.$$

b) Xét $\frac{a^2}{b} + b = \frac{a^2 + b^2}{b} \geq \frac{2ab}{b} = 2a$ (do a, b > 0).

Tương tự $\frac{b^2}{c} + c \geq 2b,\ \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$.

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

c) Xét

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} = \frac{(2a)^2 + (b+c)^2}{4(b+c)} \geq \frac{4a(b+c)}{4(b+c)} = a \text{ (do b, c > 0).}$$

Tương tự $\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\ge b,\ \dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\ge c.$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên.

397. Xét :

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{a(ab+ac-b^2-c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)}=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)} \qquad (1)$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{bc(b-c)+ba(b-a)}{(c^2+a^2)(c+a)} \qquad (2)$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{(a^2+b^2)(a+b)} \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta được :

$$\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$=ab(a-b)\left[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{1}{(a^2+c^2)(a+c)}\right]+$$

$$+ac(a-c)\left[\frac{1}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)}\right]+$$

$$+bc(b-c)\left[\frac{1}{(a^2+c^2)(a+c)}-\frac{1}{(a^2+b^2)(a+b)}\right].$$

Giả sử $a\ge b\ge c>0$ thì các dấu ngoặc tròn và ngoặc vuông của biểu thức trên đều không âm. Suy ra điều phải chứng minh.

398. Ta có :

$$\left(\frac{2}{225}\right)^{1000}<\left(\frac{2}{200}\right)^{1000}=\left(\frac{1}{10^2}\right)^{1000}=\frac{1}{10^{2000}}=0,\underbrace{00...0}_{1999}1\,.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

399. a) Theo giả thiết, $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} + 2$. Do đó :

$$a_1^2 = 25$$

$$a_2^2 = a_1^2 + \frac{1}{a_1^2} + 2$$

$$....$$

$$a_{51}^2 = a_{50}^2 + \frac{1}{a_{50}^2} + 2.$$

Cộng từng vế : $\quad a_{51}^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} + ... + \frac{1}{a_{50}^2}\right) + 125 > 11^2 \Rightarrow a_{51} > 11.$

b) Tương tự như câu a :

$$a_{101}^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} + ... + \frac{1}{a_{100}^2}\right) + 225 > 15^2 \Rightarrow a_{101} > 15.$$

Để chứng minh $a_{101} < 15,1$, chú ý rằng $15,1^2 = 228,01$ ta cần chứng minh :

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_{100}^2} < 3,01.$$

Ta có : $\quad \frac{1}{a_1^2} + ... + \frac{1}{a_{100}^2} = \left(\frac{1}{a_1^2} + ... + \frac{1}{a_{50}^2}\right) + \left(\frac{1}{a_{51}^2} + ... + \frac{1}{a_{100}^2}\right) <$

$$< 50.\frac{1}{a_1^2} + 50.\frac{1}{a_{51}^2} < 50.\frac{1}{25} + 50.\frac{1}{11^2} < 2 + \frac{1}{2} < 3,01.$$

400. Gọi độ dài các đoạn thẳng đã cho là $a_1, a_2, ... a_6$. Giả sử

$$10 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_6 \le 75.$$

Nếu bất kì ba đoạn thẳng nào cũng không thể lập thành một tam giác thì :

$$a_3 \ge a_1 + a_2 \ge 10 + 10 = 20$$

$$a_4 \ge a_2 + a_3 \ge 10 + 20 = 30$$

$$a_5 \ge a_3 + a_4 \ge 20 + 30 = 50$$

$$a_6 \ge a_4 + a_5 \ge 30 + 50 = 80, \text{ vô lí.}$$

401. Gọi khoảng cách AB là s (km), vận tốc riêng của thuyền máy là a (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm trước là b (km/h), vận tốc dòng nước ngày hôm sau là c (km/h) trong đó $s > 0$, $a > 0$, $0 < b < c$.

Ngày hôm trước, vận tốc thuyền lúc xuôi là $a + b$ (km/h) lúc ngược là $a - b$ (km/h), thời gian đi khứ hồi (đi từ A đến B rồi trở về A) là :

$$x = \frac{s}{a+b} + \frac{s}{a-b} = \frac{2as}{a^2 - b^2} \text{ (giờ).}$$

Tương tự, thời gian đi khứ hồi trong ngày hôm sau là :

$$y = \frac{s}{a+c} + \frac{s}{a-c} = \frac{2as}{a^2 - c^2} \text{ (giờ).}$$

Do $0 < b < c$ nên $a^2 - b^2 > a^2 - c^2 \Rightarrow \dfrac{2as}{a^2 - b^2} < \dfrac{2as}{a^2 - c^2} \Rightarrow x < y$.

Như vậy cả Tâm lẫn Hoà đều sai : thời gian thuyền đi hôm sau lâu hơn hôm trước.

402. Để chứng minh $A < 20$, ta làm trội mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\dfrac{n+1}{n} < \dfrac{n}{n-1}$. Ta có :

$$A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{200}{199}$$

$$A < \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{199}{198}.$$

Suy ra $A^2 < \dfrac{2.4.6 \dots 200}{1.3.5 \dots 199} \cdot \dfrac{2.3.5 \dots 199}{1.2.4 \dots 198} = \dfrac{200}{1} \cdot \dfrac{2}{1} = 400 \Rightarrow A < 20.$

Để chứng minh $A > 14$, ta làm giảm mỗi phân số của A bằng cách dùng bất đẳng thức $\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{n+2}{n+1}$.

403. Gọi A là vế trái của bất đẳng thức. Ta làm trội A để được một biểu thức C dễ rút gọn hơn. Muốn vậy biểu thức C phải có nhiều thừa số giống nhau ở tử và ở mẫu.

Nhận xét hai phân số cạnh nhau, chẳng hạn $\dfrac{1}{3}$ và $\dfrac{4}{6}$, ta thấy 4 hơn 3 là 1, còn 6 hơn 4 là 2. Ta làm trội : $\dfrac{n}{n+2} < \dfrac{n-1}{n}$ (vì $n^2 < n^2 + n - 2$ với mọi $n > 2$). Do đó : $A = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{10}{12} \dots \dfrac{208}{201}$

$$A < \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\ldots\frac{207}{208}\ (= C).$$

Suy ra

$$A^2 < \frac{1.4.7.10\ldots208}{3.6.9.12\ldots210}\cdot\frac{1.3.6.9\ldots207}{3.4.7.10\ \ldots208} = \frac{1}{210}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{630} < \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{25}\right)^2.$$

Do đó $A < \frac{1}{25}$.

404. a) Viết $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ thành $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

$$A = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

b) Viết $\frac{n-1}{n!}$ thành $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$.

405. $\frac{n^2+n-1}{(n+1)!} = \frac{n(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Ta có :

$$\frac{1}{2!} + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) + \ldots + \left[\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!} + \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right] - \left[\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} < 2.$$

406. $2A = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{100}{2^{99}}$ (1)

$A = \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{99}{2^{99}} + \frac{100}{2^{100}}$ (2)

Lấy (1) trừ (2) được :

$$A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{99}}\right) - \frac{100}{2^{100}}$$

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn 2.

407. Giải tương tự ví dụ 96.

408. $3C = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + ... + \frac{99}{3^{98}} + \frac{100}{3^{99}}$

$C = \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{99}{3^{99}} + \frac{100}{3^{100}}$

Suy ra : $$2C = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}} \qquad (1)$$

Hãy chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc nhỏ hơn $\frac{3}{2}$.

409. Gọi $A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1}$.

Tổng A có 2n + 1 số, ghép thành n cặp các phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{2n+1}$.

Mỗi cặp bằng :

$$\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - k^2} > \frac{4n+2}{(2n+1)^2} = \frac{2}{(2n+1)}.$$

Vậy $A > \frac{2}{2n+1}.n + \frac{1}{2n+1} = 1.$

Để chứng minh A < 2, làm trội A bằng cách thay mỗi phân số của A bởi phân số lớn nhất.

410. Gọi $A = \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} + ... + \frac{1}{4006}$.

– Chứng minh $A > \frac{3}{5}$: Tổng A có 2003 số, ghép thành 1001 cặp phân số cách đều hai đầu, còn lại một phân số ở giữa là $\frac{1}{3005}$.

Mỗi cặp bằng : $\frac{1}{3005-k} + \frac{1}{3005+k} > \frac{6010}{3005^2} = \frac{2}{3005}$.

Do đó $A > \frac{2}{3005}.1001 = \frac{2002}{3005} > \frac{3}{5}$.

– Chứng minh $A < \frac{3}{4}$: Đặt 2004 = n, ta có :

$$A = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n(n-2)}.$$

$$A = \frac{1}{n+(n-2)} + \frac{1}{n+(n-3)} + ... + \frac{1}{n}.$$

Cộng lại : $2A = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n-3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-2} + \frac{1}{n}\right)$

Ta sẽ chứng minh nhóm đầu và nhóm cuối có giá trị lớn hơn các nhóm khác bằng cách chứng minh :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2} > \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-2-k} \quad (1) \quad \text{với } 0 < k < n-2.$$

(1) $\Leftrightarrow \frac{3n-2}{n(2n-2)} > \frac{3n-2}{(n+k)(2n-2-k)}$

$\Leftrightarrow n(2n-2) < (n+k)(2n-2-k)$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 2n < 2n^2 - 2n - kn + 2kn - 2k - k^2$

$\Leftrightarrow k^2 < kn - 2k \Leftrightarrow k < n-2$: đúng.

Vậy $2A < \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n-2}\right).(n-1) = \frac{3n-2}{n(2n-2)}.(n-1) = \frac{3n-2}{2n} < \frac{3}{2}.$

Do đó $A < \frac{3}{4}.$

411. a) Gọi $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1}$. Ở ví dụ 97, ta đã chứng minh rằng $A < n$. Bây giờ ta chứng minh $A > \frac{n}{2}$. Ta có :

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + ... + \frac{1}{2^n - 1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + ... + \frac{1}{2^3}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}.$$

Thay mỗi phân số trong mỗi dấu ngoặc bởi phân số nhỏ nhất trong dấu ngoặc đó :

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.2 + \frac{1}{2^3}.2^2 + ... + \frac{1}{2^n}.2^{n-1} - \frac{1}{2^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}.$$

b) Áp dụng câu a : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$, nếu ta chọn $k=2^n-1$ thì

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}>\frac{n}{2}.$$

Như vậy nếu chọn $k=2^{2A}-1$ thì $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}>\frac{2A}{2}=A$.

412. Giả sử $a>b>c>d$. Đặt $\frac{b+c+d}{a}=m$, $\frac{a+c+d}{b}=n$, $\frac{a+b+d}{c}=p$.

Theo giả thiết thì $m>1$; ta lại có $d<c<b<a$ nên $b+c+d<3a$, do đó $m<3$; vậy $m=2$.

Dễ thấy

$$m=\frac{b+c+d}{a}<\frac{b+c+d}{b}<\frac{a+c+d}{b}=n,$$

$$n=\frac{a+c+d}{b}<\frac{a+c+d}{c}<\frac{a+b+d}{c}=p.$$

Suy ra $n\geq 3$, $p\geq 4$.

Ta có $b+c+d=2a$, $a+c+d\geq 3b$, $a+b+d\geq 4c$.

Cộng từng vế ta được :

$2a+2b+2c+3d\geq 2a+3b+4c \Rightarrow 3d\geq b+2c>d+2d=3d$, vô lí.

413. Ta có x^x có y chữ số $\Rightarrow 10^{y-1}\leq x^x<10^y$,

y^y có x chữ số $\Rightarrow 10^{x-1}\leq y^y<10^x$.

Giả sử $x\geq y$. Ta có $x^x<10^y\leq 10^x\Rightarrow x<10$.

Ta chọn các số x^x sao cho $x<10$ và $x^x\geq 10^{y-1}$ với mọi $y-1$ nhỏ hơn x. Các số $2^2, 3^3, ..., 7^7$ không thoả mãn (chẳng hạn $2^2<10$, $3^3<10^2$,...). Xét các số $1^1, 8^8, 9^9$, ta thấy : $10^0<1^1<10^1$, $10^7<8^8<10^8$, $10^8<9^9<10^9$.

Đáp số : $x=y=1$; $x=y=8$; $x=y=9$.

414. $n!=1\times 2\times 3\times ...\times k\times ...\times n$

$n!=n(n-1)(n-2)\,...\,(n-k+1)\,...\,1$.

Suy ra $(n!)^2=(1.n).[2(n-1)].[3(n-2)]\,...\,[k(n-k+1)]\,...\,(n.1)$. Ta sẽ chứng minh rằng biểu thức trong mỗi dấu ngoặc vuông đều lớn hơn n.

Thật vậy

$$k(n-k+1)-n = kn-n-k^2+k = n(k-1)-k(k-1) =$$
$$= (n-k)(k-1) > 0 \text{ vì } n > k > 1.$$

415. Ta có $[x] \le x$, $[y] \le y$ nên $[x]+[y] \le x+y$, tức là $[x]+[y]$ là số nguyên không vượt quá

$$x + y \qquad (1)$$

Mặt khác, theo định nghĩa phần nguyên, $[x+y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá

$$x + y \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $[x]+[y] \le [x+y]$.

416. a) Đặt $x+1=a$, $y-1=b$. Phương trình trở thành $(a+b)^2 = ab$. Dễ dàng tính được $a=b=0$. *Đáp số :* $x=-1$, $y=1$.

b) Biến đổi : $(x-2y)^2+(x-2z)^2+(x-2t)^2+x^2=0$.

Đáp số : $x=y=z=t=0$.

c) *Đáp số :* $x=1$, $y=2$, $z=3$.

d) Sử dụng bất đẳng thức $(x+1)(y+1)(x+y) \ge 8xy$ (xem ví dụ 94).

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=1$, $x=y=0$.

417. a) Ta có
$$n + S(n) = 2018 \qquad (1)$$
nên
$$n < 2018 \qquad (2)$$
$$S(n) \le 1 + 9.3 = 28,$$
$$n \ge 2018 - 28 = 1990 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $n = \overline{199a}$ hoặc $n = \overline{20bc}$.

Thay $n = \overline{199a}$ vào (1) được $2a = 9$, loại.

Thay $n = \overline{20bc}$ vào (1) được $a=0$, $b=8$. *Đáp số :* 2008.

b) $S(n) = n^2 - 2005n + 7 \qquad (1)$

– Xét $n = 2005$ thì $S(n) = 7$ và (1) đúng.

– Xét $n > 2005$. Ta có $S(n) = n^2 - 2005n + 7 > n(n-2005) > n$, tức là $S(n) > n$, vô lí.

– Xét $1 \le n \le 2004$. Ta có $n - 1 \ge 0$, $n - 2004 \le 0$ nên

$$(n-1)(n-2004) \le 0 \Rightarrow n^2 - 2005n + 2004 \le 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 2005n + 7 \le -1997 \Rightarrow S(n) < 0, \text{ vô lí.}$$

Đáp số : $n = 2005$.

TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

418. a) $\min A = -\frac{21}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$. b) $\max B = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

419. a) Đặt $x + 7 = y$, $A = 2y^4 + 12y^2 + 2 \ge 2$.

$\min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$.

b) Đặt $|0{,}5x^2 + x| = y$; $\min B = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$; $x_1 = 1$; $x_2 = -3$.

c) Đặt $x^2 - 4x + 3 = y$; $\min C = -1 \Leftrightarrow x = 2$.

d) $D = (x^2 - x + 1)^2$; $\min D = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

e) $E = (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \ge 0$; $\min E = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

g) Đặt $x^2 + x = y$. Ta có

$$G = (y-6)(y+2) = y^2 - 4y - 12 = (y-2)^2 - 16.$$

$\min G = -16 \Leftrightarrow y = 2$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

420. a) $A = |x-3| + |7-x| \ge x - 3 + 7 - x = 4$.

$\min A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ 7 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x \le 7$.

b) $\min B = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$.

c) Ta có $x^2 - x + 1 > 0$ nên

$$C = x^2 - x + 1 + |2 + x - x^2| \ge x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2 = 3.$$

$\min C = 3 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(2-x) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

d) $\min D = 9 \Leftrightarrow -3 \le x \le 2$.

421. Thay $x = 1 - 2y$ vào $A = x^2 + 2y^2$, được $A = 6y^2 - 4y + 1$.

$\min A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3},\ x = \frac{1}{3}$.

422. Thay $y = \frac{4x - 7}{3}$ vào $B = 2x^2 + 5y^2$ được

$$9B = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x - 10)^2 + 45 \geq 45.$$

$\min B = 5 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7},\ y = -\frac{3}{7}$.

423. Ta chứng minh được $a^4 + b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8} = \frac{1}{8}$;

$\min(a^4 + b^4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

424. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow 1 = (a^3 + b^3) + 3ab$. Do đó $a^3 + b^3$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ ab lớn nhất.

Ta lại có $a + b = 1$ nên ab lớn nhất $\Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó $a^3 + b^3 = \frac{1}{4}$.

425. $|x + y| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = \frac{x^2 + 1}{|x|} \geq 2$ vì $(|x| - 1)^2 \geq 0)$;

$\min |x + y| = 2 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, khi đó $y = \pm 1$.

426. a) $A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2$,

$\min A = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$.

b) $B = (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 + (y - 4)^2 = (x - y + 1)^2 + (y - 4)^2 \geq 0$.

$\min B = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $y = 4$.

c) $C = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$;

$2C = (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 8 \geq -8$.

$\min C = -4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

d) $D = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$;

$$\begin{aligned} D + 3 &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + xy - x - y + 1 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1). \end{aligned}$$

Đặt $x - 1 = a$, $y - 1 = b$ thì $D + 3 = a^2 + b^2 + ab \geq 0$.

$\min D = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Nhận xét : Lời giải trên tuy trình bày gọn, nhưng có phần thiếu tự nhiên khi xét biểu thức D + 3. Cách giải sau dài hơn nhưng đường lối giải rõ ràng hơn.

$$D = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 + (y-3)x + y^2 - 3y$$

$$= \left[x^2 + (y-3)x + \frac{(y-3)^2}{4}\right] + y^2 - 3y - \frac{(y-3)^2}{4}$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{4y^2 - 12y - y^2 + 6y - 9}{4}$$

$$= \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 - 6y - 9}{4} = \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 - 3 \geq -3.$$

$$\min D = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + \dfrac{y-3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

e) Giải theo nhận xét ở câu d.

$$E = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y = 2(x^2 + yx - 4x) + 5y^2 - 22y$$

$$= 2\left[x + (y-4)x + \frac{(y-4)^2}{4}\right] + 5y^2 - 22y - \frac{(y-4)^2}{2}$$

Tiếp tục biến đổi được $E = 2\left(x + \dfrac{y-4}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{2}(y-2)^2 - 26$.

$\min E = -26 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = 2$.

427. a) $A = 3 + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 5}$. *Đáp số :* $\max A = 3\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

b) $B = 2 - \dfrac{3}{(x-4)^2 + 6} \geq \dfrac{3}{2}$; $\min B = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = 4$.

c) $C = x^2 + 3x + 3$; $\min B = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

d) $D = x^4 - 8x^2 + 64$; $\min D = 48 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

428. Giải tương tự ví dụ 107.

a) $A = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$. Đặt $y = \frac{1}{x}$; $\min A = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) Đặt $y = 2x - 1$; $\min B = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

429. Giải tương tự ví dụ 107.

a) Đặt $y = x + 10$; $A = \frac{1}{y} - \frac{10}{y^2}$. Đặt $\frac{1}{y} = z$; $\max A = \frac{1}{40} \Leftrightarrow x = 10$.

b) $\max B = \frac{1}{400} \Leftrightarrow x = 100$.

430. a) $A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{(x^2 - 12x + 36) - (x^2 + 9)}{x^2 + 9} = \frac{(x - 6)^2}{x^2 + 9} - 1 \geq -1$;

$\min A = -1 \Leftrightarrow x = 6$.

$$A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} = \frac{(4x^2 + 36) - (4x^2 + 12x + 9)}{x^2 + 9} = 4 - \frac{(2x + 3)^2}{x^2 + 9} \leq 4$$

$\max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

b) $B = \frac{8x + 3}{4x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 1}{4x^2 + 1} = \frac{4(x + 1)^2}{4x^2 + 1} - 1 \geq -1$;

$\min B = -1 \Leftrightarrow x = -1$.

$$B = \frac{16x^2 + 4 - 16x^2 + 8x - 1}{4x^2 + 1} = \frac{4(4x^2 + 1) - (4x - 1)^2}{4x^2 + 1} = 4 - \frac{(4x - 1)^2}{4x^2 + 1} \leq 4$$

$\max B = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

c) $C = \frac{(x - 2)^2}{2(x^2 + 2)} - \frac{1}{2}$; $\min C = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$;

$C = 1 - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 2}$; $\max C = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

d) $D = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} + 2$; $\min D = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

$D = 4 - \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$; $\max D = 4 \Leftrightarrow x = -1$.

431. a) $\min A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = y.$

b) Với $x = 0$ thì $B = \dfrac{x^2}{x^4 + 1} = 0.$

Với $x \neq 0$ thì $x^4 + 1 \geq 2x^2 > 0$ nên $\dfrac{x^2}{x^4 + 1} \leq \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Vậy $\max B = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1.$

c) $C = 2 + \left(x^2y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2}\right)$. Tìm được $\min C = 4 \Leftrightarrow xy = \pm 1.$

432. a) $A = \dfrac{x^2 + 13x + 36}{x} = x + \dfrac{36}{x} + 13.$ Các số dương x và $\dfrac{36}{x}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{36}{x}.$

$\min A = 25 \Leftrightarrow x = 6.$

b) $B = \dfrac{x^2 + 200x + 10000}{x} = \left(x + \dfrac{10000}{x}\right) + 200.$

$\min B = 400 \Leftrightarrow x = 100.$

c) $C = \dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{2}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ với $a, b > 0$, ta có $\dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{3}{x - 2} \geq 2.$ $\min C = 2\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5.$

d) $$D = \dfrac{\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3\right]^2 - \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)^2}{\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3 + \dfrac{1}{x^3}\right)$$

$$= 3x + \dfrac{3}{x} = 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \geq 6.$$ Tìm được $\min D = 6 \Leftrightarrow x = 1.$

433. a) $A = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{xy}$. Do x, y > 0 nên $\dfrac{1}{xy}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ xy lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$ (chú ý rằng $x + y = 1$) ; min A = 4.

b) $B = \dfrac{a^2.1}{x} + \dfrac{b^2.1}{y} = \dfrac{a^2(x+y)}{x} + \dfrac{b^2(x+y)}{y} = a^2 + \dfrac{a^2y}{x} + \dfrac{b^2x}{y} + b^2 =$

$$= \left(\dfrac{a^2y}{x} + \dfrac{b^2x}{y}\right) + a^2 + b^2.$$

Các số dương $\dfrac{a^2y}{x}$ và $\dfrac{b^2x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$\dfrac{a^2y}{x} = \dfrac{b^2x}{y} \Leftrightarrow a^2y^2 = b^2x^2 \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow a(1-x) = bx \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{a+b}$,

$y = \dfrac{b}{a+b}$. min $B = (a+b)^2$.

c) Chú ý rằng tuy ta có $x + \dfrac{1}{x} \geq 2, y + \dfrac{1}{y} \geq 2$, nhưng biểu thức $C = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2$ không có giá trị nhỏ nhất bằng $2^2 + 2^2 = 8$, vì dấu bằng của hai bất đẳng thức trên không đồng thời xảy ra do có điều kiện $x + y = 1$.

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = a, y + \dfrac{1}{y} = b$. Ta có $C = a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}(a+b)^2$ (dễ dàng chứng minh điều này). Cần tìm giá trị nhỏ nhất của a + b.

Ta có $a + b = x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$: xem câu a. min $C = \dfrac{25}{2} \Leftrightarrow a = b, x = y \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

434. $A = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy} \geq 2xy + \dfrac{2}{xy} = 2\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right) \geq 2 . 2 = 4.$

min A = 4 $\Leftrightarrow$ x = y, xy = 1 $\Leftrightarrow$ x = y = 1 hoặc x = y = –1.

435. a) Áp dụng $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy} \Rightarrow xy \geq 4 \text{ (chú ý } x, y > 0).$$

$\min (xy) = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

b) Ta có : $(x + y)^2 \geq 4xy \geq 16$ (áp dụng câu a).

Do $x + y > 0$, ta có $\min (x + y) = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$.

436. a) $A = 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 4$; $\min A = 4 \Leftrightarrow a = b$.

b) $B = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 9$; $\min B = 9 \Leftrightarrow a = b = c$.

c) $\min C = 16 \Leftrightarrow a = b = c = d$.

437. a) Ta chứng minh được $A = \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq 1,5$ với $a, b, c > 0$ (xem ví dụ 92).

$\min A = 1,5 \Leftrightarrow b + c = a + c = a + b \Leftrightarrow a = b = c$.

b) $B = \left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b}\right) + \left(\frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} + \frac{a + b}{c}\right) =$

$$= A + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 1,5 + 6 = 7,5.$$

$\min B = 7,5 \Leftrightarrow a = b = c$.

438. a) Từ giả thiết suy ra $1 = [(x + y) + z]^2$. Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$, ta có :

$$1 = [(x + y) + z]^2 \geq 4(x + y)z.$$

Nhân hai vế với số dương $\frac{x + y}{xyz}$ được

$$\frac{x + y}{xyz} \geq \frac{4z(x + y)^2}{xyz} \geq \frac{4z.4xy}{xyz} = 16.$$

$$\min A = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z \\ x = y \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}.$$

b) Giải tương tự câu a, ta có :

$$4 = [(x + y + z) + t]^2 \geq 4(x + y + z)t \Rightarrow 1 \geq (x + y + z)t$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq [(x + y) + z]^2.t \geq 4(x + y).zt$$

$$\Rightarrow \frac{(x + y + z)(x + y)}{xyzt} \geq \frac{4(x + y)^2 zt}{xyzt} \geq 16.$$

$\min B = 16 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4},\ z = \frac{1}{2},\ t = 1.$

439. Áp dụng bất đẳng thức $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ với $a, b, c > 0$ (bài 436b), trong đó $a = xy$, $b = yz$, $c = xz$, ta được $(xy + yz + zx).A \geq 9$. Do đó

$$9 \leq (xy + yz + zx).A \leq (x^2 + y^2 + z^2).A \leq 3A.$$

$\min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z.$

440. a) *Cách 1*. Ta có $x < 60$, $y \geq 60$ nên

$$(60 - x)(60 - y) \leq 0 \Rightarrow 3600 - 60(x + y) + xy \leq 0$$

$$\Rightarrow 3600 - 6000 + xy \leq 0$$

$$\Rightarrow xy \leq 2400$$

$\max (xy) = 2400 \Leftrightarrow y = 60,\ x = 40.$

Cách 2. Đặt $y = 60 + t$ với $t \geq 0$. Ta có :

$$xy = (100 - y)y = (100 - 60 - t)(60 + t) = (40 - t)(60 + t)$$

$$= 2400 - 20t - t^2 \leq 2400.$$

$\max (xy) = 2400 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow y = 60,\ x = 40.$

b) Ta có $y < 60$, $z \geq 60$ nên

$$(60 - y)(60 - z) \leq 0 \Rightarrow 3600 - 60(y + z) + yz \leq 0$$

$$\Rightarrow yz \leq 60(y + z - 60)$$

$$\Rightarrow xyz \leq 60x(y + z - 60) \leq 60.\frac{(x + y + z - 60)^2}{2} = 30.40^2 = 48000.$$

$$\max(xyz) = 48000 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 60 \\ x = y + z - 60 \\ x + y + z = 100 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 60 \\ x = y = 20 \end{cases}$$

441. Do $1 \le x \le y \le z \le t \le 25$ nên $\frac{x}{y} \ge \frac{1}{z}$; $\frac{z}{t} \ge \frac{z}{25}$ (xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x = 1$, $y = z$, $t = 25$).

Ta có : $$A = \frac{x}{y} + \frac{z}{t} \ge \frac{1}{z} + \frac{z}{25}.$$

Hai số dương $\frac{1}{z}$ và $\frac{z}{25}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{z} = \frac{z}{25} \Leftrightarrow z^2 = 25 \Leftrightarrow z = 5$ (vì $z > 0$).

$\min A = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = 1, y = z = 5, t = 25.$

442. a) $A = xy + xt + yz + zt$.

Ta có $2xy \le x^2 + y^2$, $2xt \le x^2 + t^2$, $2yz \le y^2 + z^2$, $2zt \le z^2 + t^2$ nên

$$2A \le 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 2.$$

$\max A = 1 \Leftrightarrow x = y = z = t = \pm\frac{1}{2}.$

b) $B = xy + xt + yz + zt$.

Ta có : $4xy \le 2x^2 + 2y^2$, $4zt \le 2z^2 + 2t^2$, $4xt \le x^2 + 4t^2$, $4yz \le y^2 + 4z^2$

nên $$4B \le 3(x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 3.$$

$\max B = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y, z = t, x = 2t, y = 2z$ và $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ z = t = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = y = \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ z = t = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

443. Giải tương tự ví dụ 115.

a) $|x-2|+|4-x|\ge 2$ và $|x-3|\ge 0$.

$$\min A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le x\le 4 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

b) $|x-1|+|3-x|\ge 2$ và $|x-2|+|4-x|\ge 2$.

$$\min B = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x\le 3 \\ 2\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

444. Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$. Ta có

$$A = x-y+x-z+y-z = 2x-2z.$$

Do $x\le 3$ nên $2x\le 6$, do $z\ge 0$ nên $-2z\le 0$. Suy ra $A\le 6$.

Ta có $A=6 \Leftrightarrow x=3$, $z=0$, y tuỳ ý $(0\le y\le 3)$.

Vậy max $A=6$ khi và chỉ khi trong ba số x, y, z có một số bằng 3, một số bằng 0, số còn lại có giá trị từ 0 đến 3.

445. Xét hai trường hợp :

a) $x+y<8$: Lại xét ba trường hợp :

Nếu $y=0$ thì $A=1$.

Nếu $1\le y\le 6$ thì $\dfrac{x}{x+y}<1$, $\dfrac{y}{8-(x+y)}<6 \Rightarrow A<7$.

Nếu $y=7$ thì $x=0$ và $A=7$.

b) $x+y>8$: Ta có $\dfrac{y}{8-(x+y)}\le 0$, $\dfrac{x}{x+y}\le 1 \Rightarrow A\le 1$.

So sánh các giá trị trên của A, ta có max $A=7 \Leftrightarrow x=0$, $y=7$.

446. Ta có : 36^m tận cùng bằng 6, còn 5^n tận cùng bằng 5. Nếu $36^m>5^n$ thì A tận cùng bằng 1. Nếu $36^m<5^n$ thì A tận cùng bằng 9.

Xét khả năng $A=1$: Ta có $36^m-5^n=1 \Leftrightarrow 36^m-1=5^n$. Đẳng thức này không xảy ra vì vế trái chia hết cho 35 nên chia hết cho 7, còn vế phải không chia hết cho 7.

Xét khả năng $A=9$: Ta có $5^n-36^m=9 \Rightarrow 5^n$ chia hết cho 9, vô lí.

Xét khả năng A = 11. Xảy ra được khả năng này, chẳng hạn với m = 1, n = 2 thì $A = |36 - 5^2| = 11$.

Vậy min A = 11.

447. Số tự nhiên A không là số chính phương nên A > 1.

Xét A = 2, ta có $2 = x^2 + 4y$ nên x là số chẵn. Khi đó vế phải chia hết cho 4, vế trái không chia hết cho 4, loại.

Xét A = 3, ta có $3 = x^2 + 4y$ nên x là số lẻ. Khi đó vế phải chia cho 4 dư 1, vế trái chia cho 4 dư 3, loại.

Xét A = 5, ta có $5 = x^2 + 4y$. Khi đó x = y = 1.

Vậy GTNN của A là 5.

448. Ta có a lớn nhất $\Leftrightarrow$ b lớn nhất $\Leftrightarrow$ c lớn nhất $\Leftrightarrow$ d lớn nhất. Do a, b, c, d là các số nguyên nên

$$d < 100 \Rightarrow d \le 99\ ;$$

$$c < 4.99 = 396 \Rightarrow c \le 395\ ;$$

$$b < 3.395 = 1185 \Rightarrow b \le 1184\ ;$$

$$a < 2.1184 = 2368 \Rightarrow a \le 2367.$$

Vậy max a = 2367 $\Leftrightarrow$ b = 1184, c = 395, d = 99.

449. a) Dễ thấy nếu số nguyên a không chia hết cho 3 thì a^4 chia cho 3 dư 1. Do A là số tự nhiên nên $x^4 + y^4 \vdots 15$, do đó

$$x^4 + y^4 \vdots 3 \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $x \vdots 3$.

Giả sử x không chia hết cho 3. Thế thì x^4 không chia hết cho 3, y^4 không chia hết cho 3, y không chia hết cho 3. Do x và y không chia hết cho 3 nên x^4 và y^4 chia cho 3 dư 1, suy ra $x^4 + y^4$ chia cho 3 dư 2, trái với (1). Vậy $x \vdots 3$.

Chứng minh tương tự ta được $y \vdots 3$.

b) Dễ thấy nếu a không chia hết cho 5 thì a^4 chia cho 5 dư 1. Bạn đọc tự chứng minh tiếp.

c) Từ câu a và câu b suy ra x và y chia hết cho 15. Do x, y nguyên dương nên $x \geq 15$, $y \geq 15$, do đó $x^4 + y^4 \geq 15^4 + 15^4$. Suy ra

$$A = \frac{x^4 + y^4}{15} \geq \frac{15^4 + 15^4}{15} = 6750.$$

$\min A = 6750 \Leftrightarrow x = y = 15$.

450. Gọi d = ƯCLN(x, y) thì x = da, y = db, (a, b) = 1.

Ta có $$A = \frac{(da + db)^4}{(da)^3} = \frac{d^4(a + b)^4}{d^3a^3} = \frac{d(a + b)^4}{a^3}.$$

Do (a, b) = 1 nên (a, a + b) = 1, do đó $(a^3, (a + b)^4) = 1$, suy ra $d \,\vdots\, a^3$. Giả sử $d = ca^3$ với c nguyên dương. Khi đó $A = c(a + b)^4$ với a, b, c nguyên dương.

Do A là số lẻ nên c và a + b là số lẻ. Để A nhỏ nhất ta chọn c = 1, a + b = 3, khi đó $A = 1.3^4 = 81$.

Để a + b = 3 thì hoặc a = 2, b = 1 (khi đó d = 8, x = 16, y = 8) hoặc a = 1, b = 2 (khi đó d = 1, x = 1, y = 2).

Vậy min A = 81 $\Leftrightarrow$ x = 16, y = 8 hoặc x = 1, y = 2.

451. 49 số hạng đầu của dãy (1) có dạng $20 + n^2$ (n = 1, 2,..., 49). Gọi d là số bất kì của dãy (2), d = ƯCLN $(20 + n^2, 20 + (n + 1)^2)$.

Ta có $$(20 + n^2 + 2n + 1) - (20 + n^2) \,\vdots\, d \Rightarrow 2n + 1 \,\vdots\, d$$

$$\Rightarrow 2(20 + n^2) - n(2n + 1) \,\vdots\, d \Rightarrow 40 - n \,\vdots\, d$$

$$\Rightarrow 2(40 - n) + (2n + 1) \,\vdots\, d \Rightarrow 81 \,\vdots\, d.$$

Do đó $d \leq 81$. Với d = 81 ta có $40 - n \,\vdots\, 81$. Do $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; ... ; 49)$ nên n = 40.

Vậy số lớn nhất trong dãy (2) là 81, đó là ƯCLN $(20 + 40^2, 20 + 41^2)$.

452. a) Để n lớn nhất khi viết 2005 dưới dạng tổng của n hợp số, ta phải chọn các hợp số nhỏ nhất. Trong n hợp số đó, phải tồn tại một hợp số lẻ. Do hợp số nhỏ nhất là 4 và hợp số lẻ nhỏ nhất là 9 nên :

$$2005 \geq 9 + 4(n - 1).$$

Giải bất phương trình trên, ta được $n \leq 500$.

GTLN của n là 500 khi 2005 được viết dưới dạng :

$$2005 = 9 + \underbrace{4 + 4 + ... + 4}_{499 \text{ số}}$$

b) Giải tương tự như câu a, ta được $n \le 500\frac{1}{2}$. Do n là số tự nhiên nên $n \le 500$.

Ta tìm được GTLN của n là 499 khi 2007 được viết dưới dạng :

$$2007 = 15 + \underbrace{4 + 4 + ... + 4}_{498 \text{ số}}.$$

453. Gọi cặp hai số có ba chữ số lập được là $\overline{max}, \overline{nby}$. Để tích của hai số nhỏ nhất, các chữ số m, n phải bằng 1 và 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $m = 1, n = 2$, ta có tích $\overline{1ax} . \overline{2by}$

Để tích trên nhỏ nhất, ta phải có $a, b \in \{3 ; 4\}$. Dễ dàng chứng minh được $\overline{13x} . \overline{24y} < \overline{14x} . \overline{23y}$.

Xét tích $\overline{13x} . \overline{24y}$ trong đó $x, y \in \{5, 6\}$. So sánh 135 . 246 với 136 . 245, ta được 135. 246 < 136 . 245. Vậy 135 . 246 là tích có giá trị nhỏ nhất.

454. Gọi số chính phương phải tìm là n^2, ta có $n^2 = 100A + b$ (A là số trăm, $1 \le b \le 99$). Theo đề bài, 100A là số chính phương nên A là số chính phương.

Đặt $A = a^2$ ($a \in \mathbf{N}$). Cần tìm giá trị lớn nhất của a.

Ta có : $n^2 > 100a^2 \Rightarrow n > 10a \Rightarrow n \ge 10a + 1 \Rightarrow$

$$n^2 \ge (10a + 1)^2 \Rightarrow 100a^2 + b \ge 100a^2 + 20a + 1 \Rightarrow b \ge 20a + 1.$$

Do $b \le 99$ nên $20a + 1 \le 99 \Rightarrow a \le 4$.

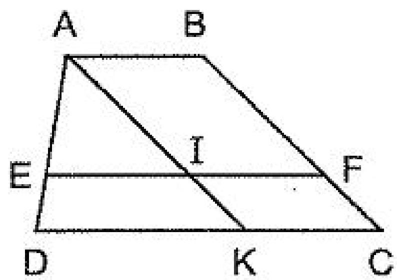
Ta có : $n^2 = 100a^2 + b \le 1600 + 99 = 1699$. Kiểm tra : $42^2 = 1764$, $41^2 = 1681$. Số chính phương lớn nhất phải tìm là $1681 = 41^2$.

PHẦN HÌNH HỌC

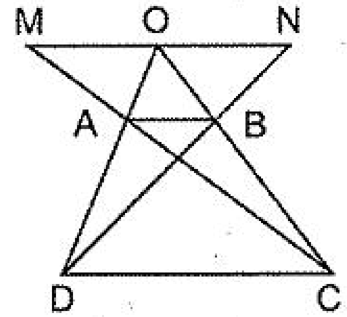
Chương III – TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

§13. Định lí Ta-lét

171. (h.62) Kẻ AK // BC, cắt EF ở I. Lần lượt tính được EI = 30cm, EF = 58cm.



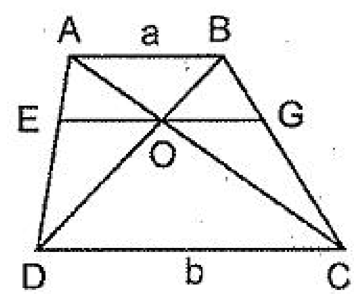
Hình 62



Hình 63

172. (h.63) Chứng minh rằng $\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB}$. Hãy dùng các tỉ số trung gian : $\frac{CO}{CB}, \frac{DO}{DA}$.

173. (h.64) Ta có $\frac{OE}{a} = \frac{DE}{DA}$, $\frac{OE}{b} = \frac{AE}{AD}$



Hình 64

nên $\frac{OE}{a} + \frac{OE}{b} = \frac{DE + AE}{AD} = 1$. Do đó

$OE\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$ hay $\frac{1}{OE} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

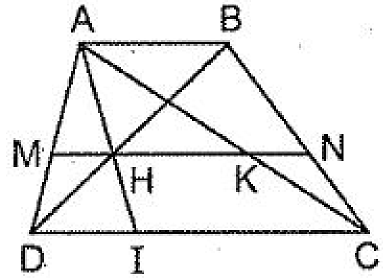
Tương tự $\frac{1}{OG} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

174. (h.65)

a) $\frac{MH}{AB} = \frac{DM}{DA} = \frac{CK}{CA} = \frac{KN}{AB}$ nên MH = KN.

b) Gọi I là giao điểm của AH và CD.

Hãy chứng minh MH = HK ⇔ DI = IC.



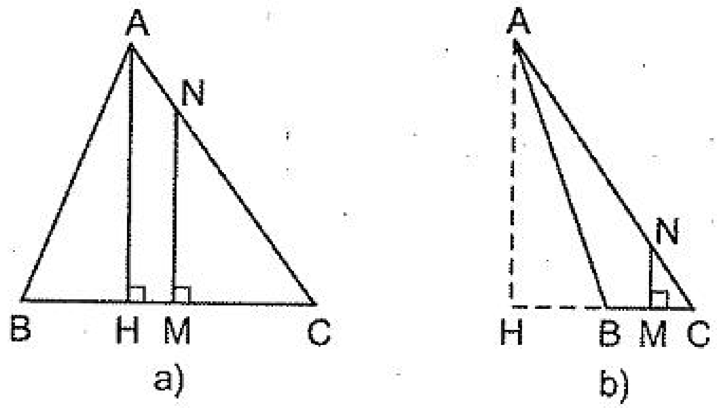
Hình 65

Từ đó suy ra cách dựng : Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của AI và BD. Qua H dựng d // CD.

175. Gọi M là trung điểm của BC, AH ⊥ BC. Xét hai trường hợp :

a) $\widehat{B} < 90^{o}$ (h.66a)

$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CH} \Rightarrow \frac{CN}{45} = \frac{21}{27} \Rightarrow CN = 35cm.$$



Hình 66

b) $\widehat{B} > 90^{o}$ (h.66b)

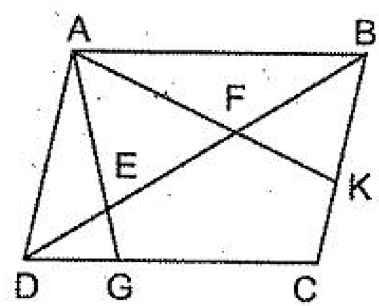
$$\frac{CN}{CA} = \frac{CM}{CH} \Rightarrow \frac{CN}{45} = \frac{6}{27} \Rightarrow CN = 10cm.$$

176. (h.67) Gọi E, F là giao điểm của AG, AK với BD. Ta có :

$$\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{3}$$

nên $DE = \frac{1}{3}EB = \frac{1}{4}DB = 4cm.$

Tương tự, $BF = \frac{3}{8}BD = 6cm.$ Vậy EF = 6cm.

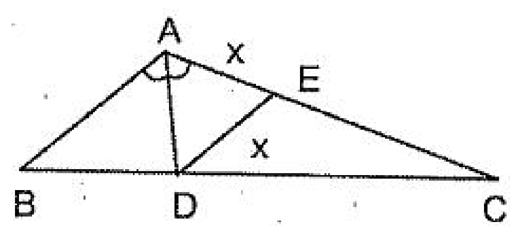


Hình 67

177. (h.68) a) Kẻ DE // AB, ΔADE đều. Đặt AD = DE = EA = x. Ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6-x}{6}.$$

Từ đó x = 2. *Đáp số :* AD = 2cm.



Hình 68

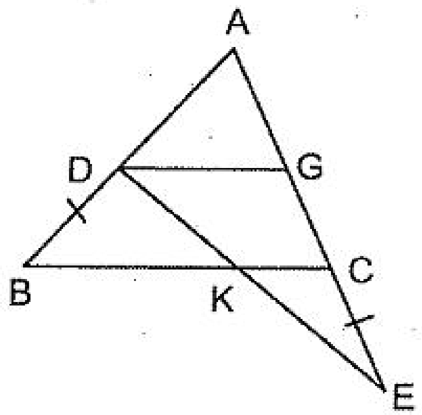
b) Kẻ DE // AB. Đặt DE = EA = x. Ta có

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{AB} = \frac{AC - x}{AC} = 1 - \frac{x}{AC}$$

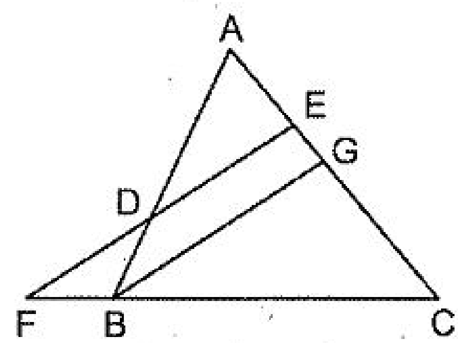
$$\Rightarrow \frac{x}{AB} + \frac{x}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{x}. \qquad (1)$$

Theo đề bài $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD}$. Suy ra AD = x, ΔADE đều, $\widehat{BAC} = 120^o$.

178. (h.69) Kẻ DG // BC. Ta có $\frac{KE}{KD} = \frac{CE}{CG} = \frac{BD}{CG} = \frac{BA}{CA}$.



Hình 69



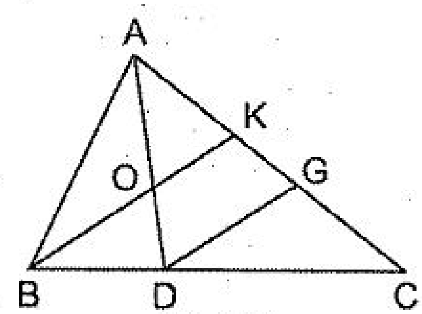
Hình 70

179. (h.70) Kẻ BG // DE. Ta có $\frac{FB}{FC} = \frac{EG}{EC} = \frac{EG}{EA}.\frac{EA}{EC} = \frac{DB}{DA}.\frac{EA}{EC} = \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

180. (h.71) Kẻ DG // BK. Chú ý rằng

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{KG}.\frac{KG}{KC}.$$

Đáp số : $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$.

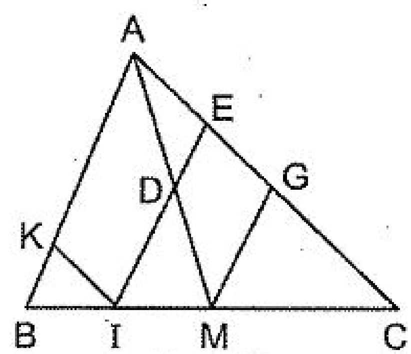


Hình 71

181. (h.72) Kẻ MG // IE. Ta có :

$$\frac{BK}{KI} = \frac{BA}{AC} ; \qquad (1)$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{MG}{AG} = \frac{MG}{GC} = \frac{BA}{AC} \qquad (2)$$



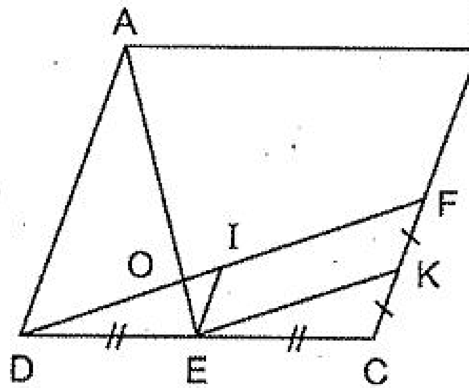
Hình 72

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BK}{KI} = \frac{DE}{AE}$, mà KI = AE nên BK = DE.

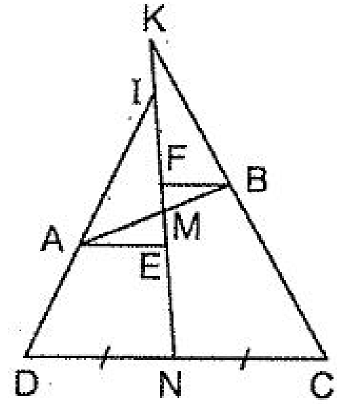
182. (h.73) Kẻ EI // DA, lấy K là trung điểm của CF.

Đặt OD = 2a, OF = 3a. Ta tính được OI = 0,5a ; IF = 2,5a ; EK = 2,5a. Từ đó EIFK là hình bình hành nên FK // IE // AD. Suy ra BC // AD.

Ta lại có BC = AD (cùng bằng 4EI), vậy ABCD là hình bình hành.



Hình 73



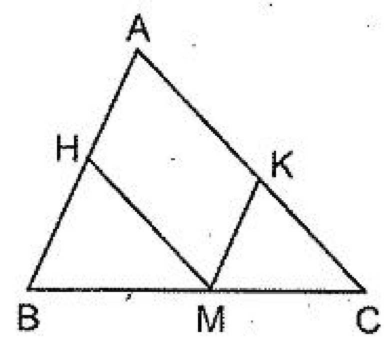
Hình 74

183. (h.74). Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Vẽ AE, BF // DC. Ta có

$$\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{DN} = \frac{BF}{NC} = \frac{KB}{KC}.$$

184. a) (h.75)

$$\frac{AH}{AB} + \frac{AK}{AC} = \frac{CM}{CB} + \frac{BM}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$



Hình 75

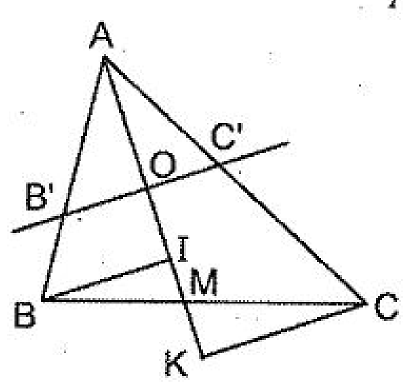
b) Nếu M thuộc tia đối của tia CB thì $\frac{AK}{AC} - \frac{AH}{AB} = 1.$

Nếu M thuộc tia đối của tia BC thì $\frac{AH}{AB} - \frac{AK}{AC} = 1.$

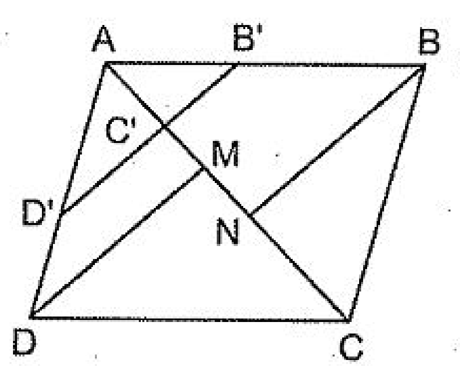
185. (h.76) a) Vẽ BI, CK // B'C'. Ta có :

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} = \frac{AI}{AO} + \frac{AK}{AO} = \frac{AI + AK}{AO}$$

$$= \frac{(AM - MI) + (AM + MK)}{AO} = \frac{2.AM}{AO} = 4.$$



Hình 76



Hình 77

b) Chỉ cần O là một điểm cố định thuộc đoạn thẳng AM, không đòi hỏi O là trung điểm của AM. Giá trị không đổi của tổng bằng 2AM : AO.

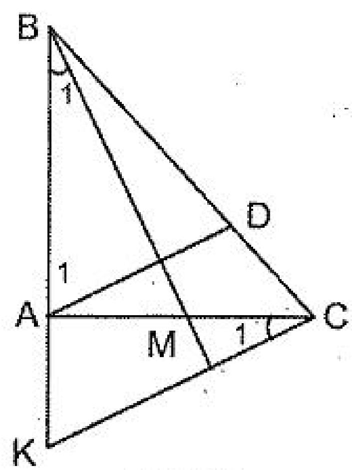
Có thể diễn đạt bài toán này dưới dạng : Cho hình bình hành ABCD, điểm C' nằm trên đường chéo AC ($AC' < \frac{1}{2}AC$). Qua C' vẽ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AD ở B', D'. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AB'} + \frac{AD}{AD'} = \frac{AC}{AC'}$ (h.77)

186. (h.78) Kẻ CK // AD. Ta có $\frac{BA}{AK} = \frac{BD}{DC} = 2$. Ta lại có

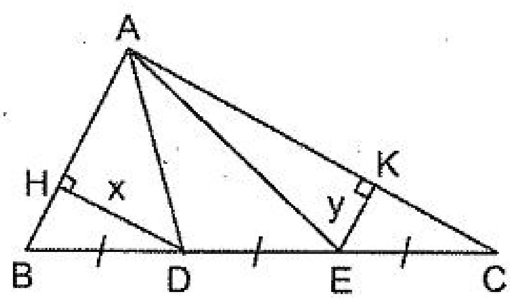
$$BA = AC = 2AM \text{ nên } AK = AM.$$

$$\Delta CAK = \Delta BAM \text{ (c.g.c) nên } \widehat{C}_1 = \widehat{B}_1.$$

Suy ra $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{K} = 90^o$. Vậy $AD \perp BM$.



Hình 78



Hình 79

187. (h.79) Kẻ DH // AC, EK // AB. Đặt DH = x, EK = y thì AC = 3x, AK = 2x, AB = 3y, AH = 2y.

Xét ΔAHD vuông tại H : $x^2 + 4y^2 = 100$.

Xét ΔAEK vuông tại K : $4x^2 + y^2 = 225$.

Suy ra $5(x^2 + y^2) = 325$. Từ đó $x^2 + y^2 = 65$.

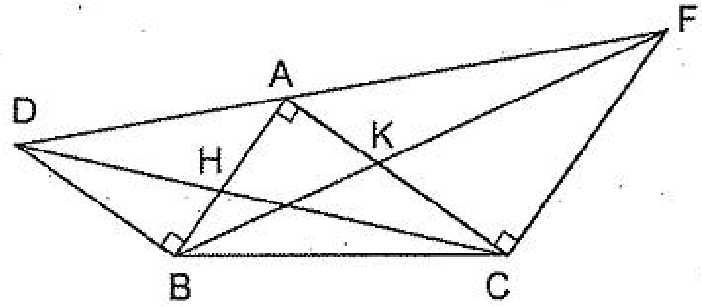
Chú ý rằng BH = y, ta tính được $BD = \sqrt{65}$, nên $BC = 3\sqrt{65}$ cm.

188. (h.80)

a) Đặt AB = c, AC = b. Ta có :

$$\frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \qquad (2)$$



Hình 80

Từ (1), (2) suy ra

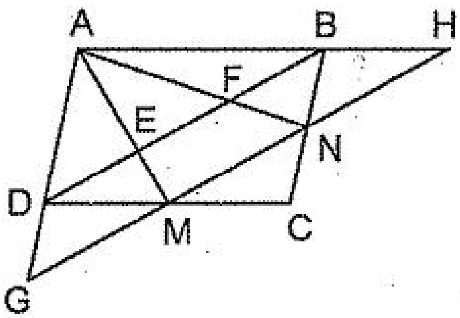
$$\frac{AH}{c} = \frac{AH}{AH + HB} = \frac{b}{b + c},$$

$$\frac{AK}{b} = \frac{AK}{AK + KC} = \frac{c}{b + c}.$$

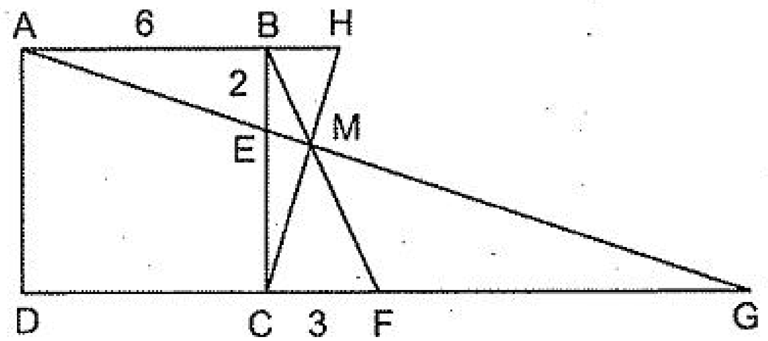
Suy ra $AH = \frac{bc}{b + c}$, $AK = \frac{bc}{b + c}$, do đó AH = AK.

b) Từ (1), (2) suy ra $\frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK}$ mà AH = AK nên $AH^2 = BH.CK$.

189. (h.81) Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD ; gọi G, H là giao điểm của MN với AD, AB. Chứng minh GM = MN = NH.



Hình 81



Hình 82

190. (h.82) Gọi H là giao điểm của CM và AB, G là giao điểm của AM và DF.

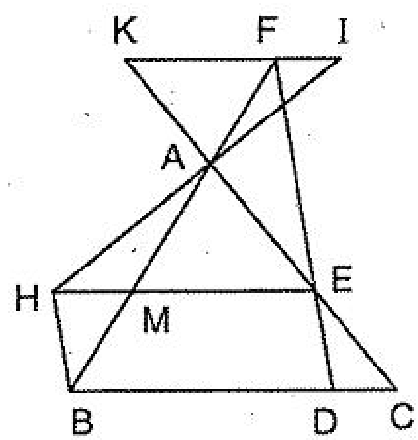
Ta tính được CG = 12, FG = 9, $\frac{BH}{AB} = \frac{CF}{FG}$ nên $\frac{BH}{6} = \frac{3}{9}$, BH = 2, BH = BE,

$\Delta BAE = \Delta BCH$. *Đáp số :* $\widehat{AMC} = 90^o$.

191. (h.83) Gọi K là giao điểm của AC và FI, M là giao điểm của AB và EH. Ta có

$$\frac{FI}{FK} = \frac{MH}{ME}, \qquad (1)$$

$$\frac{DC}{FK} = \frac{DE}{FE}, \qquad (2)$$



Hình 83

$$\frac{BD}{ME} = \frac{FD}{FE} \Rightarrow \frac{BD - ME}{ME} = \frac{FD - FE}{FE}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{ME} = \frac{DE}{FE} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{FI}{FK} = \frac{DC}{FK}$ nên FI = DC.

192. (h.84) Qua N kẻ EF // BC thì

$$NE = NF. \qquad (1)$$

Kẻ EG // HK thì

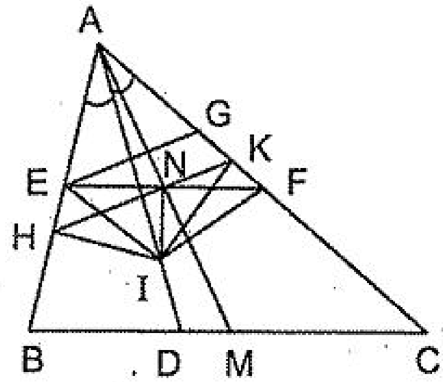
$$GK = KF. \qquad (2)$$

Dễ chứng minh AH = AK, AE = AG nên

$$EH = GK. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$EH = KF,\ \Delta IHE = \Delta IKF \text{ (c.g.c)},\ IE = IF.$$

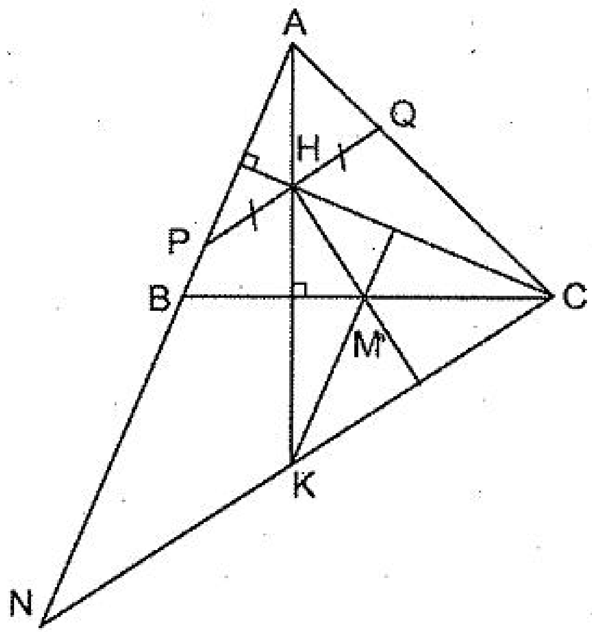


Hình 84

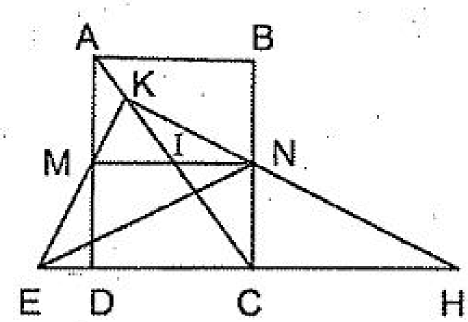
ΔIEF cân tại I, IN là đường trung tuyến nên IN ⊥ EF. Do đó IN ⊥ BC.

193. (h.85) Qua C kẻ đường thẳng song song với PQ, cắt AB ở N, cắt AH ở K. Do HP = HQ nên KN = KC. Từ đó, KM là đường trung bình của ΔCBN, KM // NB nên KM ⊥ CH.

M là trực tâm của ΔCHK nên HM ⊥ NC. Suy ra HM ⊥ PQ.



Hình 85

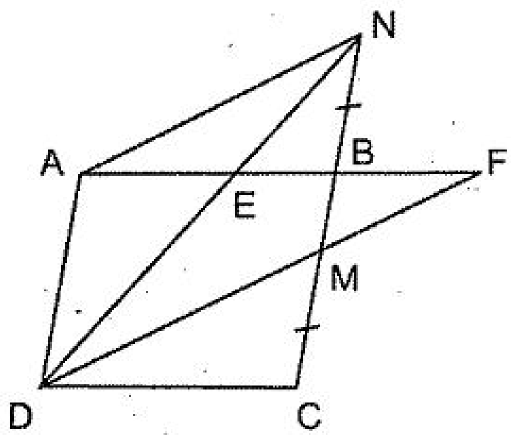


Hình 86

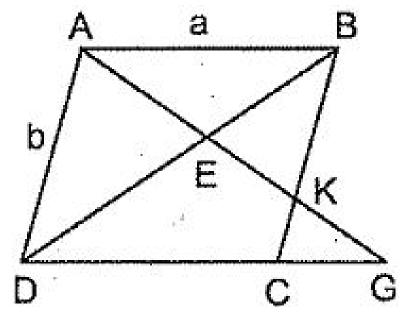
194. (h.86) Gọi I là giao điểm của MN và AC, H là giao điểm của KN và DC. Do MI = IN nên EC = CH. ΔNEH cân tại N. Từ đó chứng minh được NM là tia phân giác của góc KNE.

195. (h.87) Ta có MN = BC ⇒ ADMN là hình bình hành ⇒ AN // DM. Ta có

$$\frac{AE}{EF} = \frac{EN}{ED} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow AE^2 = EB.EF.$$



Hình 87



Hình 88

196. (h.88)

a) $\frac{EK}{AE} = \frac{EB}{ED} = \frac{AE}{EG} \Rightarrow AE^2 = EK.EG.$

b) Điều phải chứng minh tương đương với $\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = 1.$

Ta có $\frac{AE}{AK} = \frac{DE}{DB}, \frac{AE}{AG} = \frac{BE}{BD}$ nên $\frac{AE}{AK} + \frac{AE}{AG} = \frac{DE}{BD} + \frac{BE}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1.$

c) Ta có

$$\frac{BK}{KC} = \frac{a}{CG}, \quad (1)$$

$$\frac{KC}{b} = \frac{CG}{DG}. \quad (2)$$

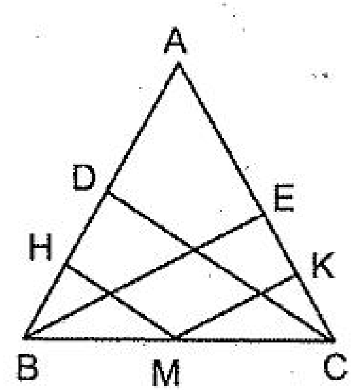
Nhân từng vế (1) và (2) ta được $\frac{BK}{b} = \frac{a}{DG} \Rightarrow BK.DG = a.b$ (hằng số, a và b là độ dài hai cạnh AB, AD).

197. (h.89) Ta có :

$$\frac{MH}{CD} + \frac{MK}{BE} = \frac{BM}{BC} + \frac{MC}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1.$$

Ta lại có CD = BE (vì ΔACD = ΔCBE), suy ra

$$\frac{MH}{CD} + \frac{MK}{CD} = 1 \Rightarrow MH + MK = CD.$$



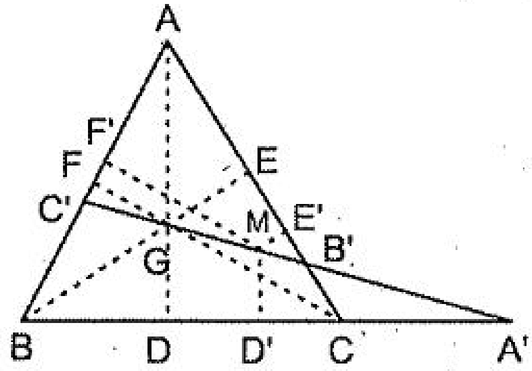
Hình 89

198. (h.90) Gọi ba đường trung tuyến của ΔABC là AD, BE, CF. Vẽ D', E', F' là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Ta có :

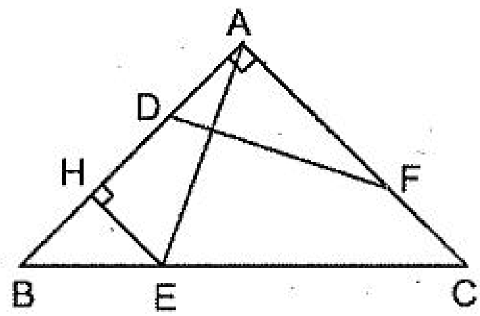
$$\frac{A'M}{A'G} + \frac{B'M}{B'G} + \frac{C'M}{C'G} = \frac{MD'}{GD} + \frac{ME'}{GE} + \frac{MF'}{GF}.$$

Đặt $GD = GE = GF = \frac{h}{3}$ (h là chiều cao của ΔABC) thì tổng trên bằng

$$h : \frac{h}{3} = 3.$$



Hình 90



Hình 91

199. (h.91) Vẽ $EH \perp AB$. Ta có :

$$\frac{HE}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ mà } AC = AB \text{ nên } HE = AD.$$

Từ giả thiết suy ra AD = CF, mà AD = EH = BH nên AH = AF.

$$\Delta AHE = \Delta FAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AE = DF.$$

Dễ dàng chứng minh được $AE \perp DF$.

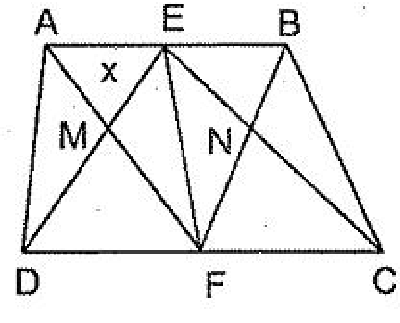
200. (h.92) Đặt $S_{AEM} = x$.

Do $\frac{MF}{MA} = \frac{MD}{ME} = \frac{DF}{AE} = \frac{3}{2}$ nên $S_{EMF} = \frac{3}{2}x$ (1)

$$S_{AMD} = \frac{3}{2}x,\ S_{DMF} = \frac{3}{2}S_{AMD} = \frac{9}{4}x.$$

Từ đó $S_{AEFD} = \frac{25}{4}x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{EMF} = \frac{6}{25}S_{AEFD}$.



Hình 92

Tương tự, $S_{ENF} = \frac{6}{25}S_{BEFC}$.

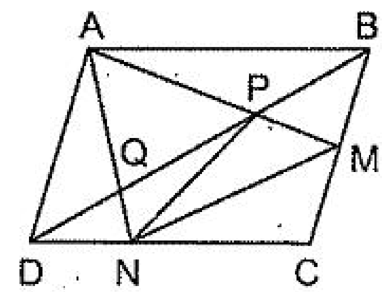
Suy ra $S_{EMFN} = \frac{6}{25}S_{ABCD} = \frac{6}{25}S.$

201. (h.93) Trước hết ta có $\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{S_{APQ}}{S_{APN}}.\frac{S_{APN}}{S_{AMN}} = \frac{AQ}{AN}.\frac{AP}{AM}.$

Ta cần tính các tỉ số $\frac{AQ}{AN}, \frac{AP}{AM}.$

a) Ta có $\frac{AQ}{QN} = \frac{AB}{DN} = 3 \Rightarrow \frac{AQ}{AQ + QN} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{3}{4}.$

$\frac{AP}{PM} = \frac{AD}{BM} = 2 \Rightarrow \frac{AP}{AP + PM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{2}{3}.$



Hình 93

Do đó $\frac{AQ}{AN}.\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$

Vậy $S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{AMN}$.

b) Ta có $\frac{CN}{ND} = 2.\frac{BM}{MC}$. Đặt $\frac{BM}{MC} = k$ thì $\frac{CN}{ND} = 2k.$

Đặt MC = x thì BM = kx. Đặt ND = y thì CN = 2ky.

Ta có $\frac{AP}{PM} = \frac{AD}{BM} = \frac{x + kx}{kx} = \frac{k+1}{k} \Rightarrow \frac{AP}{AP + PM} = \frac{k+1}{2k+1}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{k+1}{2k+1}. \qquad (1)$$

Mặt khác, $\frac{AQ}{QN} = \frac{AB}{DN} = \frac{y + 2ky}{y} = \frac{2k+1}{1}$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{AQ + QN} = \frac{2k+1}{2k+2} \Rightarrow \frac{AQ}{AN} = \frac{2k+1}{2k+2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AP}{AM}.\frac{AQ}{AN} = \frac{k+1}{2k+1}.\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{2}.$

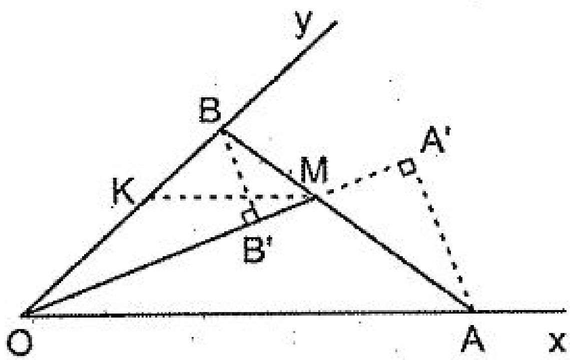
Vậy $S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{AMN}$.

202. (h.94) Vẽ MK // OA, ta có

$$\frac{OK}{OB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{S_{MOK}}{S_{MOB}} = \frac{S_{MOA}}{S_{AOB}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MOK}}{S_2} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} = \frac{1}{S_{MOK}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{S_{MOK}} \text{ (không đổi).}$$



Hình 94

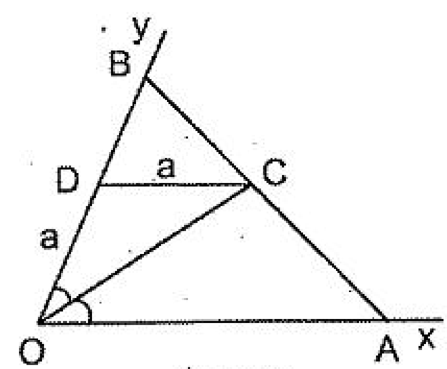
Chú ý : Nếu vẽ thêm AA' ⊥ OM, BB' ⊥ OM thì từ $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ không đổi, ta có $\dfrac{1}{\frac{1}{2}.OM.AA'} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}.OM.BB'}$ không đổi, suy ra $\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'}$ không đổi. Ta lại có $MA \geq AA'$, $MB \geq BB'$ nên

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \leq \frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} \text{ là hằng số.}$$

Từ đó ta có bài toán : Cho góc xOy và một điểm M nằm trong góc ấy. Qua M hãy dựng một đường thẳng cắt hai cạnh của góc ở A và B sao cho $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ lớn nhất.

Đường thẳng phải dựng là đường vuông góc với OM tại M.

203. (h.95) Dự đoán điểm cố định : Nếu lấy A' thuộc Oy, B' thuộc Ox sao cho OA' = OA, OB' = OB thì $\frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{k}$. Điểm cố định nếu có phải là giao điểm của AB và A'B'. Gọi giao điểm đó là C, rõ ràng C phải thuộc tia phân giác của góc xOy.

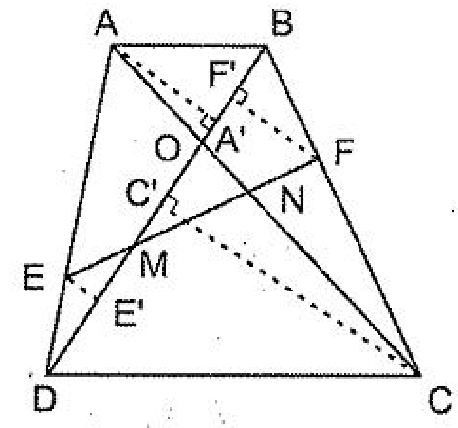


Hình 95

Chứng minh. Vẽ tia phân giác của góc xOy, cắt AB ở C. Vẽ CD // Ox thì OD = DC = a. Ta có $\frac{DC}{OA} = \frac{BD}{BO} \Rightarrow \frac{a}{OA} = \frac{OB - a}{OB} \Rightarrow \frac{a}{OA} + \frac{a}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{a}$. Mặt khác, theo giả thiết $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{k}$. Vậy DC = k, C là điểm cố định.

204. (h.96) Kẻ AA', CC', EE', FF' vuông góc với BD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có

$$\frac{EM}{MF}=\frac{EE'}{FF'}=\frac{\frac{1}{3}AA'}{\frac{1}{3}CC'}=\frac{AA'}{CC'}=\frac{OA}{OC}. \qquad (1)$$



Hình 96

Tương tự

$$\frac{FN}{NE}=\frac{OB}{OD}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), do $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$ nên

$$\frac{EM}{MF}=\frac{FN}{NE}\Rightarrow\frac{EM}{EM+MF}=\frac{FN}{FN+NE}\Rightarrow\frac{EM}{EF}=\frac{FN}{EF}\Rightarrow EM=FN.$$

Cách giải khác : Xem bài 216.

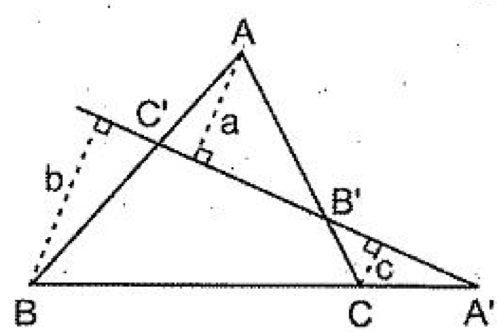
205. (h.97) a) Xem câu b.

b) Gọi a, b, c theo thứ tự là khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng A'B'C'. Ta có :

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{a}{c} \qquad (1)$$

$$\frac{CA'}{A'B}=\frac{c}{b} \qquad (2)$$

$$\frac{BC'}{C'A}=\frac{b}{a} \qquad (3)$$



Hình 97

Nhân (1), (2), (3) ta được điều phải chứng minh.

Chú ý :

1. Trong ba điểm A', B', C' thẳng hàng có hai trường hợp : hoặc có đúng một điểm, hoặc cả ba điểm nằm ngoài ΔABC. Không có trường hợp không có điểm nào hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác. Thật vậy, nếu ΔABC nằm về một phía của đường thẳng d thì d không cắt bất cứ cạnh nào của tam giác : cả ba điểm A', B', C' đều nằm ngoài tam giác ; nếu ΔABC nằm về hai phía của d thì trong ba điểm A, B, C có hai điểm thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ d, điểm còn lại thuộc nửa mặt phẳng đối, đường thẳng d chỉ cắt hai cạnh của tam giác và không cắt cạnh thứ ba : chỉ có một trong ba điểm A', B', C' nằm ngoài tam giác.

2. Đảo lại ta có : Nếu các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho trong ba điểm A', B', C' có đúng một điểm hoặc cả ba điểm nằm ngoài ΔABC và $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ thì ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Thật vậy, giả sử A' là điểm nằm ngoài ΔABC. Khi đó B', C' hoặc đều nằm trên cạnh tam giác, hoặc đều nằm ngoài tam giác, do đó đường thẳng B'C' cắt BC tại một điểm A_1 nằm ngoài tam giác. Ta sẽ chứng minh rằng A_1 trùng A' : Do A_1, B', C' thẳng hàng nên theo định lí thuận :

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết :

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \qquad (2)$$

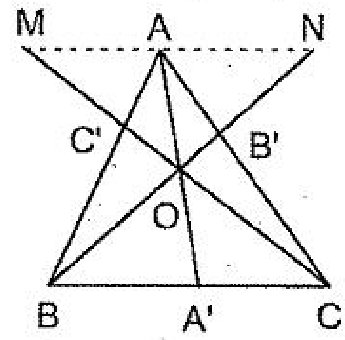
Từ (1), (2) suy ra $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA'}{A'B} \Rightarrow A_1$ và A' chia ngoài CB theo cùng một tỉ số $\Rightarrow A_1$ trùng A'. Do đó A', B', C' thẳng hàng.

206. a) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BB', CC' ở N, M (h.98). Ta có :

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AN}{CB},$$

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{BC}{AM},$$

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{MA}{AN}.$$



Hình 98

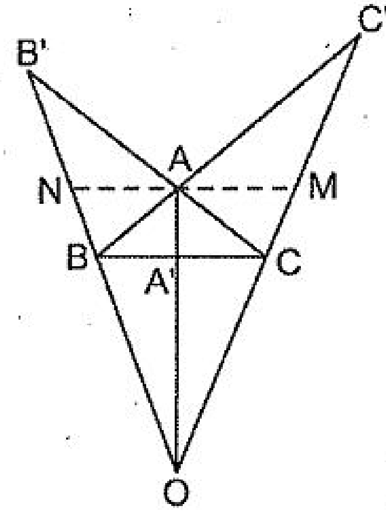
Nhân các đẳng thức trên theo từng vế, ta được điều phải chứng minh.

b) Chứng minh tương tự câu a (h.99).

Chú ý : Các hệ thức viết ở định lí Mê-nê-la-uýt và định lí Xê-va như nhau. Chỗ khác nhau là vị trí của các điểm A', B', C' :

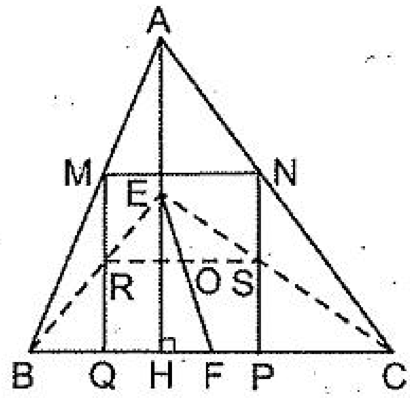
– Ở định lí Mê-nê-la-uýt : có đúng một điểm, hoặc cả ba điểm nằm ngoài tam giác.

– Ở định lí Xê-va : không có điểm nào, hoặc có đúng hai điểm nằm ngoài tam giác.



Hình 99

207. (h.100) Gọi E, F, R, S theo thứ tự là trung điểm của đường cao AH, cạnh BC, MQ, NP. Gọi O là trung điểm của RS. Dùng bổ đề hình thang chứng minh B, R, E thẳng hàng, C, S, E thẳng hàng, E, O, F thẳng hàng. Điểm O chuyển động trên đoạn thẳng EF, trừ E và F.



Hình 100

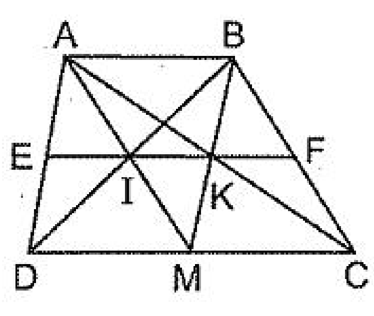
§14. Định lí Ta-lét đảo

208. (h.101)

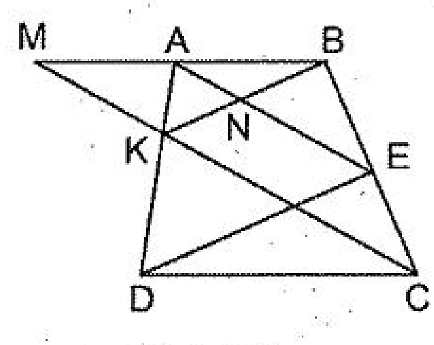
a) $\dfrac{MI}{IA} = \dfrac{ID}{IB} = \dfrac{DM}{AB} = \dfrac{MC}{AB} = \dfrac{MK}{KB} \Rightarrow IK \,//\, AB$ (định lí Ta-lét đảo)

b) $\dfrac{EI}{DM} = \dfrac{IK}{MC}$ (cùng bằng $\dfrac{AI}{AM}$)

mà DM = MC nên EI = IK. Tương tự IK = KF.



Hình 101



Hình 102

209. (h.102) Gọi M là giao điểm của AB và KC, N là giao điểm của AE và BK.

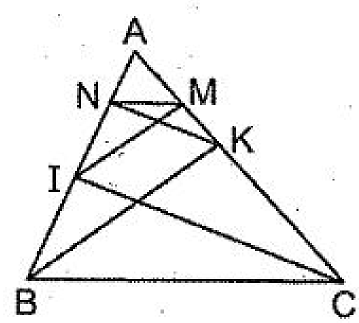
Ta có $\dfrac{AN}{NE} = \dfrac{MK}{KC}$ (do AE // MC) $= \dfrac{KA}{KD}$ (do AM // CD). Do đó KN // DE.

210. (h.103)

$$NK \,//\, IC \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AC} \qquad (1)$$

$$IM \,//\, BK \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AM}{AK} \qquad (2)$$

Nhân từng vế (1) và (2) được $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$ suy ra MN // BC.

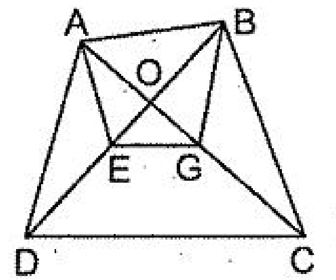


Hình 103

211. (h.104) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) $AE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OA}{OC}$ (1)

$BG \parallel AD \Rightarrow \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{OG}{OA}$ (2)



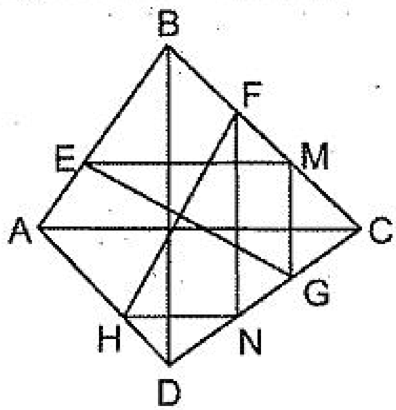
Hình 104

Nhân từng vế (1) và (2) được

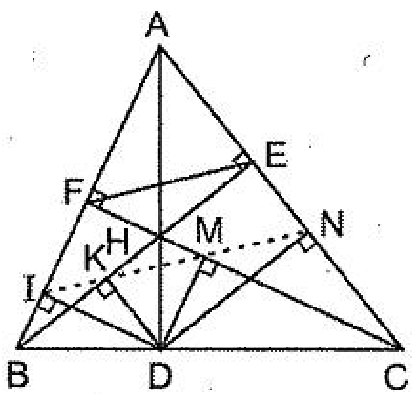
$\dfrac{OE}{OD} = \dfrac{OG}{OC}$, suy ra $EG \parallel DC$.

b) Ta sẽ chứng minh rằng $\dfrac{AB}{EG} = \dfrac{DC}{AB}$. Thật vậy, do $EG \parallel AB$, $BG \parallel AD$, $AB \parallel CD$ nên $\dfrac{AB}{EG} = \dfrac{OA}{OG} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{DC}{AB}$, suy ra $AB^2 = EG.DC$.

212. (h.105) Gọi M là trung điểm của CF, N là trung điểm của DG. Chứng minh rằng $\Delta EMG = \Delta FNH$.



Hình 105



Hình 106

213. (h.106) Gọi H là giao điểm của AD, BE, CF.

Ta có $\dfrac{BI}{IF} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BK}{KE} \Rightarrow IK \parallel FE$ (1)

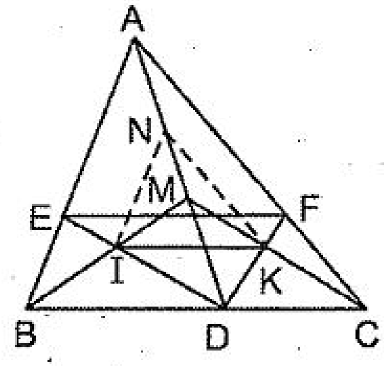
Tương tự $MN \parallel FE$ (2)

Ta lại có $\dfrac{IF}{FA} = \dfrac{DH}{HA} = \dfrac{NE}{EA} \Rightarrow IN \parallel FE$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra I, K, M, N thẳng hàng.

214. (h.107) Gọi N là trung điểm của AM. Hãy chứng minh rằng $\dfrac{EI}{ID} = \dfrac{FK}{KD}$ (dùng tỉ số trung gian $\dfrac{AN}{ND}$).

Nhận xét : Có thể thay điều kiện "I, K là trung điểm của MB, MC" bởi điều kiện tổng quát hơn "I, K chia trong MB, MC theo cùng một tỉ số".



Hình 107

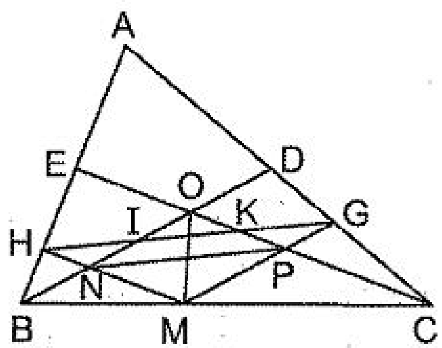
215. (h.108) Kí hiệu như hình vẽ, ta có

$$\frac{HI}{HG} = \frac{HN}{HM} = \frac{EO}{EC} = \frac{1}{3}.$$

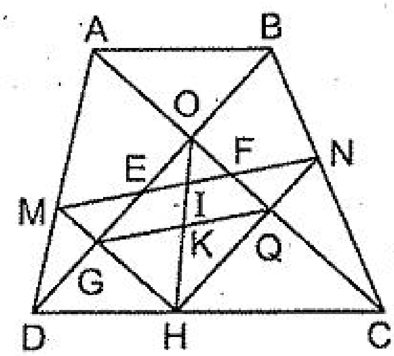
Tương tự $\frac{GK}{HG} = \frac{1}{3}$, suy ra HI = IK = KG.

b) Trước hết chứng minh $\frac{HN}{NM} = \frac{GP}{PM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$) để suy ra NP // HG.

Do ONMP là hình bình hành nên MO đi qua trung điểm của NP, từ đó MO đi qua trung điểm của HG.



Hình 108



Hình 109

216. (h.109) a) $\frac{DH}{HC} = \frac{DM}{MA} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow$ HN // BD.

b) Gọi G là giao điểm của HM và BD, Q là giao điểm của HN và AC. Ta có

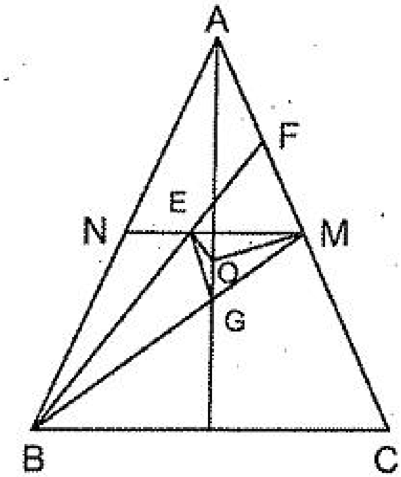
$$\frac{MG}{GH} = \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{NQ}{QH} \Rightarrow GQ \,//\, MN.$$

Gọi K là giao điểm của HO và GQ.

Do OGHQ là hình bình hành nên GK = KQ. Từ đó chứng minh được IE = IF, IM = IN, ME = NF.

217. (h.110) Gọi G là trọng tâm của ΔABC.

Gọi MN, BF là các đường trung tuyến của ΔABM. Ta có GO ⊥ BC mà BC // MN nên GO ⊥ MN, tức là



Hình 110

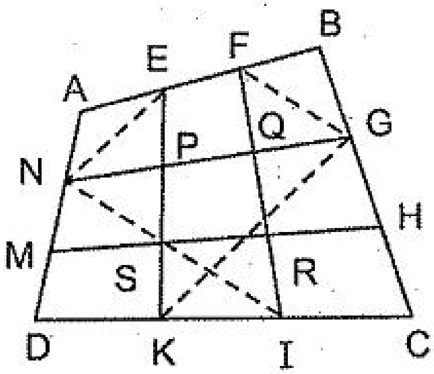
$$GO \perp ME. \qquad (1)$$

Ta có $MO \perp AC$, mà $EG // AC$ nên

$$MO \perp EG. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra O là trực tâm của ΔMEG, nên $EO \perp GM$, tức là $EO \perp BM$.

218. (h.111)



Hình 111

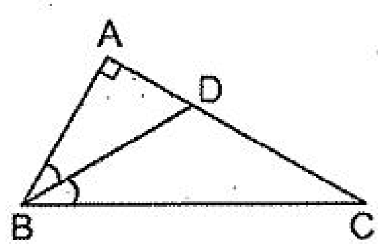
a) Hãy chứng minh $NE // BD$, $NE = \frac{1}{3}BD$, $KG // BD$, $KG = \frac{2}{3}BD$, suy ra $NE // KG$, $NE = \frac{1}{2}KG$. Từ đó $NP = \frac{1}{3}NG$. Tương tự $GQ = \frac{1}{3}NG$. Do đó $NP = PQ = QG$.

Chứng minh tương tự đối với các đoạn thẳng còn lại.

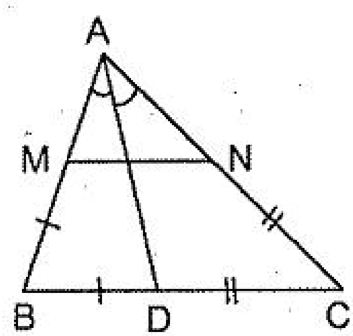
b) Trước hết chứng minh rằng $S_{EFIK} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$, tương tự $S_{PQRS} = \frac{1}{3}S_{EFIK}$, suy ra điều phải chứng minh.

§15. Tính chất đường phân giác của tam giác

219. (h.112) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{5}$ nên $AB = 3y$, $BC = 5y$. Áp dụng định lí Py-ta-go ta tính được $y = 2$, từ đó $AB = 6cm$, $BC = 10cm$.



Hình 112



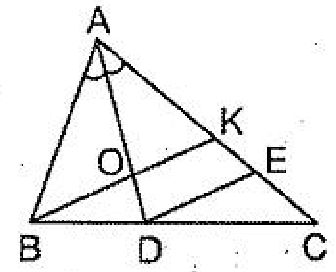
Hình 113

220. (h.113). $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC} \Rightarrow MN // BC$.

221. (h.114) Kẻ DE // BK. Ta có $\frac{AK}{KC} = \frac{AK}{KE} \cdot \frac{KE}{KC}$.

Tính $\frac{AK}{KE}$ được $\frac{2}{1}$, tính $\frac{KE}{KC}$ được $\frac{2}{5}$.

Đáp số : $\frac{AK}{KC} = \frac{4}{5}$.



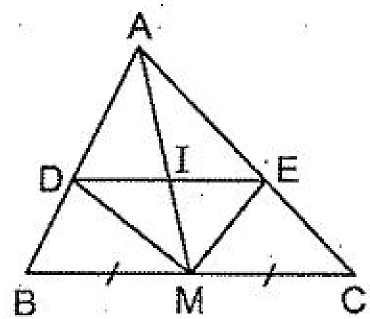
Hình 114

222. (h.115).

a) Chứng minh rằng $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$.

b) $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt DE = x thì

$$\frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2am}{a + 2m}.$$



Hình 115

c) Ta có $MI = \frac{1}{2}DE = \frac{am}{a + 2m}$. Các điểm I chuyển động trên đường tròn tâm M bán kính $\frac{am}{a + 2m}$ (trừ giao điểm của nó với BC).

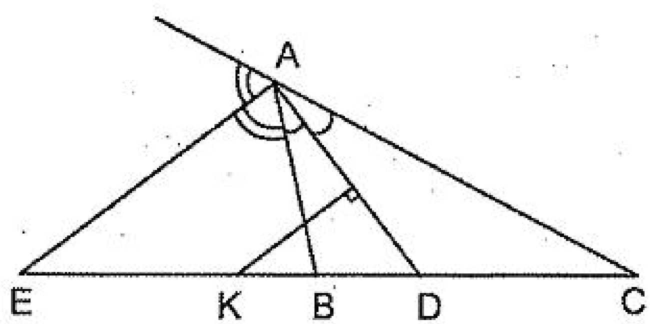
d) DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Leftrightarrow AD = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

223. (h.116) Vẽ đường phân giác của góc ngoài tại A, cắt BC ở E. Ta có

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra EB = BC = 6cm, ED = 8cm.

$$KD = \frac{ED}{2} = 4cm.$$



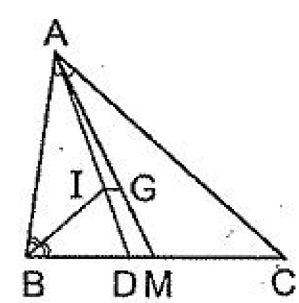
Hình 116

Cách giải khác : Xem bài 236.

224. (h.117)

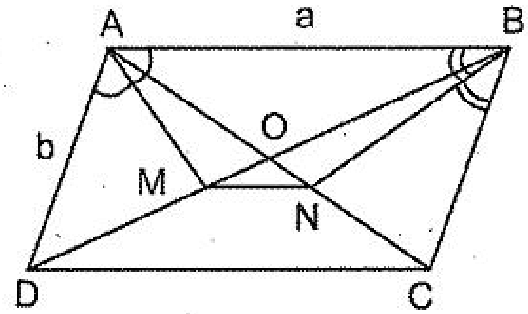
a) Giải tương tự ví dụ 36.

b) Ta tính được DM = 1cm nên $IG = \frac{2}{3}$ cm.



Hình 117

225. (h.118). Đặt AB = a, AD = b.



Hình 118

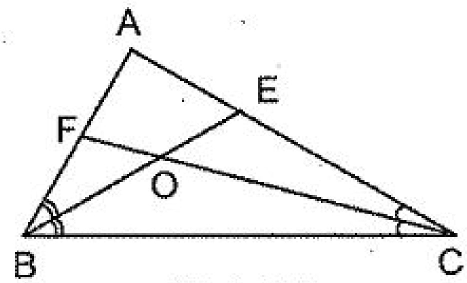
Ta có $\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \dfrac{DM}{DM + MB} = \dfrac{b}{b + a}$

$\Rightarrow \dfrac{DM}{2DO} = \dfrac{b}{b + a} \Rightarrow \dfrac{DM}{DO} = \dfrac{2b}{b + a}$.

Tương tự $\dfrac{CN}{CO} = \dfrac{2b}{b + a}$.

Suy ra $\dfrac{DM}{DO} = \dfrac{CN}{CO}$, vậy MN // CD.

226. (h.119) Đặt BC = a, AC = b, AB = c.



Hình 119

Ta tính được

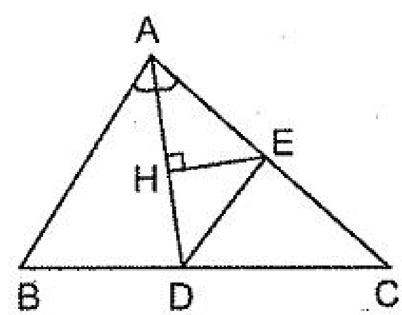
$CE = \dfrac{ab}{a + c}$, $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{a + c}{b}$, $\dfrac{BO}{BE} = \dfrac{a + c}{a + b + c}$.

Tương tự $\dfrac{CO}{CF} = \dfrac{a + b}{a + b + c}$.

Từ giả thiết suy ra $\dfrac{(a + c)(a + b)}{(a + b + c)^2} = \dfrac{1}{2}$. Từ đó ta chứng minh được

$a^2 = b^2 + c^2$ nên ΔABC vuông tại A.

227. (h.120). Vẽ DE // AB. Ta có $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$,



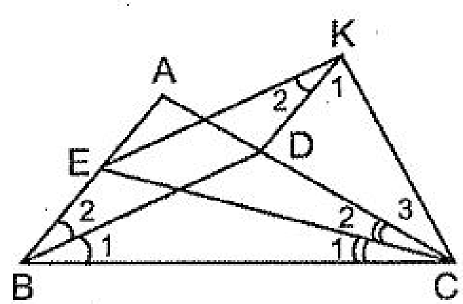
Hình 120

tính được EA = 10cm.

Trong ΔAED cân tại E, vẽ đường cao EH. Lần lượt tính được AH = 6cm, EH = 8cm, $S_{ADE} = 48cm^2$,

$S_{ADC} = 168cm^2$; $S_{ABC} = 235{,}2cm^2$.

228. (h.121)



Hình 121

a) Theo ví dụ 36 ta có $CD = \dfrac{ab}{a + c}$, $BE = \dfrac{ac}{a + b}$

mà b > c nên

$\dfrac{ab}{a + c} > \dfrac{ac}{a + c} > \dfrac{ac}{a + b}$ tức là CD > BE.

b) Ta có CD > BE, BE = DK $\Rightarrow$ CD > DK $\Rightarrow \widehat{K}_1 > \widehat{C}_3$. (1)

Ta lại có b > c $\Rightarrow \widehat{B}_2 > \widehat{C}_2$ mà $\widehat{B}_2 = \widehat{K}_2$ nên

$$\widehat{K}_2 > \widehat{C}_2 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 > \widehat{C}_3 + \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{EKC} > \widehat{ECK} \Rightarrow$ CE > EK.

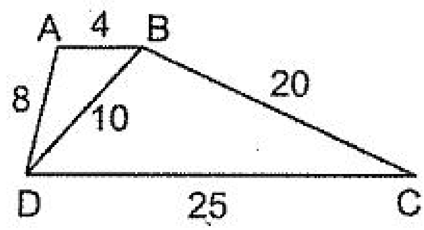
c) CE > EK, EK = BD $\Rightarrow$ CE > BD.

Nhận xét : Từ bài toán trên suy ra :

1. Trong tam giác có hai cạnh không bằng nhau, đường phân giác ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn.
2. Nếu một tam giác có hai đường phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

§16. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

229. (h.122) ΔABD và ΔBDC đồng dạng (c.c.c). Tứ giác ABCD là hình thang.



Hình 122

230. a) Hai tam giác đồng dạng (c.c.c).

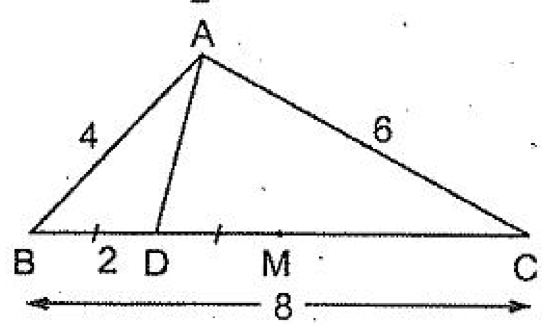
b) Không thể khẳng định như vậy. Hai tam giác ở câu a có hai cặp cạnh bằng nhau và ba cặp góc bằng nhau (vì hai tam giác đồng dạng) nhưng không phải là hai tam giác bằng nhau.

231. Ta có $ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow \dfrac{ah_a}{bc} = \dfrac{bh_b}{bc} = \dfrac{ch_c}{bc} \Rightarrow \dfrac{ah_a}{bc} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$.

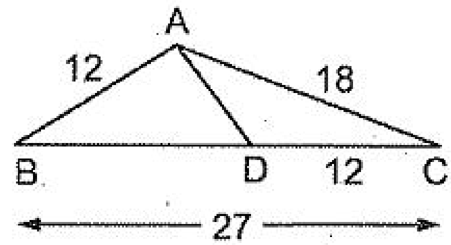
Do $bc = a^2$ nên $\dfrac{h_a}{a} = \dfrac{h_b}{c} = \dfrac{h_c}{b}$.

232. (h.123) ΔABD và ΔCBA đồng dạng (c.g.c) nên $\dfrac{AD}{CA} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $AD = \dfrac{1}{2}CA = 3$cm.



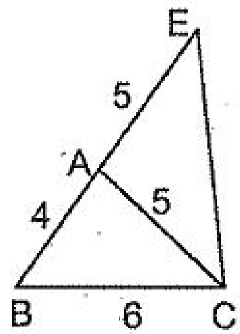
Hình 123



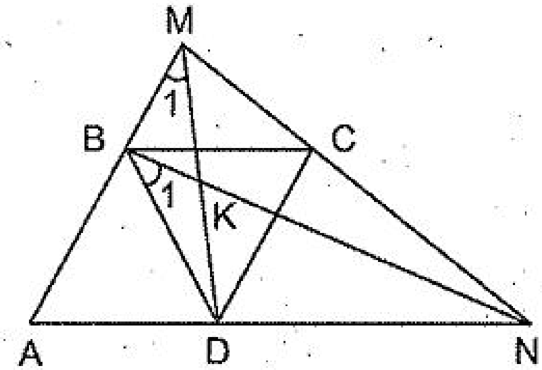
Hình 124

233. (h.124) ΔDCA và ΔACB đồng dạng (c.g.c). *Đáp số :* AD = 8cm.

234. (h.125) Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = AC = 5cm. Hãy chứng minh ΔABC và ΔCBE đồng dạng (c.g.c) để suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{E}$. Từ đó $\widehat{BAC} = \widehat{ACE} + \widehat{E} = 2\widehat{E} = 2\widehat{ACB}$.



Hình 125



Hình 126

235. (h.126)

a) $BM \cdot DN = a^2$.

b) ΔMBD và ΔBDN đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{B_1}$.

ΔBMD và ΔKBD có hai cặp góc bằng nhau $\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{MBD} = 120^o$.

236. (h.127)

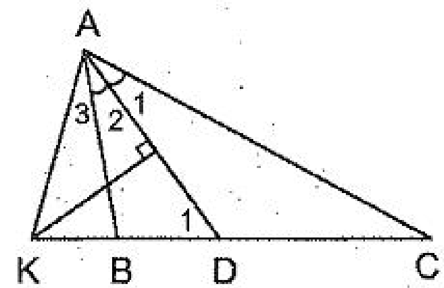
a) Ta có $\widehat{D_1} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3}$ và $\widehat{D_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C}$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{A_3} = \widehat{C}$.

ΔKAB và ΔKCA đồng dạng (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\dfrac{KB}{KA} = \dfrac{AB}{AC}$,

mà $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

nên $KB = \dfrac{1}{2}KA$.



Hình 127

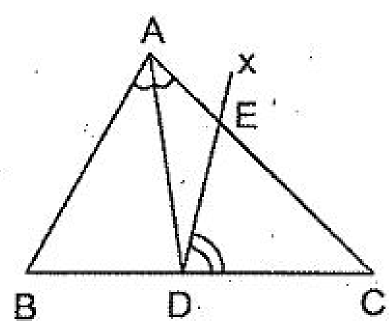
Do đó $KB = \dfrac{1}{2}KD$. Từ đó tính được KD = 4cm.

Cách khác giải câu b : Xem bài 223.

237. (h.128)

a) ΔABC và ΔDEC đồng dạng (g.g).

b) Sử dụng câu a và tính chất đường phân giác để chứng minh $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{DE}{DC}$ vì cùng bằng $\dfrac{AB}{AC}$.

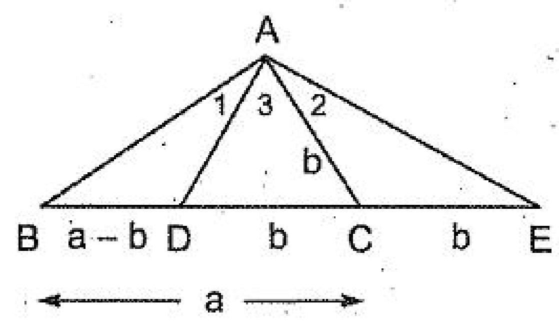


Hình 128

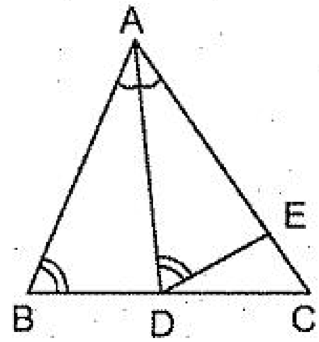
238. (h.129) a) Ta có $\widehat{E} = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1$, ΔABD và ΔEBA đồng dạng (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\dfrac{AB}{EB} = \dfrac{BD}{BA} \Rightarrow \dfrac{c}{a+b} = \dfrac{a-b}{c}$. Từ đó suy ra $a^2 = b^2 + c^2$.

Chú ý : Bài toán trên cho ta một cách chứng minh định lí Py-ta-go.



Hình 129



Hình 130

239. Lấy E trên AC sao cho $\widehat{ADE} = \widehat{B}$ (h.130),

$$\Delta ADE \text{ và } \Delta ABD \text{ đồng dạng (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AE < AB.AC$$

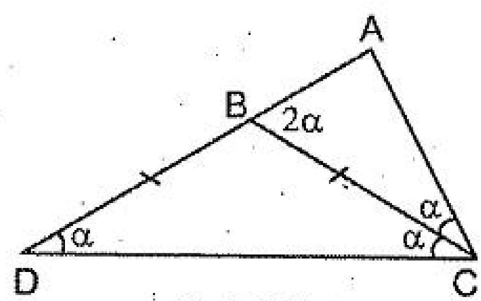
(chú ý rằng $AE < AC$ vì $\widehat{ADE} = \widehat{B} < \widehat{ADC}$).

240. (h.131)

a) Trên tia đối của tia BA lấy BD = BC, ΔACD và ΔABC đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB.AD = 4.9$$

$$\Rightarrow AC = 6\text{cm}.$$



Hình 131

b) Theo câu a, ta có

$$AC^2 = AB.AD = AB(AB + BC) \Rightarrow b^2 = c(c + a) = c^2 + ac. \qquad (1)$$

Ta có $b > c$ nên chỉ có hai khả năng là $b = c + 1$ hoặc $b = c + 2$.

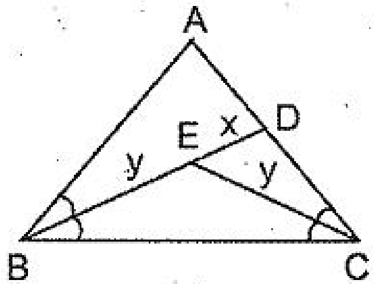
Nếu $b = c + 1$ thì từ (1) suy ra $(c+1)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 2c + 1 = ac \Rightarrow c(a-2) = 1$, loại, vì $c = 1$, $a = 3$, $b = 2$ không là các cạnh của một tam giác.

Nếu $b = c + 2$ thì từ (1) suy ra $(c+2)^2 = c^2 + ac \Rightarrow 4c + 4 = ac \Rightarrow c(a-4) = 4$. Xét $c = 1, 2, 4$; chỉ có $c = 4$, $a = 5$, $b = 6$ thoả mãn bài toán.

241. (h.132) Trước hết tính CD theo tính chất đường phân giác : CD = 4cm.

Cách 1. Tính BD = 6cm theo cách giải ở bài 240.

Cách 2. Vẽ đường phân giác CE của ΔCBD. Đặt DE = x, EB = y, ta có CE = y.



Hình 132

ΔCED và ΔBCD đồng dạng (g.g) $\Rightarrow$

$\dfrac{ED}{CD} = \dfrac{EC}{BC} = \dfrac{CD}{BD} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{4}{BD}$, các tỉ số trên cũng bằng $\dfrac{x+y}{9}$ hay $\dfrac{BD}{9}$.

Từ $\dfrac{4}{BD} = \dfrac{BD}{9}$ ta được BD = 6 (cm).

Cách 3. Tính BD theo công thức tổng quát được nêu ở ví dụ 37 :

$$BD^2 = AB.BC - AD.DC.$$

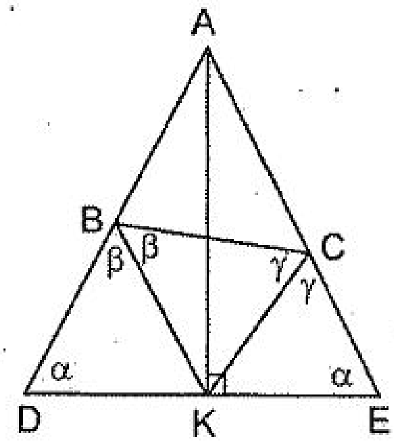
242. (h.133) a) ΔADE cân (có đường cao cũng là đường phân giác) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E}$. Kí hiệu α, β, γ như hình vẽ. Tứ giác DBCE có

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^o \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^o.$$

Ta lại có $\widehat{CKE} + \alpha + \gamma = 180^o$ (xét ΔCKE) nên $\widehat{CKE} = \beta$.

Vậy ΔDBK và ΔEKC đồng dạng (g.g).

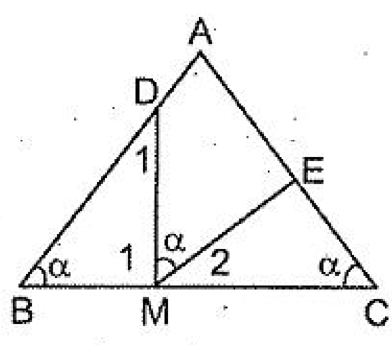
b) Suy ra từ câu a.



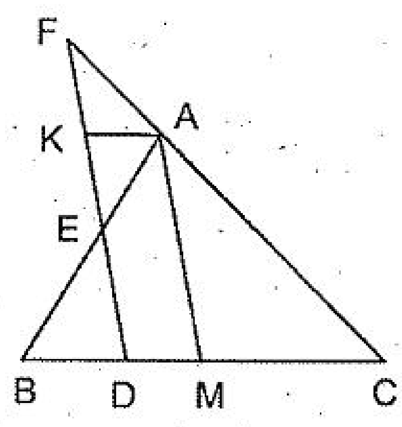
Hình 133

243. (h.134) Ta có $\widehat{M}_1 + \widehat{B} + \widehat{D}_1 = 180^o$, $\widehat{M}_1 + \widehat{DME} + \widehat{M}_2 = 180^o$ mà $\widehat{B} = \widehat{DME}$ nên $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_2$.

ΔBDM và ΔCME đồng dạng (g.g).



Hình 134



Hình 135

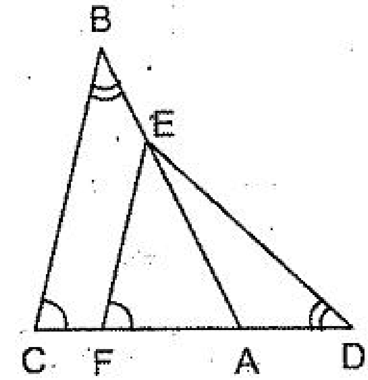
244. (h.135) a) $\dfrac{DE}{AM} + \dfrac{DF}{AM} = \dfrac{BD}{BM} + \dfrac{DC}{MC} = \dfrac{BC}{BM} = 2$. Vậy DE + DF = 2AM.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{FK}{AM} = \dfrac{KE}{AM}$ (cùng bằng $\dfrac{KA}{MC}$).

245. Vẽ ΔADE bằng $\Delta A'B'C'$ như hình 136. Kẻ EF // BC.

$$EF \,//\, BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{b'}{c} = \frac{AF}{b}$$

$$\Rightarrow bb' = c.AF. \qquad (1)$$



Hình 136

ΔABC và Δ EDF đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BC}{DF} = \frac{AB}{ED} = \frac{a}{AF + c'} = \frac{c}{a'}$$

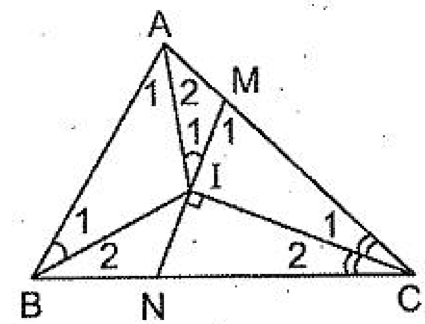
$$\Rightarrow aa' = c.AF + cc'. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $aa' = bb' + cc'$.

246. (h.137) a) Ta có

$$\widehat{M_1} = \widehat{A_2} + \widehat{I}_1,$$

$$\widehat{M_1} = 90^o - \widehat{C_1} = \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2},$$



Hình 137

suy ra $\widehat{I_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2} = \widehat{B_1}$. Do đó ΔAIM và ΔABI đồng dạng (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{AI}{AB}$ nên $AI^2 = AM.AB$.

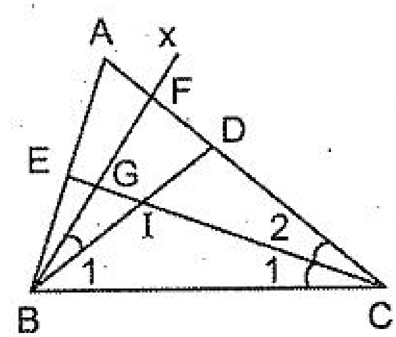
Tương tự $BI^2 = BN.AB$. Do đó $\dfrac{AI^2}{BI^2} = \dfrac{AM}{BN}$.

247. (h.138) a) $AC > AB \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow \widehat{DBA} > \widehat{C_2} = \widehat{DBF}$.

Gọi I là giao điểm của BD và CE thì G nằm giữa I và E, suy ra

$$CG < CE. \qquad (1)$$

b) Do $\widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ và $\widehat{DBF} = \widehat{C_2}$ nên $\widehat{FBC} > \widehat{FCB}$ suy ra



Hình 138

$$CF > BF. \qquad (2)$$

ΔFBD và ΔFCG đồng dạng (g.g) suy ra

$$\frac{BD}{CG} = \frac{BF}{CF}. \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$BD < CG. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra BD < CE.

Nhận xét :

Từ bài toán trên (cũng như từ bài 228), ta suy ra :

1. Trong tam giác có hai cạnh không bằng nhau, đường phân giác ứng với cạnh lớn hơn thì nhỏ hơn.

2. Nếu một tam giác có hai đường phân giác bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

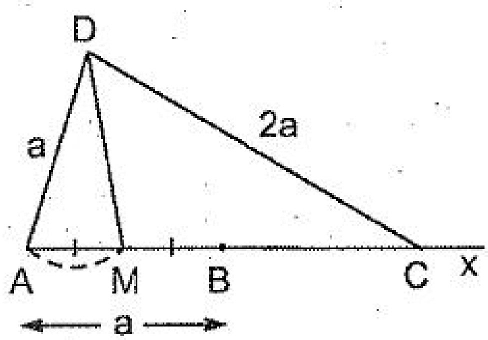
248. (h.139) a) ΔMAD và ΔDAC đồng dạng (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{MD}{DC} = \frac{MA}{DA} \Rightarrow \frac{MD}{2a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow MD = a.$$

b) – Dựng đường tròn (B ; a), cắt tia Bx ở C.

– Dựng các đường tròn (A ; a) và (C ; 2a), chúng cắt nhau ở D.

– Dựng đường tròn (D ; DA) cắt AB ở M.



Hình 139

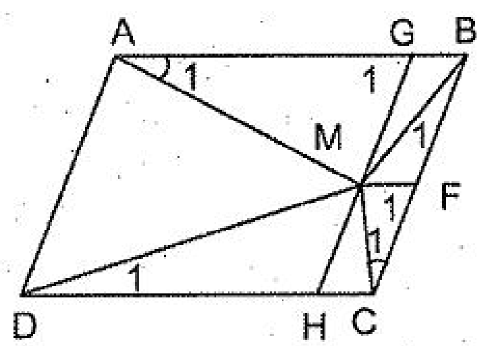
249. (h.140) a) Ta có $\widehat{G}_1 = \widehat{F}_1$ (cùng bằng $\widehat{ABC}$).

ΔAGM và ΔCFM đồng dạng (g.g).

b) Từ câu a suy ra $\frac{AG}{CF} = \frac{MG}{MF}$. Do AG = DH, CF = MH, MG = BF nên $\frac{DH}{MH} = \frac{BF}{MF}$.

Do đó, ΔDHM và ΔBFM đồng dạng (c.g.c).

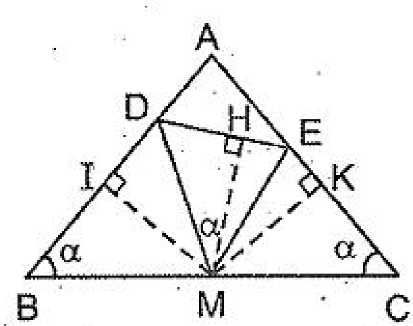
Suy ra $\widehat{MDH} = \widehat{MBF}$, tức là $\widehat{MDC} = \widehat{MBC}$.



Hình 140

250. (h.141)

a) Ta có $\widehat{DMC} = \widehat{DME} + \widehat{CME}$, mặt khác $\widehat{DMC} = \widehat{B} + \widehat{BDM}$, mà $\widehat{DME} = \widehat{B}$ nên $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$.



Hình 141

Do đó ΔBDM và ΔCME đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD.CE = CM.BM = a^2.$$

b) ΔBDM và ΔCME đồng dạng còn suy ra : $\frac{DM}{ME} = \frac{BD}{CM} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BD}{BM}$

(vì CM = BM). Do đó ΔDME và ΔDBM đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{BDM}$.

c) Từ câu b suy ra DM là tia phân giác của góc BDE, EM là tia phân giác của góc CED. Kẻ $MH \perp DE$, $MI \perp AB$, $MK \perp AC$. Ta có DH = DI, EH = EK, do đó chu vi ADE = AI + AK = 2AK.

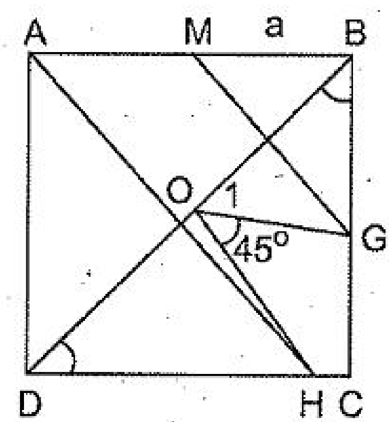
Ta lại có $CK = \frac{MC}{2} = \frac{a}{2}$, AC = 2a nên AK = 1,5a. Vậy chu vi tam giác ADE bằng 3a.

251. (h.142) a) Ta có

$$\widehat{HOD} + \hat{O}_1 = 135^o, \quad \widehat{OGB} + \hat{O}_1 = 135^o$$

nên $\widehat{HOD} = \widehat{OGB}$.

ΔHOD và ΔOGB đồng dạng (g.g).



Hình 142

b) Từ câu a suy ra $\frac{HD}{OB} = \frac{DO}{BG}$,

Đặt BM = a thì AD = 2a, $OB = OD = a\sqrt{2}$.

Ta có

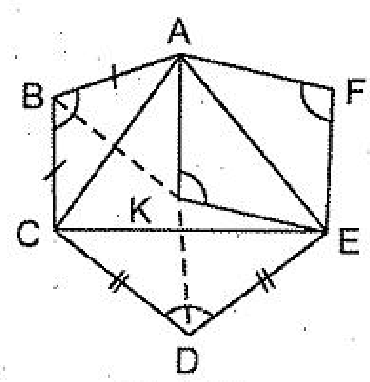
$$HD.BG = OB.OD = a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = 2a.a = AD.BM$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{BM}{BG}.$$

ΔAHD và ΔGMB đồng dạng (c.g.c) suy ra $\widehat{AHD} = \widehat{GMB}$. Do đó $\widehat{HAB} = \widehat{GMB}$, vậy MG // AH.

252. (h.143) ΔABC và ΔAKE đồng dạng (g.g) $\Rightarrow$ $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AK}$, do đó ΔBAK và ΔCAE đồng dạng (c.g.c).

Tương tự ΔDKE và ΔCAE đồng dạng. Suy ra ΔBAK và ΔDKE đồng dạng. Tỉ số đồng dạng bằng



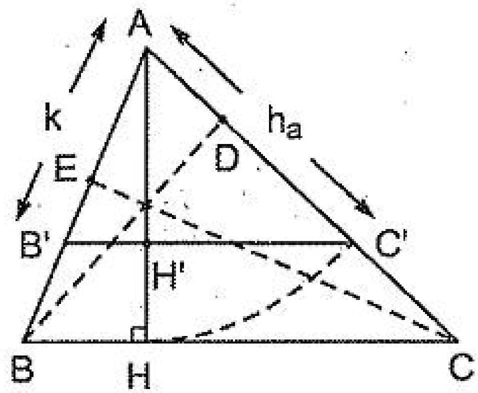
Hình 143

$\frac{AK}{KE} = 1$ nên $\Delta BAK = \Delta DKE \Rightarrow BC = DK$. Tương tự $CD = BK$. Vậy BCDK là hình bình hành.

253. (h.144).

Phân tích. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của ΔABC phải dựng. Ta có $ah_a = bh_b = ch_c$.

Chia cho $h_a h_b$ được $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}$. Do đó ba cạnh a, b, c tỉ lệ với h_a, h_b, $\frac{h_a h_b}{h_c}$.



Hình 144

Biết h_a, h_b, h_c ta dựng được $k = \frac{h_a h_b}{h_c}$ (dựng đoạn tỉ lệ thứ tư). Do đó ta dựng được một tam giác đồng dạng với tam giác phải dựng.

Cách dựng. Dựng AB'C' có $AB' = k$, $AC' = h_a$, $B'C' = h_b$.

Dựng đường cao AH'. Trên tia AH' đặt $AH = h_a$. Qua H dựng đường thẳng song song với B'C', cắt AB', AC' ở B, C, ta được ΔABC cần dựng.

Chứng minh. Gọi BD, CE là các đường cao của ΔABC. Ta sẽ chứng minh rằng $BD = h_b, CE = h_c$.

Tỉ số hai đường cao bằng tỉ số nghịch đảo của hai cạnh tương ứng nên

$$\frac{AH}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{BD} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

Ta lại có
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{B'C'} = \frac{h_a}{h_b} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\frac{h_a}{BD} = \frac{h_a}{h_b}$ nên $BD = h_b$.

Tương tự như trên, ta có

$$\frac{AH}{CE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{h_a}{CE} = \frac{AB}{BC} \quad (3)$$

Ta lại có

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'} = \frac{h_a h_b : h_c}{h_b} = \frac{h_a}{h_c} \tag{4}$$

Từ (3, (4) suy ra $\frac{h_a}{CE} = \frac{h_a}{h_c}$ nên CE = h_c.

Biện luận. Bài toán có một nghiệm hình ⇔ dựng được ΔAB'C' ⇔

$$|h_a - h_b| < \frac{h_a h_b}{h_c} < h_a + h_b \Leftrightarrow \left|\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_a}\right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_a}$$

Chú ý : Sẽ không chính xác nếu dựng ΔA'B'C' như sau :

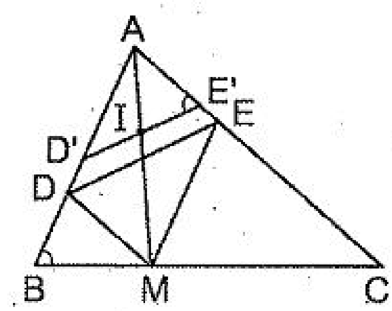
– Dựng tam giác có độ dài ba cạnh bằng h_a, h_b, h_c.

– Dựng ΔA'B'C' có độ dài ba cạnh là chiều cao của tam giác trên.

– ΔA'B'C' đồng dạng với tam giác phải dựng.

Sai lầm của cách dựng này là ngay trong bước dựng thứ nhất đã đòi hỏi trong ba đoạn thẳng h_a, h_b, h_c, mỗi đoạn phải nhỏ hơn tổng của hai đoạn kia, trong khi điều kiện đó không nhất thiết phải có. Chẳng hạn, một tam giác cân có cạnh đáy a, cạnh bên b trong đó a : b = 1 : 5 thì $h_a : h_b = 5 : 1$ do đó $h_a : h_b : h_c = 5 : 1 : 1$, tam giác này có $h_a > h_b + h_c$.

254. (h.145). Chú ý rằng ΔMDE = ΔAED nên cần dựng ΔAED đồng dạng với ΔABC. Dựng E' bất kì thuộc AC. Dựng D' thuộc AB sao cho $\widehat{AE'D'} = \widehat{B}$. Gọi I là trung điểm của D'E', giao điểm của AI và BC cho ta điểm M.



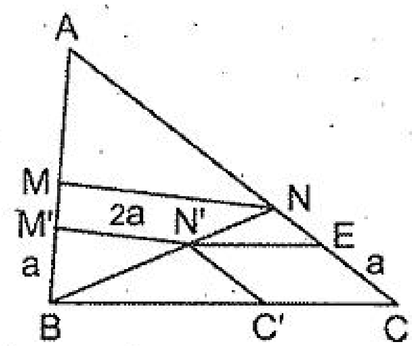
Hình 145

255. (h.146). Lấy N' bất kì thuộc BN, kẻ N'M' // NM, N'C' // NC.

Ta có :

$$\frac{BM'}{BM} = \frac{M'N'}{MN} = \frac{BN'}{BN} = \frac{N'C'}{NC}$$

$$\Rightarrow BM' : M'N' : N'C' = BM : MN : NC$$
$$= 1 : 2 : 1.$$



Hình 146

Từ đó suy ra cách dựng : Trước hết dựng tứ giác BM'N'C' biết ba cạnh và hai góc kề với cạnh thứ tư : BM' = a, M'N' = 2a, N'C' = a (a là một độ dài tùy ý), $\widehat{M'BC'} = \widehat{ABC}$, $\widehat{N'C'B} = \widehat{ACB}$, cách dựng được thể hiện trên hình 146. BN' cắt AC ở N. Dựng NM // N'M'.

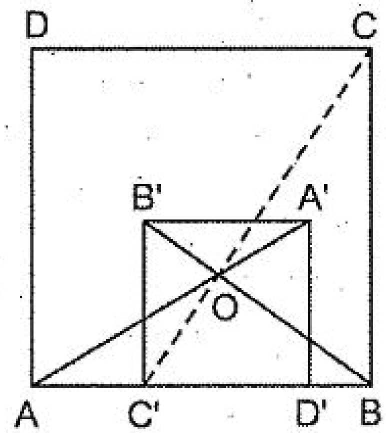
256. (h.147). Gọi O là giao điểm của AA' và BB'. Ta sẽ chứng minh rằng các đường thẳng CC', DD' cũng đi qua O. Thật vậy :

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Do đó ΔOB'C' và ΔOBC đồng dạng (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{B'OC'} = \widehat{BOC}.$$

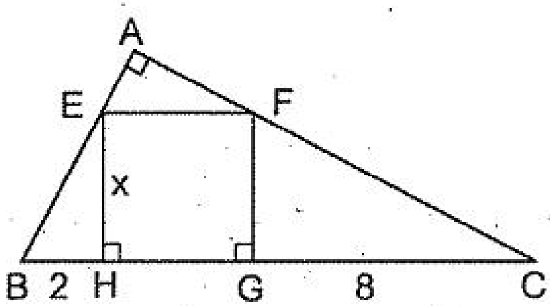
Từ đó C, O, C' thẳng hàng. Tương tự D, O, D' thẳng hàng.



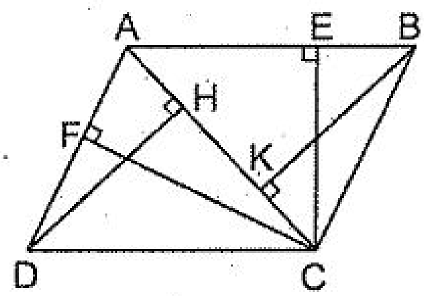
Hình 147

§17. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

257. (h.148) ΔEHB và ΔCGF đồng dạng (g.g). *Đáp số :* 4cm.



Hình 148



Hình 149

258. (h.149) Từ ΔADH và ΔACF đồng dạng (g.g) suy ra được

$$AD.AF = AC.AH \qquad (1)$$

Từ ΔACE và ΔABK đồng dạng (g.g) suy ra được

$$AB.AE = AC.AK \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

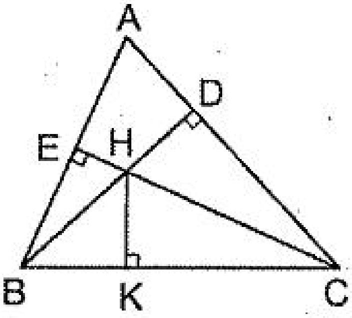
$$AD.AF + AB.AE = AC(AH + AK) = AC^2.$$

259. (h.150) Kẻ HK $\perp$ BC. Từ các tam giác đồng dạng, ta chứng minh được

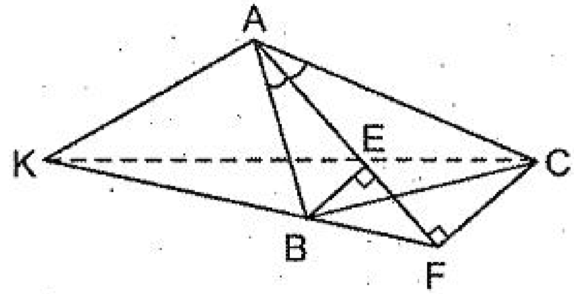
$$BH.BD = BK.BC \qquad (1)$$

$$CH.CE = CK.CB \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) ta được đẳng thức cần chứng minh.



Hình 150

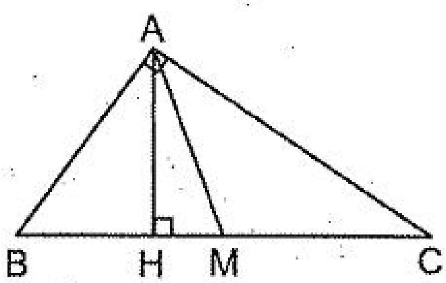


Hình 151

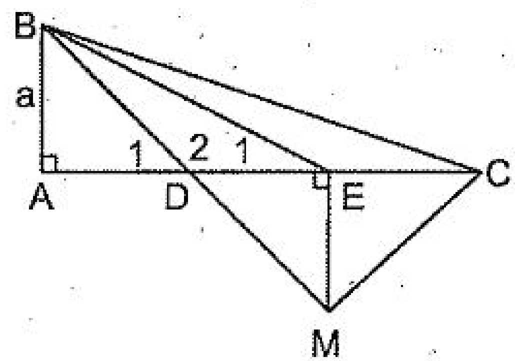
260. (h.151) $\dfrac{KB}{KF} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AE}{AF}$ (chú ý rằng ΔABE và ΔACF đồng dạng) $\Rightarrow$ $AK \,//\, BE \Rightarrow AK \perp AE$.

261. (h.152) Đặt AH = 12k, AM = 13k thì HM = 5k, CH = 18k (giả sử AB < AC).

Ta có ΔAHB và ΔCHA đồng dạng nên $\dfrac{AB}{CA} = \dfrac{HA}{HC} = \dfrac{12k}{18k} = \dfrac{2}{3}$.



Hình 152



Hình 153

262. (h.153)

Cách 1. Vẽ M đối xứng với B qua D, ΔEAB và ΔBMC đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{MBC}$.

Do đó $$\widehat{E}_1 + \widehat{C} = \widehat{MBC} + \widehat{C} = \widehat{D}_1 = 45^o.$$

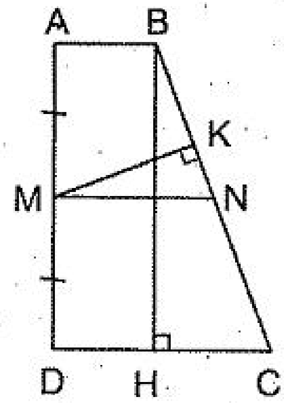
Cách 2. Đặt AB = AD = DE = EC = a thì

$$BD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = 2a.a = CD.ED \Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BD}{ED},$$

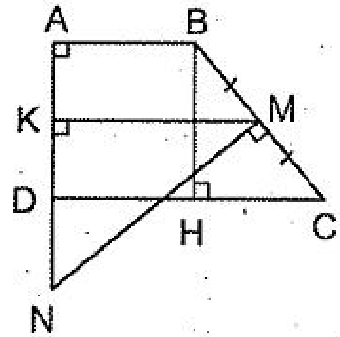
ΔCDB và ΔBDE đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{DBE}$.

Do đó $$\widehat{E}_1 + \widehat{C} = \widehat{E}_1 + \widehat{DBE} = \widehat{D}_1 = 45^o.$$

263. (h.154) *HD* : Vẽ BH ⊥ CD, MK ⊥ BC. ΔMKN và ΔBHC đồng dạng (g.g).



Hình 154



Hình 155

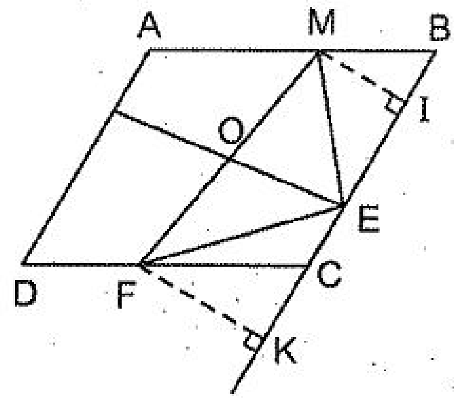
264. (h.155) Vẽ BH ⊥ CD, MK ⊥ AD, ΔMKN và ΔBHC đồng dạng (g.g) nên tính được MN = 12,5cm.

265. (h.156). Gọi M là giao điểm của FO và AB (O là tâm của hình bình hành).

Ta có $S_{OMBE} = S_{OFCE}$ mà $S_{MOE} = S_{FOE}$ nên $S_{MBE} = S_{FCE}$. Do đó

$$EB.MI = EC.FK \ (MI, FK \perp BC).$$

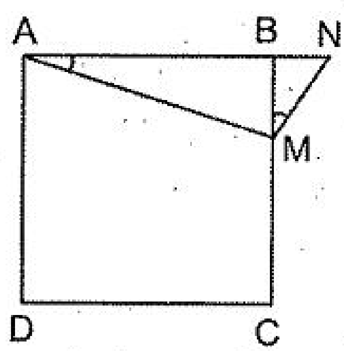
Vậy $$\frac{EB}{EC} = \frac{FK}{MI} = \frac{FC}{MB} = \frac{FC}{FD}.$$



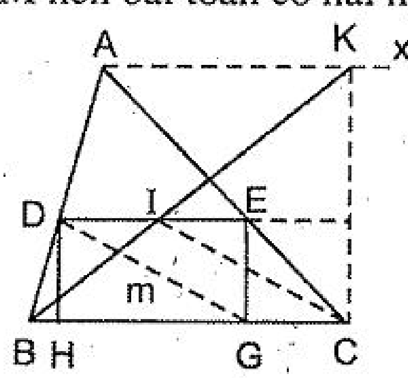
Hình 156

266. (h.157) Qua M vẽ đường vuông góc với AM, cắt AB ở N. Hãy chứng minh rằng $MN = \frac{1}{3}AM$, do đó dựng được điểm N.

Có hai cách lấy điểm N về hai phía của AM nên bài toán có hai nghiệm hình.



Hình 157



Hình 158

267. (h.158) a) ΔEGC ∽ ΔCKA (g.g)

$$\Rightarrow \frac{GC}{AK} = \frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{DI}{AK} \Rightarrow GC = DI.$$

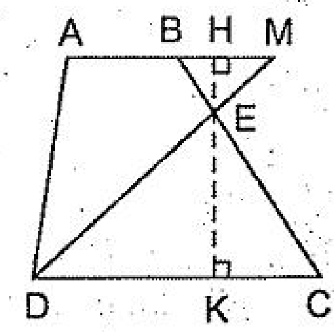
b) Suy ra DICG là hình bình hành ⇒ CI = DG = m. Dựng K rồi vẽ đường tròn (C ; m), cắt BK ở I.

Tuỳ theo số giao điểm của đường tròn với BK mà bài toán có 0, 1, 2 nghiệm hình.

§18. Tỉ số các đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

268. (h.159) Chú ý rằng

$$S_{ABD} : S_{ABCD} = \frac{8}{20} < \frac{1}{2}$$



Hình 159

nên M thuộc tia đối của tia BA. Gọi E là giao điểm của DM và BC, đặt $EH = h_1$, $EK = h_2$, $HK = h$ (EH là đường cao của ΔBEM, HK là đường cao của hình thang).

$$S_{DEC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{12h_2}{20h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h_2}{h} = \frac{5}{6}.$$

$\Delta BEM \backsim \Delta CED$

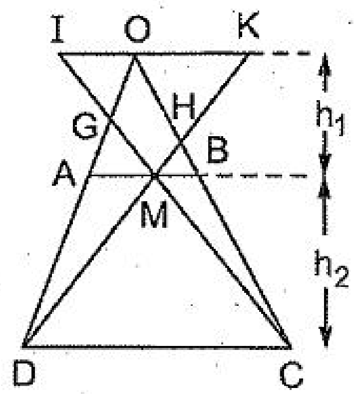
$$\Rightarrow \frac{BM}{CD} = \frac{EH}{EK} \Rightarrow \frac{BM}{12} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5}.$$

Vậy BM = 2,4cm.

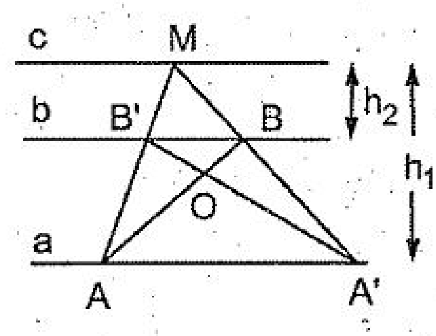
269. (h.160) Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt CM, DM thứ tự ở I, K. CI cắt OD ở G, DK cắt OC ở H.

Ta có $$\frac{OG}{GD} + \frac{OH}{HC} = \frac{OI}{CD} + \frac{OK}{CD} = \frac{IK}{CD}.$$

Tổng không đổi bằng $h_1 : h_2$ (h_1 là khoảng cách từ O đến AB, h_2 là chiều cao hình thang).



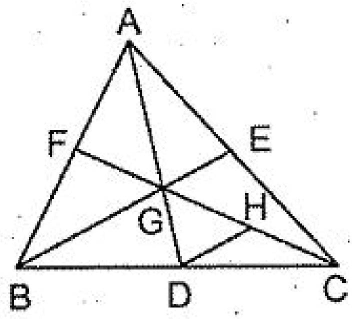
Hình 160



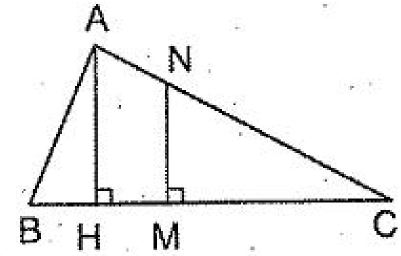
Hình 161

270. (h.161) Gọi giao điểm của A'B' với AB là O. Hãy chứng minh rằng O là điểm cố định (O chia trong đoạn thẳng AB theo tỉ số $\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{h_1}{h_2}$)

271. (h.162) Gọi G là trọng tâm của ΔABC, H là trung điểm của CG. Lấy S_{GDH} làm trung gian : $S' = 9S_{GDH}$ và $S = 12S_{GDH}$.



Hình 162

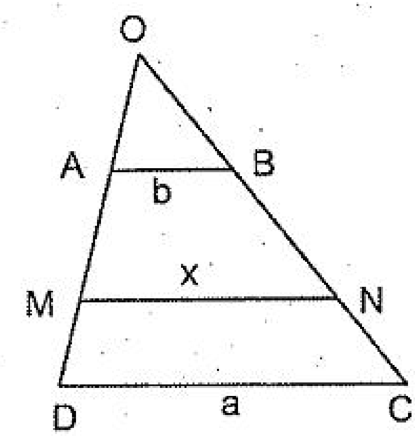


Hình 163

272. Kí hiệu như trên hình 163. $S_{NMC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{AHC} = \dfrac{8}{9}S_{ABC}$.

Ta tính được tỉ số diện tích các tam giác NMC và AHC, nên tính được tỉ số $\dfrac{NM}{AH}$. *Đáp số* : NM = 12cm.

273. (h.164) Gọi O là giao điểm của AD và BC.



Hình 164

Đặt $S_{ABNM} = S_{MNCD} = S$. Đặt $MN = x$

$\Delta OAB \backsim \Delta OMN$ nên $\dfrac{S_{OAB}}{S_{OMN}} = \left(\dfrac{b}{x}\right)^2$,

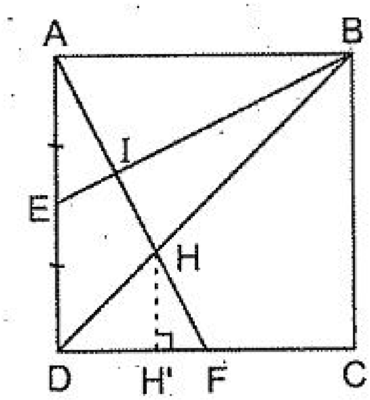
$\Delta ODC \backsim \Delta OMN$ nên $\dfrac{S_{ODC}}{S_{OMN}} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^2$.

Do đó

$$\frac{a^2 + b^2}{x^2} = \frac{S_{OCD} + S_{OAB}}{S_{OMN}} = \frac{(S_{OMN} + S) + (S_{OMN} - S)}{S_{OMN}} = 2.$$

Vậy $\qquad x^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

274. (h.165) Trước hết ta tính diện tích các tam giác AIE, DHF.



Hình 165

Dễ dàng chứng minh được $AF \perp BE$.

$\Delta AIE \backsim \Delta ADF$ nên

$$\frac{S_{AIE}}{S_{ADF}} = \frac{AE^2}{AF^2} = \frac{1}{5}.$$

Ta có $S_{ADF} = 1cm^2$ nên $S_{AIE} = \frac{1}{5}cm^2$.

ΔDHF và ΔBHA đồng dạng theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên ta tính được đường cao HH' của ΔDHF bằng $\frac{2}{3}$cm. Do đó $S_{DHF} = \frac{1}{3}cm^2$.

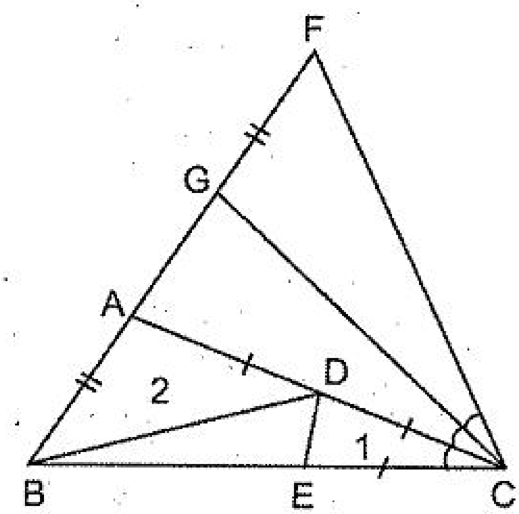
Từ đó ta tính được $S_{EIHD} = \frac{7}{15}cm^2$.

275. Gọi diện tích của tam giác nhỏ là x (cm^2), tỉ số đồng dạng của hai tam giác là k ($x, k \in \mathbf{N}$).

Ta có $\frac{x+18}{x} = k^2$ nên $\frac{18}{x} = k^2 - 1$ và $k^2 - 1$ là ước của 18. Từ đó tìm được $k = 2$, $x = 6$.

Diện tích của hai tam giác là $6cm^2$ và $24cm^2$.

276. (h.166) Vẽ tam giác đều BCF (F và A cùng phía đối với BC). Trên cạnh FB lấy G sao cho FG = AB. Ta có ΔACG cân có góc ở đỉnh bằng 20^o, $\Delta ABC = \Delta GFC$ (c.g.c).



Hình 166

Đặt $S_{ECD} = S_1$, $S_{ABD} = S_2$. Ta có ΔECD và ΔACG đồng dạng (g.g),

$$S_1 = \frac{1}{4}S_{ACG} \quad (1)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{GFC}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(S_{ACG} + S_{ABC} + S_{GFC})$$

$$= \frac{1}{4}S_{BFC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ (cm^2)$$

277. (h.167) Theo tính chất đường phân giác :

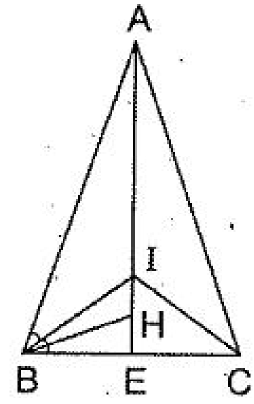
$$\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow \left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = \frac{AB^2}{BE^2} = \frac{AE^2 + BE^2}{BE^2} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 + 1 \quad (1)$$

ΔAEB và ΔBEH đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{S_{AEB}}{S_{BEH}} = \frac{AE}{HE} = 8. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\left(\frac{AI}{IE}\right)^2 = 8 + 1 = 9 \Rightarrow \frac{AI}{IE} = 3.$$



Hình 167

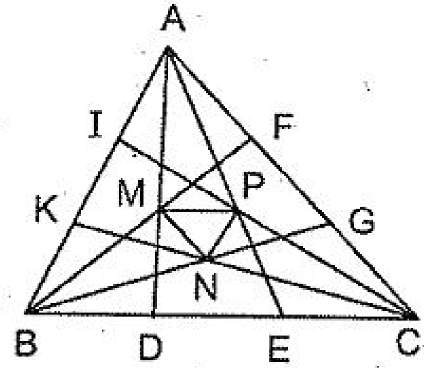
278. (h.168) a) Ta có

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AG}{AC} = \frac{2}{3} \text{ nên } KG \,//\, BC \text{ và } KG = \frac{2}{3}BC.$$

Do đó $NK = \frac{2}{3}NC$, suy ra $CN = \frac{3}{5}CK$.

Chứng minh tương tự, $CP = \frac{3}{5}CI$.

Suy ra $NP \,//\, IK$ và $NP = \frac{3}{5}IK$.



Hình 168

Chứng minh tương tự, $MP \,//\, BC$, $MN \,//\, AC$.

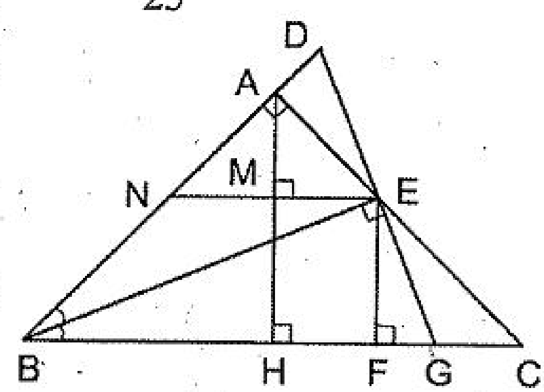
b) $NP = \frac{3}{5}IK = \frac{3}{5}.\frac{1}{3}AB = \frac{1}{5}AB$. Do đó $S_{MNP} = \frac{1}{25}S_{ABC}$.

279. (h.169) Kẻ $EN \,//\, BC$, cắt AH ở M, cắt AB ở N. Ta thấy ΔABC và ΔANE đồng dạng.

Trước hết ta tính S_{ANE}.

ΔBDG cân tại B. Do $NE \,//\, BG$ nên ΔNDE cân tại N.

Ta dễ dàng tính được



Hình 169

$$EN = 2EM = 2.20 = 40 \text{ (cm)}$$

Suy ra $NE = 40$cm, $NA = 25$ cm.

Ta có $AM^2 = AN^2 - NM^2 = 25^2 - 20^2 = 225$ nên $AM = 15$cm.

$$S_{ANE} = \frac{1}{2}NE.AM = \frac{1}{2}.40.15 = 300 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bây giờ ta tính tỉ số đồng dạng $\frac{AB}{AN}$ của ΔABC và ΔANE.

ΔBDG có DE = EG, EN // BC nên BN = ND = 40cm, do đó

$$AB = 25 + 40 = 65\ (cm),\ \frac{AB}{AN} = \frac{65}{25} = \frac{13}{5}.$$

$$S_{ABC} = S_{ANE} \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^2 = 300.\frac{169}{25} = 2028(cm^2).$$

§19. Ứng dụng thực tế của tam giác đồng dạng

280. *Đáp số* : 25m.

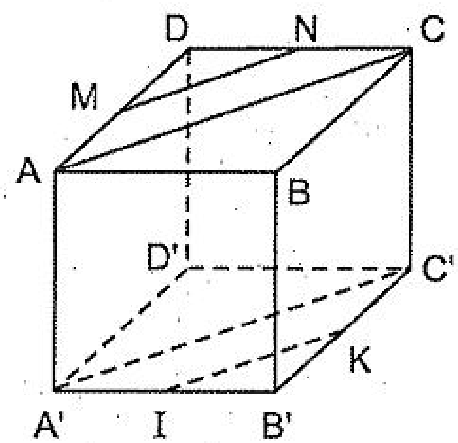
281. *Đáp số* : 2,7m.

Chương IV – HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH CHÓP ĐỀU

§20. Hình hộp chữ nhật

282. (h.170). Chứng minh rằng MN // AC // A'C' // IK.

283. (h.170). Ta tính được AC = 5cm, CC' = 12cm. Diện tích xung quanh : $168cm^2$, diện tích toàn phần : $192cm^2$.



Hình 170

284. Gọi a, b, c là các kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có :

$$\begin{cases} 4(a+b+c) = 140 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 21 \end{cases}$$

Diện tích toàn phần bằng :

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

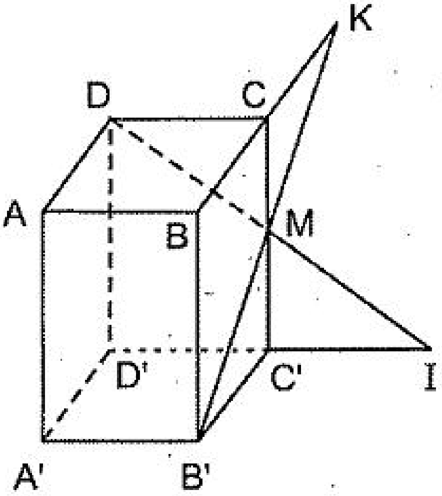
$$= 35^2 - 441 = 784(cm^2).$$

285. (h.171)

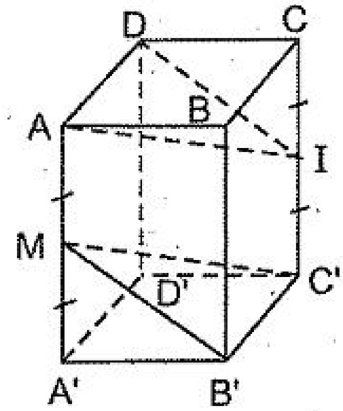
a) Giao tuyến là BB'.

b) DM cắt D'C' ở I, I là giao điểm phải tìm.

c) B'M cắt BC ở K, K là giao điểm phải tìm.



Hình 171

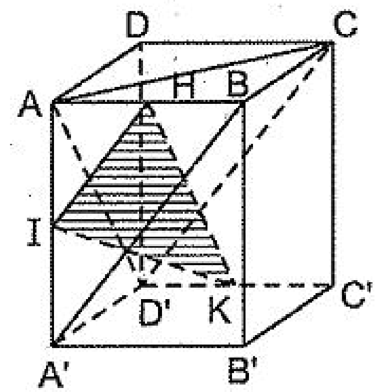


Hình 172

286. (h.172) AD // B'C' (vì cùng song song với BC) nên AD // mp (MB'C').

AMC'I là hình bình hành nên AI // MC', do đó AI // mp (MB'C').

Do đó mp (ADI) // mp (MB'C').



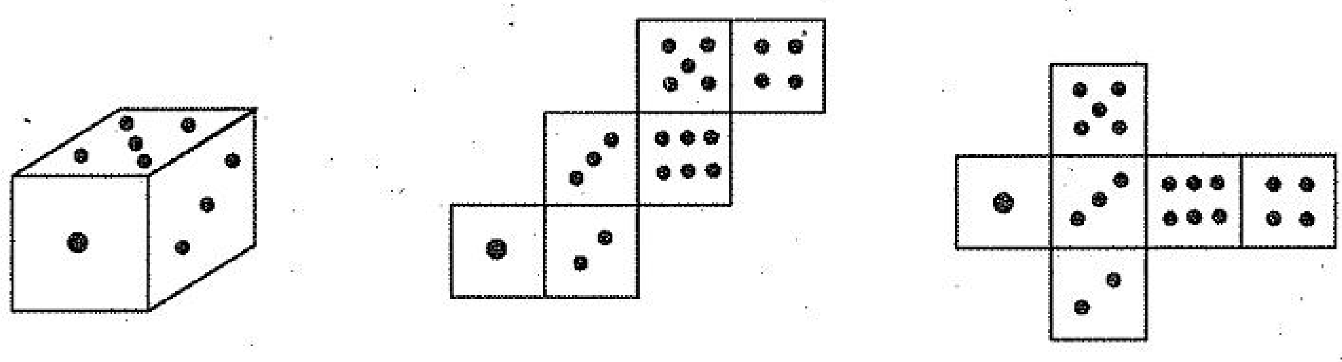
Hình 173

287. (h.173) HI // BA' // CD' $\Rightarrow$ HI // mp (ACD') (1)

HK // AD' $\Rightarrow$ HK // mp (ACD') (2)

Từ (1) và (2) suy ra mp (HIK) // mp (ACD').

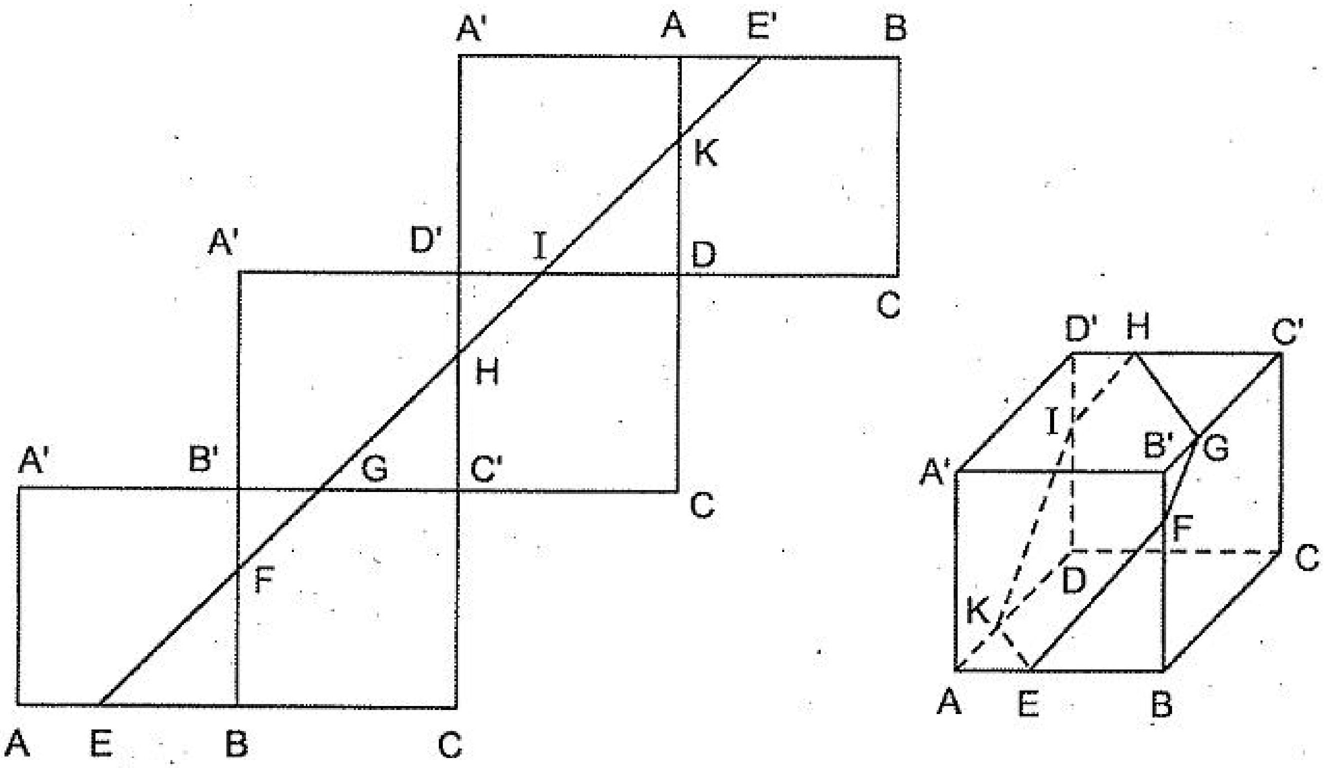
288. Xem hình 174. Giải tương tự ví dụ 46.



a) b) c)

Hình 174

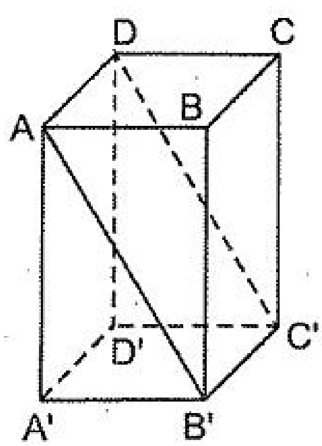
289. Trải sáu mặt của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' như trên hình 175a. Để đi theo đường ngắn nhất từ E đến E' (E thuộc cạnh AB của mặt ABB'A' và AE = $\frac{1}{3}$AB, E' thuộc cạnh AB của mặt ABCD) trên mặt khai triển, con nhện phải đi theo đoạn thẳng EE'. Đường đi của con nhện trong phòng là đường EFGHIKE trên hình 175b.



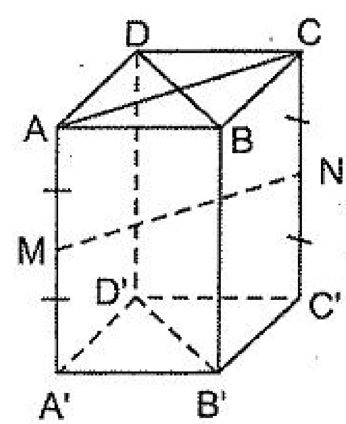
a) b)

Hình 175

290. (h.176) $S_{xq} = 4a^2\sqrt{3}$, $V = a^3\sqrt{3}$.



Hình 176



Hình 177

291. (h.177) AC = MN = 8cm, BD = 8cm, BB' = 10cm. *Đáp số* : $320cm^3$.

292. Ta thấy 36 : 3 = 12, 15 : 3 = 5, 16 : 3 = $5\frac{1}{3}$. Số hình lập phương cạnh 3cm nhiều nhất chứa trong hòm là : 12 . 5 . 5 = 300 (hình). Do đó câu trả lời B là đúng.

293. Gọi độ dài các cạnh đáy là a và b, chiều cao là c. Ta có $a + b = 9$ và $abc = 42$ nên a, b là ước của 42 và nhỏ hơn 9.

Các ước của 42 mà nhỏ hơn 9 là 1, 2, 3, 6, 7.

Nếu các cạnh đáy là 6 và 3 thì $c = \frac{42}{6.3}$ không là số tự nhiên.

Nếu các cạnh đáy là 7 và 2 thì $c = \frac{42}{7.2} = 3$. Vậy các cạnh của hình hộp chữ nhật là 7cm, 2cm, 3cm.

294. Hình lập phương có 8 đỉnh. Số đoạn thẳng có hai mút là hai điểm trong 8 đỉnh đó là : $\frac{8.7}{2} = 28$.

295. Lúc đầu, tổng tám số ở các đỉnh của hình lập phương là 5. Sau mỗi bước, tổng tăng thêm 2 đơn vị, nên tổng các số ở tám đỉnh luôn luôn là số lẻ, không thể chia hết cho 8. Do đó không thể xảy ra tám số bằng nhau.

296. Gọi sáu số ghi trên các mặt của hình lập phương là a, b, c, d, e, g, ta có $a + b + c + d + e + g = 21$. Gọi x là tổng phải tìm. Do hình lập phương có 8 đỉnh, mỗi đỉnh là tổng của ba số (trong sáu số trên) nên x là tổng của 24 số. Các số a, b, c, d, e, g có số lần xuất hiện như nhau trong tổng x nên mỗi số có mặt $24 : 6 = 4$ (lần).

Vậy $x = 4(a + b + c + d + e + g) = 4.21 = 84$.

297. Giải tương tự ví dụ 47. Số phải tìm ở các câu a, b, c, d theo thứ tự tương đương số hình lập phương nhỏ được sơn 0, 1, 2, 3 mặt.

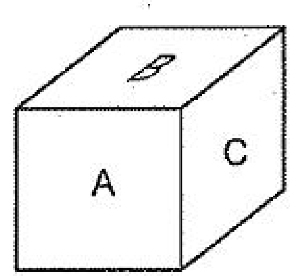
Đáp số : a) 27 ; b) 54 ; c) 36 ; d) 8.

298. Nếu ta lấy ra các hình lập phương đơn vị được sơn thì còn lại hình lập phương cạnh 3 chứa $3.3.3 = 27$ hình lập phương đơn vị không được sơn.

Số hình lập phương đơn vị có ít nhất một mặt được sơn là : $125 - 27 = 98$.

299. Ba mặt chung đỉnh phải sơn bởi ba màu khác nhau. Vậy số màu không thể ít hơn 3. Số màu là 3 khi ba mặt còn lại sơn cùng màu với mặt đối diện với nó. Vậy số màu ít nhất cần dùng là 3. Do đó câu trả lời D là đúng.

300. Ta nhìn thấy nhiều hình lập phương đơn vị nhất khi có ba mặt của hình lập phương lớn lộ ra (ba mặt A, B, C trên hình 178).



Hình 178

Giả sử ta bỏ đi các hình lập phương đơn vị được nhìn thấy : bỏ lớp ngoài của mặt A, lớp ngoài của mặt B, lớp ngoài của mặt C thì còn lại một hình lập phương cạnh 9, gồm 9.9.9 = 729 hình lập phương đơn vị.

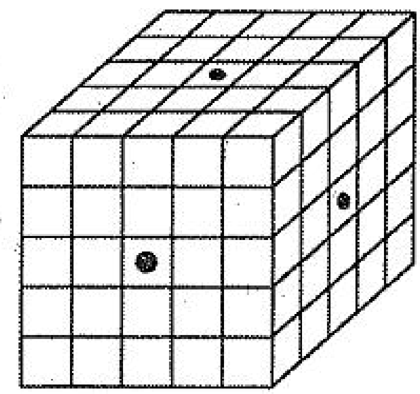
Các hình lập phương đơn vị này không nhìn thấy.

Như vậy số hình vuông đơn vị được nhìn thấy nhiều nhất là :

$$1000 - 729 = 271.$$

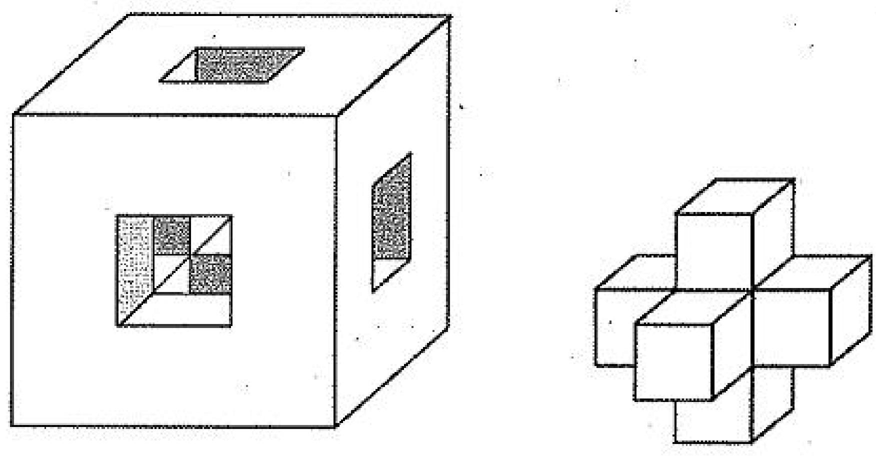
301. (h.179) Trong lần khoan thứ nhất có 5 hình lập phương đơn vị bị xuyên. Trong lần khoan thứ hai có thêm 4 hình lập phương đơn vị bị xuyên. Trong lần khoan thứ ba có thêm 4 hình lập phương đơn vị bị xuyên. Vậy tất cả có 13 hình lập phương đơn vị bị xuyên.

Nhận xét : Hình lập phương đơn vị nằm ở tâm của hình lập phương lớn bị xuyên ba lần.



Hình 179

302. (h.180) Tổng cộng phải đục bảy khối lập phương đơn vị (cạnh 1dm), gồm sáu khối ở sáu mặt và một khối ở chính giữa bên trong (xem h.180b).



a) b)

Hình 180

Diện tích toàn phần của khối gỗ lúc đầu : 3.3.6 = 54 (dm^2).

Sau khi đục một khối lập phương đơn vị ở mỗi mặt, mặt ngoài của khối gỗ giảm đi $1dm^2$, nhưng bên trong tăng thêm $5dm^2$. Do đó sau khi đục sáu khối ở sáu mặt thì diện tích của khối gỗ là :

$$54 + (5 - 1).\,6 = 78\ (dm^2).$$

Khi đục nốt khối lập phương đơn vị ở chính giữa, diện tích khối gỗ giảm đi $6dm^2$ (là diện tích toàn phần của khối lập phương đơn vị ấy).

Vậy diện tích toàn phần của khối gỗ còn lại là :

$$78 - 6 = 72 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

§21. Hình lăng trụ đứng

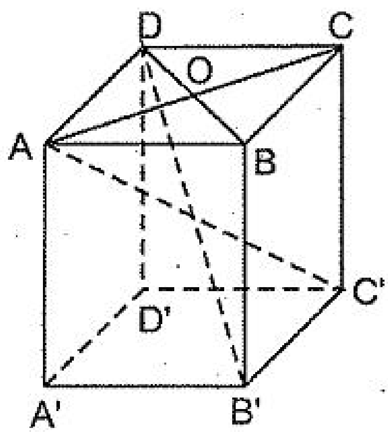
303. a) Với đa giác đáy có 100 cạnh, hình lăng trụ có 102 mặt, 200 đỉnh, 300 cạnh. Với đa giác đáy có n cạnh, hình lăng trụ có n + 2 mặt, 2n đỉnh, 3n cạnh ($n \geq 3$).

b) Suy ra từ câu a.

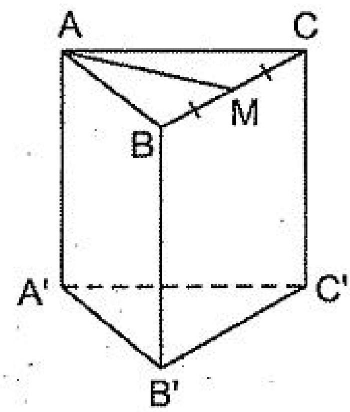
304. a) Gọi n là số cạnh của đa giác đáy. Số đỉnh của hình lăng trụ là 2n (với $n \geq 3$) nên không thể là 25, 17, 11, 4.

b) Gọi n là số cạnh của đa giác đáy. Số cạnh của hình lăng trụ là 3n (với $n \geq 3$) nên không thể là 20 , 32, 6.

305. (h.181). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta lần lượt tính được $AC^2 = 200$, $OA^2 = 50$, $BD^2 = 56$, $OB^2 = 14$, $AB^2 = 64$. *Đáp số* : AB = 8cm.



Hình 181



Hình 182

306. (h.182) a) $AB = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.   b) $S_{xq} = 2\sqrt{3}a^2$; $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

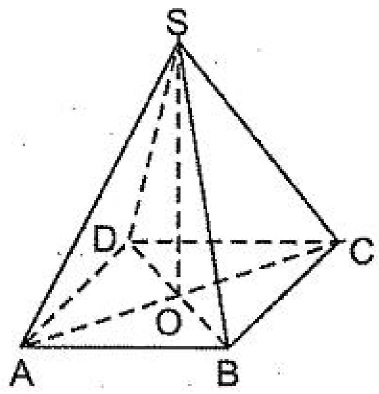
307. Gọi a là chiều dài của đáy chậu và x là chiều cao của mực nước phải tìm (đơn vị : dm). Khi thùng nước đặt nằm ngang thì khối nước là một hình hộp chữ nhật có thể tích 10ax (dm^3).

Khi thùng nước đặt nghiêng thì khối nước là một hình lăng trụ đứng, có chiều cao 10dm, đáy là một tam giác vuông có các cạnh góc vuông là 8dm và $\dfrac{3}{4}a$, thể tích bằng $\dfrac{1}{2}.8.\dfrac{3}{4}a.\ 10 = 30a$ (dm^3)

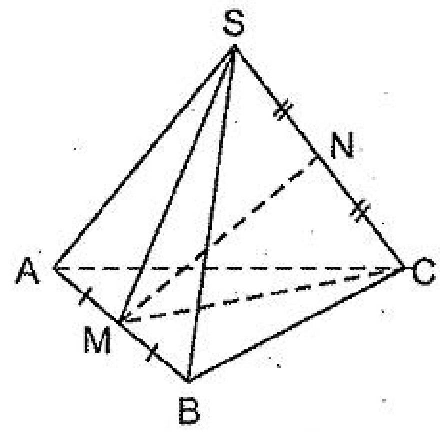
Từ 10ax = 30a, ta tính được x = 3 (dm).

§22. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

308. (h.183) Ta tính được $OA = \dfrac{20}{\sqrt{2}}$, $SA^2 = 300$, $SA = \sqrt{300}$ (cm)



Hình 183



Hình 184

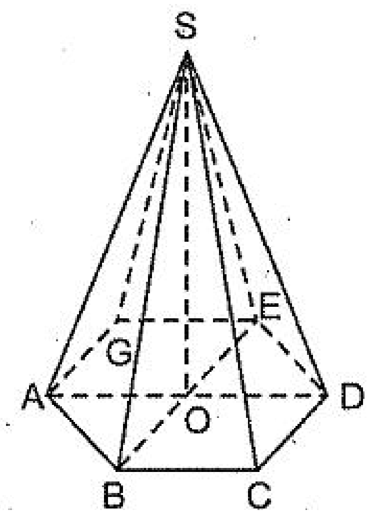
309. (h.184) Ta tính được

$$CM = \sqrt{3}, \quad MN^2 = MC^2 - NC^2 = 3 - 1 = 2.$$

Đáp số : $MN = \sqrt{2}$.

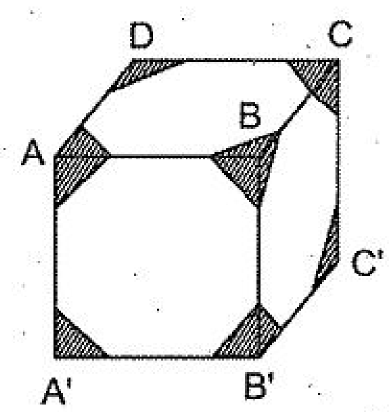
310. (h.185) Ta tính được

$$S = \frac{75}{2}\sqrt{3}, \; h = 12, \; V = 150\sqrt{3}\,(cm^3).$$

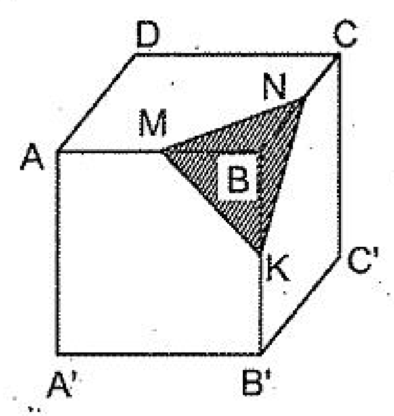


Hình 185

311. (h.186) Hình lập phương có 12 cạnh. Sau mỗi lần cưa, số cạnh tăng thêm 3 nên sau 8 lần cưa số cạnh tăng thêm 3.8 = 24. Số cạnh của phần gỗ còn lại là 12 + 24 = 36. Do đó D là câu trả lời đúng.



Hình 186

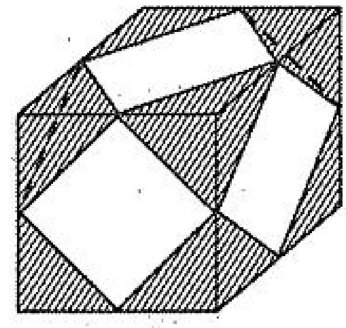


Hình 187

312. (h.187). a) *Đáp số* : $\dfrac{1}{6}$. Xem ví dụ 50.

b) Hình lập phương có 6 mặt, 8 đỉnh, 12 cạnh. Sau khi bị cưa, số mặt tăng 1, số đỉnh tăng 2, số cạnh tăng 3. Do đó phần gỗ còn lại có 7 mặt, 10 đỉnh, 15 cạnh.

313. (h.188) a) Phần gỗ còn lại có 14 mặt : 6 mặt là hình vuông và 8 mặt là tam giác đều.



Hình 188

Số đỉnh của phần gỗ còn lại là số đỉnh của 6 hình vuông, trong đó mỗi đỉnh được tính hai lần, nên số đỉnh là $\frac{4.6}{2} = 12$.

Số cạnh của phần gỗ còn lại là số cạnh của 6 hình vuông, nên số cạnh là $4 \,.\, 6 = 24$.

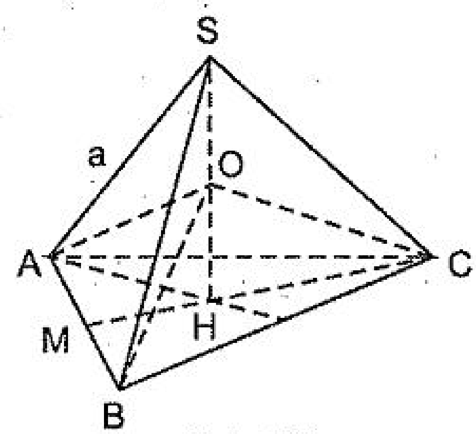
b) Gọi cạnh của hình lập phương là 2a, thể tích hình lập phương là $8a^3$.

Mỗi hình chóp ở mỗi góc có thể tích $\frac{a^3}{6}$.

Phần gỗ còn lại có thể tích : $8a^3 - 8 \,.\, \frac{a^3}{6} = \frac{20a^3}{3}$.

Tỉ số phải tìm là $\frac{20a^3}{3} : (8a^3) = \frac{5}{6}$.

314. (h.189). Gọi a là cạnh của hình chóp, M là trung điểm của AB. Lần lượt tính được :



Hình 189

$$CH = \frac{2}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SH = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

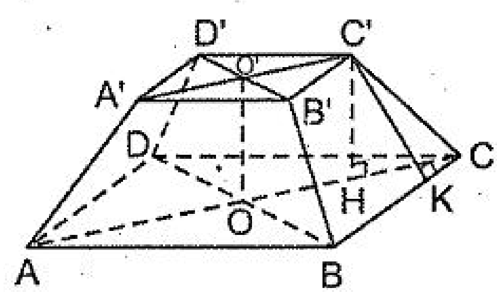
$$OC^2 = CH^2 + OH^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2}.$$

Tương tự $OB^2 = OA^2 = \frac{a^2}{2}$.

ΔBOC có $\quad OB^2 + OC^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = BC^2 \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ$.

Tương tự, $\widehat{AOB} = \widehat{COA} = 90^\circ$.

315. (h.190) a) Ta tính được



Hình 190

$$CK = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}, \; C'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) $S_{xq} = (4a + 2a).\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}a^2$.

c) $OC = \frac{2a}{\sqrt{2}}$, $O'C' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $HC = OC - O'C' = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$C'H^2 = C'C^2 - HC^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow C'H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O'O = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

316. (h.190) a) $S_{xq} = (4a + 2a).a = 6a^2$.

b) $CK = \frac{a}{2}$, $C'C^2 = C'K^2 + KC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow C'C = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

c) $OC = \frac{2a}{\sqrt{2}}$, $O'C' = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $HC = OC - O'C' = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

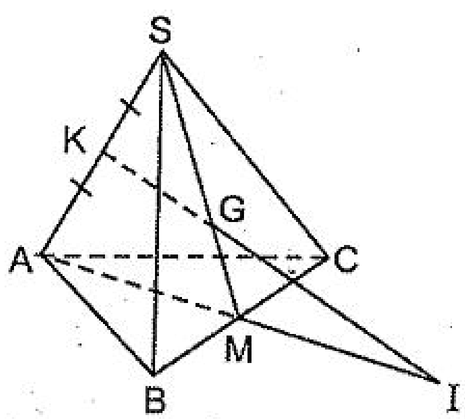
$$C'H^2 = C'C^2 - HC^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow C'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow O'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

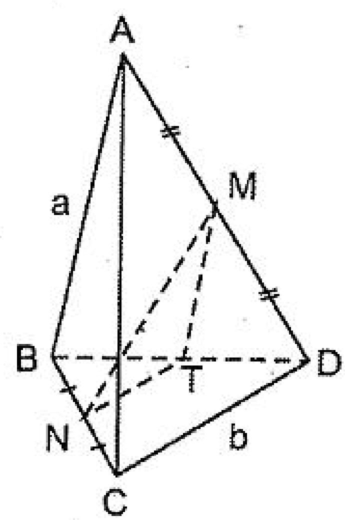
317. Gọi n là số cạnh của đa giác đáy của hình chóp. Số mặt của hình chóp là n + 1, số đỉnh là n + 1, số cạnh là 2n, do đó :

$$M + Đ - C = (n + 1) + (n + 1) - 2n = 2.$$

318. (h.191) Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của KG và AM. Đó là giao điểm của đường thẳng KG và mp (ABC).



Hình 191

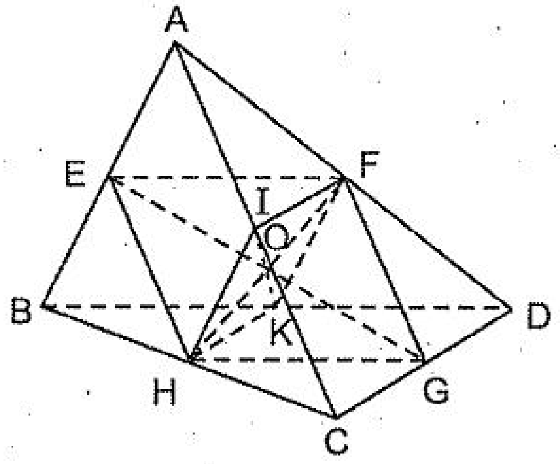


Hình 192

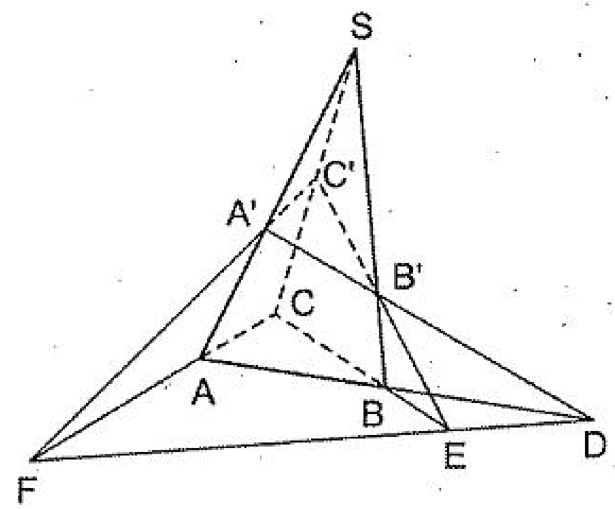
319. (h.192) Gọi T là trung điểm của BD. Xét ΔMTN :

$$MN \le MT + TN = \frac{a+b}{2}.$$ Dấu bằng không xảy ra.

320. (h.193) Kí hiệu như trên hình vẽ. Dễ dàng chứng minh EFGH là hình bình hành, gọi giao điểm hai đường chéo EG và FH là O. Ta thấy IFKH cũng là hình bình hành nên O cũng là trung điểm của IK.



Hình 193



Hình 194

321. (h.194)

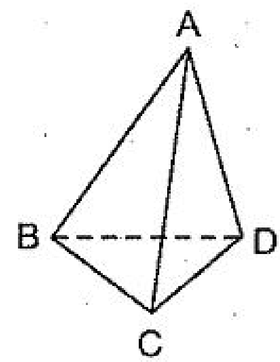
Điểm D ∈ AB mà AB nằm trong mp (ABC) nên D ∈ mp (ABC) (1)

Điểm D ∈ A'B' mà A'B' nằm trong mp (A'B'C') nên D ∈ mp (A'B'C') (2)

Từ (1) và (2) suy ra D thuộc giao tuyến của mp (ABC) và mp (A'B'C').

Chứng minh tương tự, E và F cũng thuộc giao tuyến của mp (ABC) và mp (A'B'C'). Vậy D, E, F thẳng hàng.

322. (h.195) Gọi AB là cạnh lớn nhất của hình chóp. Ta sẽ chứng minh rằng hoặc ba cạnh xuất phát từ A, hoặc ba cạnh xuất phát từ B thoả mãn bất đẳng thức tam giác.



Hình 195

Xét hai tam giác nhận AB làm cạnh :

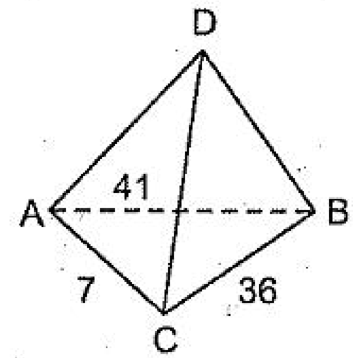
$$\Delta ABC : AC + BC > AB$$

$$\Delta ABD : AD + BD > AB.$$

Suy ra (AC + AD) + (BC + BD) > 2AB.

Tồn tại một trong hai tổng : AC + AD hoặc BC + BD lớn hơn AB.

323. (h.196) Xét cạnh có độ dài nhỏ nhất là 7. Hai cạnh ở cùng một mặt với cạnh đó phải có hiệu nhỏ hơn 7, chỉ có thể là : 13 và 18, hoặc 36 và 41. Giả sử AB = 41, BC = 36, AC = 7.



Hình 196

Khi đó CD, AD nhận các giá trị {13 ; 18}.

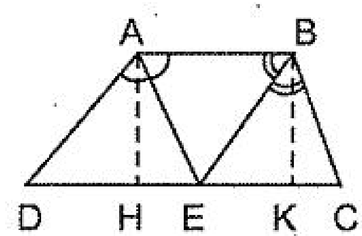
– Xét CD = 18. Khi đó AD = 13, BD = 27, ΔABD có AD + BD < AB, loại.

– Vậy CD = 13, AD = 18. Do đó cạnh đối diện với cạnh AB (có độ dài 41) là cạnh CD (có độ dài 13).

CHUYÊN ĐỀ

Tính các đại lượng hình học bằng cách lập phương trình

324. (h.197) AE, BE là các tia phân giác của các góc tù ($E \in DC$). Giả sử AE = 13cm, BE = 15cm. Vẽ $AH \perp CD$, $BK \perp CD$. Dễ dàng tính được EH = 5cm, EK = 9cm. Chú ý rằng ΔDAE cân tại D, đặt AD = DE = x thì DH = x – 5.



Hình 197

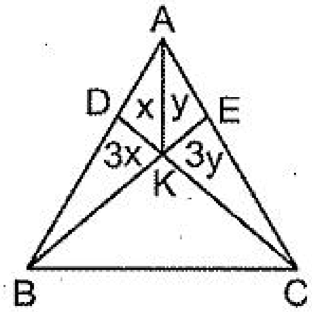
Giải phương trình

$$(x-5)^2 + 12^2 = x^2 \text{ được } x = 16{,}9 \text{ (cm)}.$$

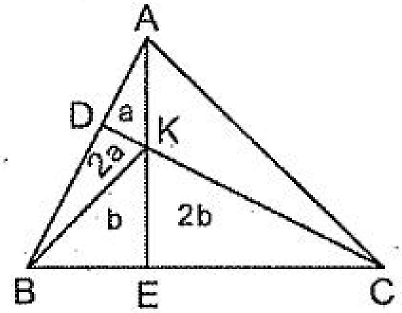
Tương tự, ta tính được BC = 12,5cm. Còn AB = 14cm, CD = 29,4cm.

325. (h.198) Gọi K là giao điểm của BE và CD. Đặt $S_{KAD} = x, S_{KAE} = y$.

Ta có $4x + y = \frac{1}{4}S$, $4y + x = \frac{1}{4}S$. Dễ dàng tính được $x + y = \frac{1}{10}S$.



Hình 198

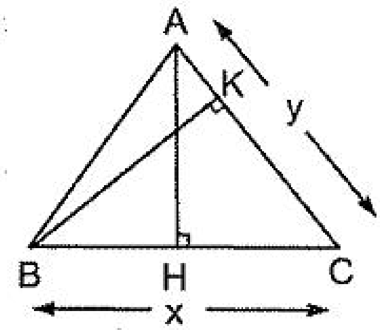


Hình 199

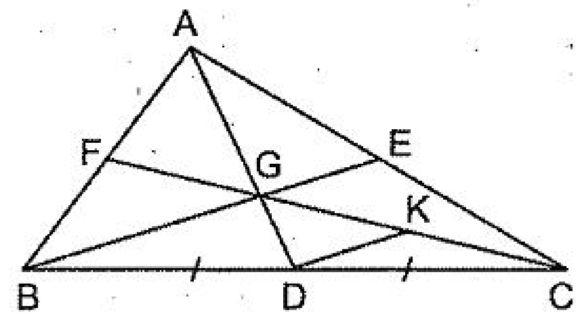
326. (h.199) Đặt $S_{KAD} = a$, $S_{KBE} = b$. Ta có $3a + b = \frac{1}{3}S$, $2a + 3b = \frac{2}{3}S$.

Ta tính được $b = \frac{4}{21}S$. Do đó $S_{BKC} = \frac{4}{7}S$.

327. (h.200) Gọi độ dài cạnh đáy của tam giác là x (cm), độ dài cạnh bên là y(cm). Ta có $10x = 12y$ và $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 10^2 = y^2$. Ta tìm được $x = 15$. Diện tích của tam giác bằng $75cm^2$.



Hình 200



Hình 201

328. (h.201) Xét ΔABC có trọng tâm G, đường trung tuyến AD. Gọi K là trung điểm của CG. Tam giác GDK có ba cạnh bằng 10, 17, 21 (đơn vị : cm). Ta tính được $S_{GDK} = 84cm^2$ (giải như ví dụ 53).

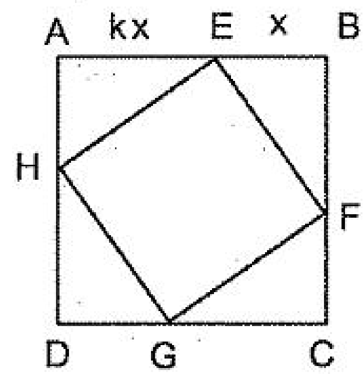
$S_{ABC} = 1008cm^2$.

329. (h.202) Đặt BE = CF = DG = AH = x thì

AE = BF = CG = DH = kx.

Ta có $AE^2 + AH^2 = EH^2 \Rightarrow (kx)^2 + x^2 = EH^2$.

Mặt khác $\frac{EH^2}{AB^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{(kx)^2 + x^2}{(x + kx)^2} = \frac{5}{9}$.



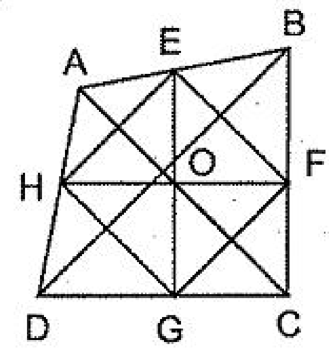
Hình 202

Biến đổi phương trình được

$$\frac{k^2 + 1}{(1 + k)^2} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow (2k - 1)(k - 2) = 0.$$

Vậy $k_1 = 2$; $k_2 = \frac{1}{2}$.

330. (h.203) Ta tính diện tích hình thoi EFGH có $EF = \frac{a}{2}$, tổng hai đường chéo bằng b. Đặt OE = x, OF = y. Ta có $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, $x + y = \frac{b}{2}$. Ta tính được :



Hình 203

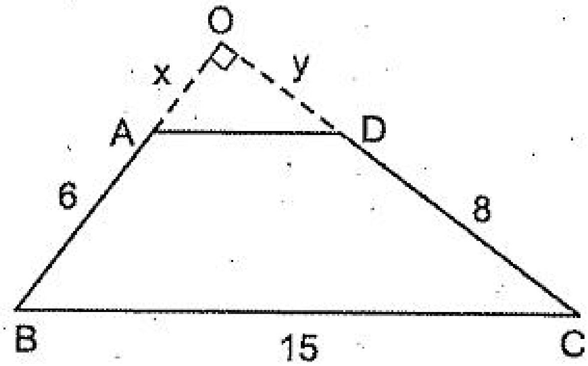
$$2xy = \frac{b^2 - a^2}{4}.$$

Đáp số : $S_{ABCD} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$

331. (h.204) *Cách 1*. Kí hiệu như trên hình vẽ.

Xét các tam giác vuông OAD và OBC :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 & (1) \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = 225 & (2) \end{cases}$$



Hình 204

Rút gọn (2) và chú ý rằng $x^2 + y^2 = 25$, ta được

$$6x + 8y = 50 \qquad (3)$$

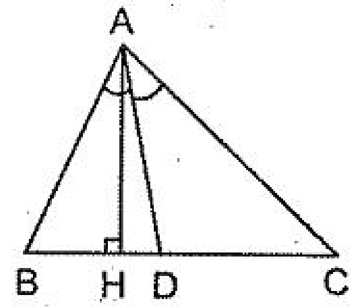
Từ (1) và (3) :

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 3, y = 4.$$

Đáp số : $48cm^2$.

Cách 2. Vẽ hình bình hành ADCK. Chứng minh rằng BK + KC = BC, suy ra K nằm giữa B và C, ABCD là hình thang. *Đáp số* : $48cm^2$.

332. (h.205)



Hình 205

Cách 1. Kẻ AH ⊥ BC, ta tính được BD = 8cm, BH = 6,75cm, HD = 1,25cm. Ta có

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = AH^2 + 1{,}25^2 \qquad (1)$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 12^2 - 6{,}75^2 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$AD^2 = 12^2 - 6{,}75^2 + 1{,}25^2 = 100 \Rightarrow AD = 10cm.$$

Cách 2. Theo tính chất đường phân giác ta tính được BD = 8cm. Chú ý rằng $\frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC}$ nên ΔABC và ΔDBA đồng dạng (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{15}{DA} \Rightarrow DA = 10cm.$$

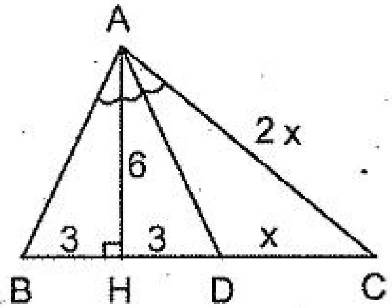
333. Giả sử HB < HC (h.206). Gọi AD là đường phân giác của ΔHAC. Ta có

$$\frac{DH}{DC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{3}{DC} = \frac{6}{AC}.$$

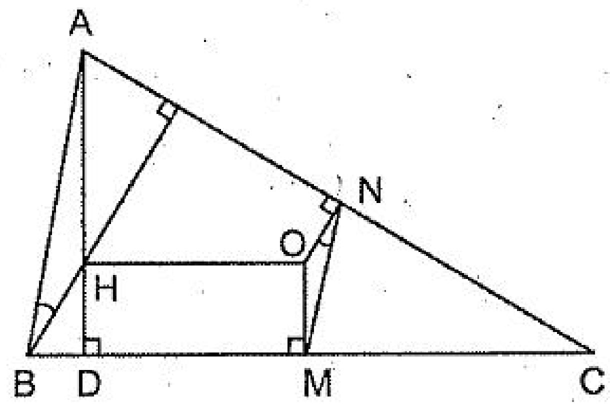
Đặt DC = x thì AC = 2x. Ta có $AH^2 + HC^2 = AC^2$ nên

$$6^2 + (3+x)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ (loại) ; } x_2 = 5.$$

Đáp số : $33cm^2$.



Hình 206



Hình 207

334. (h.207) ΔOMN và ΔHAB đồng dạng (g.g)

$$\Rightarrow \frac{OM}{HA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 2MO = 10.$$

Đặt DC = x, DB = y. ΔBDH và ΔADC đồng dạng (g.g)

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{5}{x} \Rightarrow xy = 75.$$

Ta có $\quad x - y = (DM + MC) - (BM - DM) = 2DM = 22.$

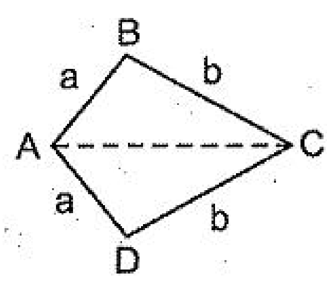
Do đó $\quad (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 22^2 + 4.75 = 784.$

Suy ra x + y = 28. Vậy BC = 28cm.

Toán cực trị hình học

335. (h.208) $S_{ABCD} = 2S_{ABC} \le ab$,

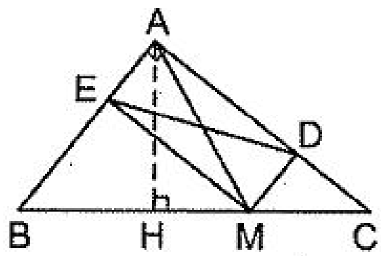
max $S_{ABCD} = ab \Leftrightarrow AB \perp BC$. Khi đó $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^o$.



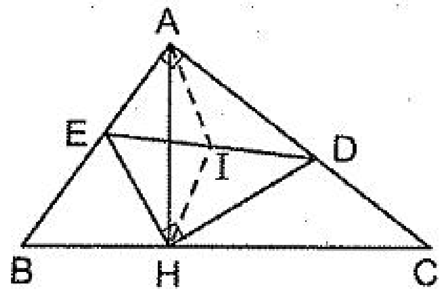
Hình 208

336. Hình vuông có diện tích lớn nhất, bằng $\dfrac{d^2}{2}$.

337. (h.209) DE = AM ≥ AH (AH là đường cao của ΔABC). Vậy DE nhỏ nhất ⇔ AM nhỏ nhất ⇔ M trùng với H.



Hình 209



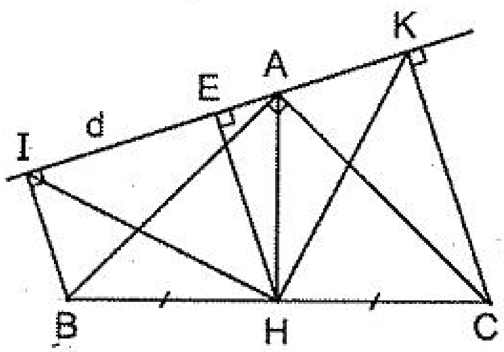
Hình 210

338. (h.210) Gọi I là trung điểm của DE.

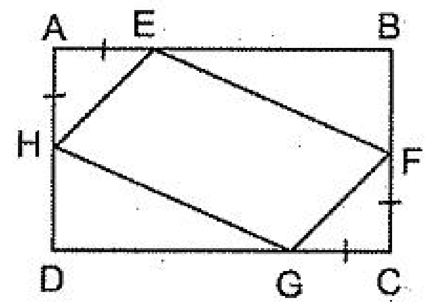
DE = IA + IH ≥ AH. Vậy min DE = AH ⇔ I thuộc đoạn thẳng AH ⇔ HD ⊥ AC và HE ⊥ AB.

339. (h.211). Chứng minh rằng ΔHIK vuông cân tại H. Gọi HE là đường cao của ΔHIK thì $S_{HIK} = HE^2 \leq HA^2$. Do đó

$$\max(S_{HIK}) = a^2 \Leftrightarrow E \text{ trùng } A \Leftrightarrow d \perp AH.$$



Hình 211



Hình 212

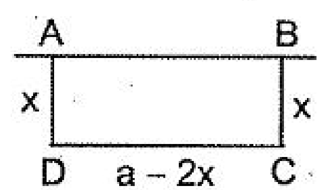
340. (h.212). a) Gọi S' là tổng các diện tích của bốn tam giác vuông có đỉnh A, B, C, D. Ta có S_{EFGH} lớn nhất ⇔ S' nhỏ nhất.

Đặt AE = AH = CF = CG = x. Biểu thị S' theo x rồi tìm giá trị nhỏ nhất của nó. *Đáp số* : 450 cm^2.

b) *Đáp số* : $(a + b)^2 : 8$, khi đó $x = (a + b) : 4$.

341. (h.213) Gọi a là chiều dài đoạn dây, x là độ dài các cạnh của hình chữ nhật mà vuông góc với tường. Ta có

$$S_{ABCD} = x(a - 2x) \text{ nên } 2S = 2x(a - 2x).$$



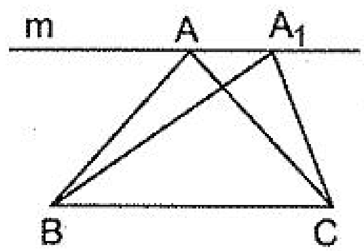
Hình 213

Hai số 2x và a – 2x có tổng không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi 2x = a – 2x, tức là $x = \frac{a}{4}$. Như vậy cần căng dây để tạo thành hình chữ nhật mà các cạnh vuông góc với tường bằng $\frac{1}{4}$ chiều dài đoạn dây, còn cạnh song song với tường bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài đoạn dây.

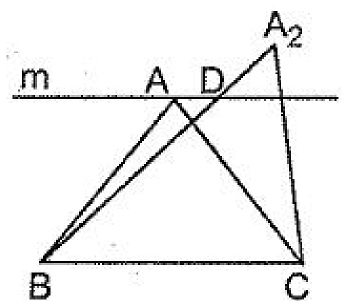
342. M là tâm của lục giác đều.

343. Xét ΔABC cân tại A và $\Delta A'BC$ bất kì không cân ở A' có cùng chu vi. Qua A vẽ đường thẳng m // BC. Xét về một phía của BC :

Nếu A' ở vị trí A_1 thuộc m (h.214) thì $S_{A_1BC} = S_{ABC}$, theo Ví dụ 58, chu vi $\Delta A_1BC >$ chu vi ΔABC, trái với giả thiết.



Hình 214



Hình 215

Nếu A' ở vị trí A_2 nằm ngoài dải tạo bởi m và BC (h.215) đoạn thẳng A_2B cắt m ở D. Ta có chu vi $\Delta A_2BC >$ chu vi $\Delta DBC \geq$ chu vi ΔABC, trái với giả thiết.

Vậy A' phải nằm trong dải tạo bởi m và BC, do đó $S_{A'BC} < S_{ABC}$.

344. Gọi x, y là các kích thước của hình chữ nhật. Dùng bất đẳng thức

$$(x + y)^2 \geq 4xy.$$

a) Chu vi hình chữ nhật không đổi nên x + y là hằng số, khi đó xy lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$. Vậy hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Diện tích hình chữ nhật không đổi nên xy là hằng số, khi đó x + y nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$. Vậy hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

345. Xét hình thoi cạnh a và hình vuông cạnh a. Gọi h là đường cao của hình thoi, ta có $h \leq a \Rightarrow ah \leq a^2$. Diện tích hình thoi nhỏ hơn hoặc bằng diện tích hình vuông. Vậy trong các hình thoi có cùng chu vi, hình vuông có diện tích lớn nhất.

346. Xét hình thoi cạnh a đường cao h và hình vuông cạnh b, trong đó $ah = b^2$. Ta có $h \le a \Rightarrow ah \le a^2$. Suy ra $b^2 \le a^2$ nên $b \le a$. Chu vi hình thoi lớn hơn hoặc bằng chu vi hình vuông. Vậy trong các hình thoi cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

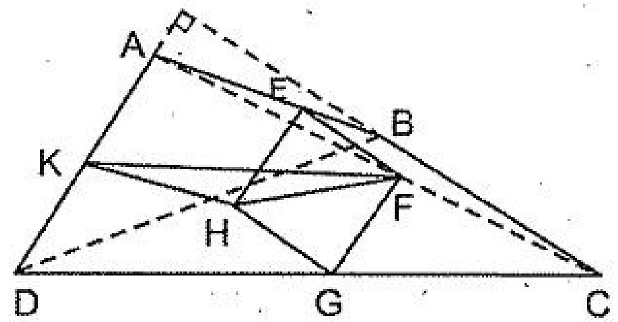
347. a) Gọi a, b, c, d là độ dài các cạnh của tứ giác có chu vi C không đổi. Theo kết quả của bài 129b (tập một) ta có $16S \le (a + b + c + d)^2$. Do chu vi tứ giác không đổi nên tứ giác có diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{C^2}{16}$. Khi đó tứ giác là hình vuông.

b) Sử dụng kết quả bài 129b (tập một).

348. (h.216) Tứ giác EFGH là hình vuông có đường chéo HF. Gọi K là trung điểm của AD, ta có

$$HF \ge KF - KH = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$$

Gọi S là diện tích hình vuông EFGH, ta có



Hình 216

$$S = \frac{HF^2}{2} \ge \frac{(a-b)^2}{8}.$$

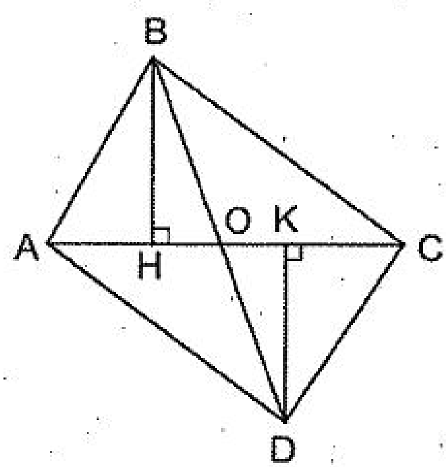
$\min S = \dfrac{(a-b)^2}{8} \Leftrightarrow$ K, H, F thẳng hàng $\Leftrightarrow$ AB // CD. Khi đó ABCD là hình thang cân có $\widehat{C} = \widehat{D} = 45^o$, CD = a, AB = b.

349. (h.217) Xét tứ giác ABCD có AC + BD = s. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH \le \frac{1}{2}AC.OB$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}AC.DK \le \frac{1}{2}AC.OD$$

suy ra $S_{ABCD} \le \dfrac{1}{2}AC(OB + OD) = \dfrac{1}{2}AC.BD$ (1)



Hình 217

Áp dụng bất đẳng thức $xy \le \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ ta có

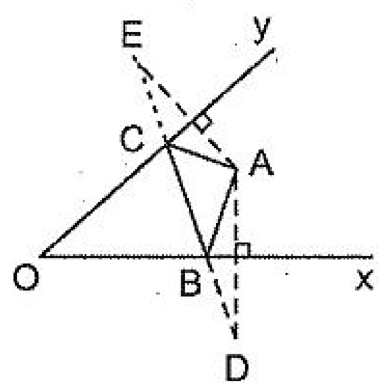
$$AC.BD \le \left(\frac{AC + BD}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} \le \frac{s^2}{8}$.

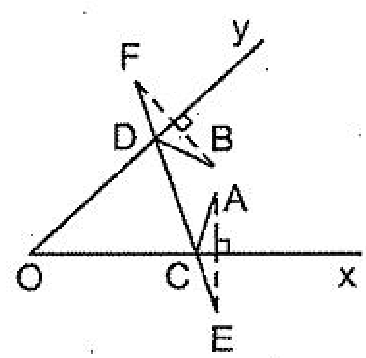
$$\max S = \frac{s^2}{8} \Leftrightarrow AC \perp BD \text{ và } AC = BD = \frac{s}{2}.$$

350. (h.218) Dựng D đối xứng với A qua Ox, dựng E đối xứng với A qua Oy. Đoạn thẳng DE cắt các tia Ox, Oy tại các điểm B, C.

Chú ý : Điều kiện $\widehat{xOy} < 90^o$ làm cho $\widehat{AOD} + \widehat{AOE} < 180^o$ nên tia OA nằm giữa hai tia OD, OE, do đó đoạn thẳng DE cắt hai tia Ox, Oy tại các điểm không trùng O.



Hình 218



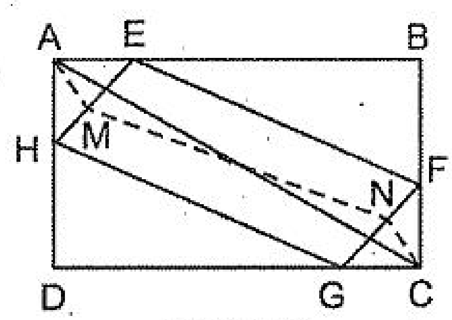
Hình 219

351. (h.219). Dựng E đối xứng với A qua Ox, dựng F đối xứng với B qua Oy. EF cắt Ox, Oy ở C, D.

352. (h.220). Gọi EFGH là tứ giác nội tiếp hình chữ nhật, M và N thứ tự là trung điểm của EH và FG. Ta có EH = 2AM, FG = 2NC nên

chu vi EFGH = 2AM + (EF + GH) + 2NC.

Ta lại có EF + HG ≥ 2MN (xảy ra dấu bằng ⇔ EF // MN // HG).



Hình 220

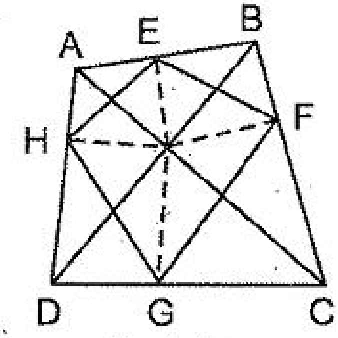
Do đó chu vi EFGH ≥ 2(AM + MN + NC) ≥ 2AC.

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC khi và chỉ khi A, M, N, C thẳng hàng và EF // HG // AC.

Khi đó EFGH là hình bình hành có các cạnh tương ứng song song với các đường chéo của hình chữ nhật (có vô số hình bình hành như vậy).

Chú ý : Nếu ABCD là tứ giác bất kì thì :

– Tứ giác ABCD phải có điều kiện $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$ và các góc tạo bởi đường chéo và các cạnh đều là góc nhọn thì mới tồn tại tứ giác nội tiếp có chu vi nhỏ nhất.

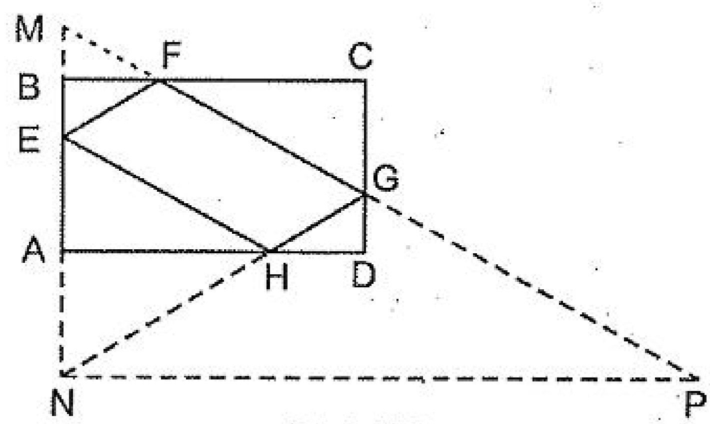


Hình 221

– Một trong các tứ giác nội tiếp có chu vi nhỏ nhất là tứ giác có đỉnh là chân các đường vuông góc kẻ từ giao điểm các đường chéo đến các cạnh của tứ giác ABCD (h.221). Có vô số các tứ giác nội tiếp có chu vi nhỏ nhất, chúng là các tứ giác có cạnh tương ứng song song với cạnh của tứ giác EFGH (hai cạnh kề của các tứ giác này tạo với cạnh tương ứng của tứ giác ABCD các góc bằng nhau).

353. (h.222) *Cách 1.* Theo bài 352, tứ giác EFHG có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD, từ đó suy ra cách dựng.

Cách 2. Dựng M đối xứng với E qua BC, dựng N đối xứng với E qua AD, dựng P đối xứng với N qua CD. Khi đó



Hình 222

$$\text{chu vi } EFGH = EF + FG + GH + HE = MF + FG + GH + HN$$

$$\geq MF + FG + GP \geq MP.$$

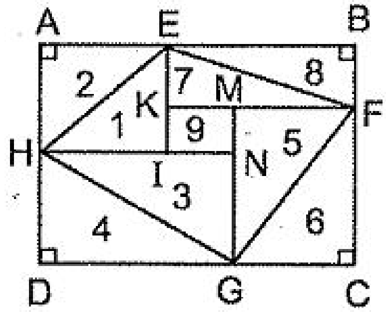
Do đó các điểm F, G phải dựng là giao điểm của MP và BC, CD, còn H là giao điểm của GN và AD.

354. Kí hiệu như trên hình 223. Ta có

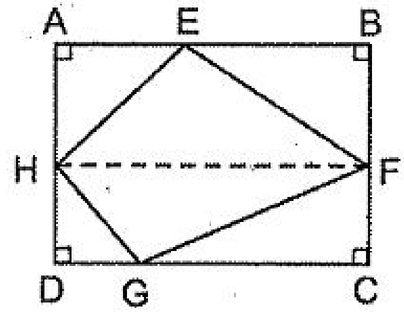
$$S_1 = S_2,\ S_3 = S_4,\ S_5 = S_6,\ S_7 = S_8 \text{ nên } S_{EFGH} \geq \frac{1}{2}S$$

$$\min S_{EFGH} = \frac{1}{2}S \Leftrightarrow S_9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} KM \equiv IN \\ KI \equiv MN \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} HF \,//\, AB \\ EG \,//\, AD \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ một đường chéo của tứ giác EFGH song song với một cạnh của hình chữ nhật ABCD (h.224)



Hình 223



Hình 224

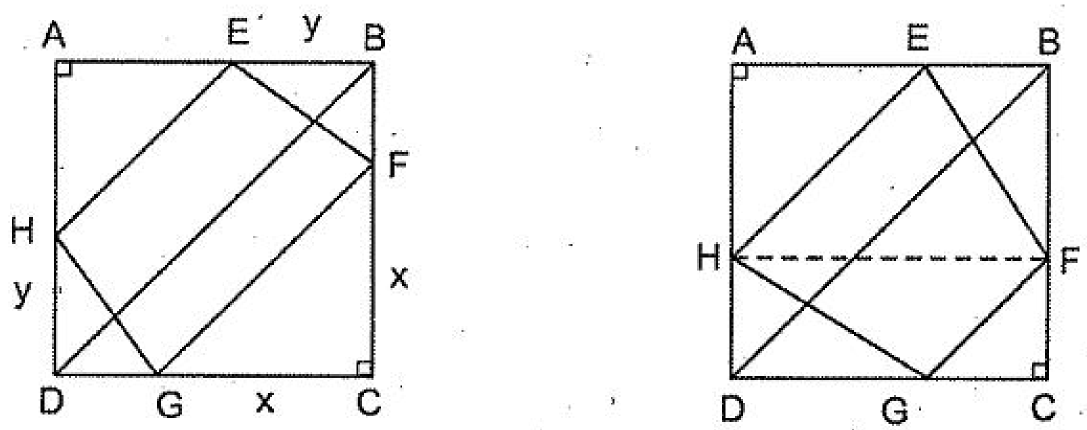
355. Kí hiệu như trên hình 225a). Đặt CF = x, DH = y.

$$S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH}$$

$$= a^2 - \frac{(a-y)^2}{2} - \frac{y(a-x)}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y(a-x)}{2}$$

$$= \frac{a^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{2} = \frac{a^2 - (x-y)^2}{2} \leq \frac{a^2}{2}.$$

$$\max\ S_{EFGH} = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow HF \mathbin{//} AB \text{ (khi đó } EG \mathbin{//} BC\text{) (h.225b)}$$



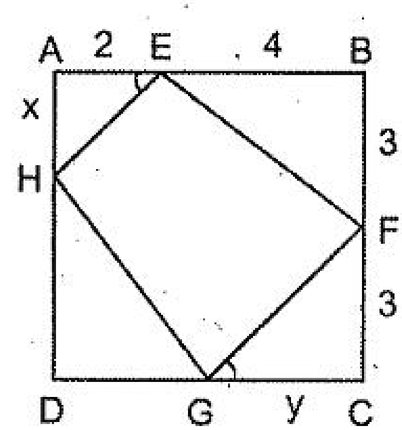
a) b)

Hình 225

356. a) (h.226) Đặt AH = x, CG = y. Ta thấy S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất. Đặt $S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH} = S$, ta có :

$2S = 2x + 3y + (6 - x)(6 - y) = xy - 4x - 3y + 36.$

Do ΔAEH và ΔCGF đồng dạng (g.g) nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF}$ tức là $\frac{2}{y} = \frac{x}{3}$ hay xy = 6.



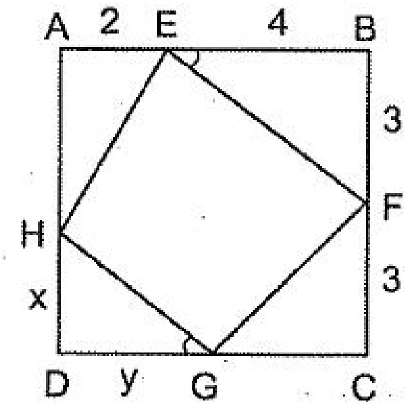
Hình 226

Do đó $2S = 42 - (4x + \frac{18}{x})$.

Ta có 2S lớn nhất $\Leftrightarrow 4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Hai số dương 4x và $\frac{18}{x}$ có tích không đổi nên $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4x = \frac{18}{x}$, khi đó $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm), $y = 2\sqrt{2}$ (cm).

b) (h.227) Đặt $S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH} = S$.



Hình 227

Ta thấy S_{EFGH} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S nhỏ nhất. Đặt DH = x, DG = y, ta tính được

$$2S = xy - 2x - 3y + 30 \text{ và } 4x = 3y.$$

Từ đó $2S = \frac{3y^2}{4} - \frac{9y}{2} + 30$. Ta tính được

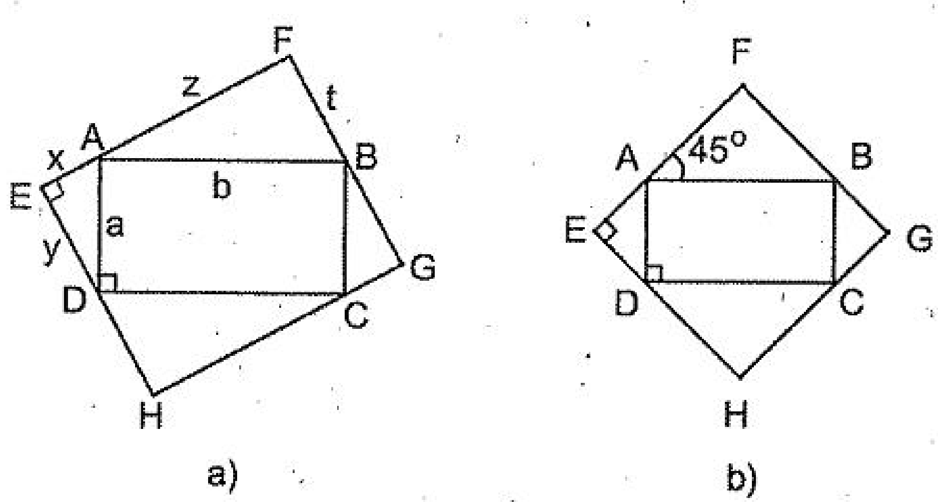
$$8S = 3(y-3)^2 + 93.$$

Ta có S_{EFGH} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S nhỏ nhất $\Leftrightarrow y = 3$ (cm), $x = 2\frac{1}{4}$ (cm).

357. Kí hiệu các độ dài x, y, z, t như trên hình 228a. Ta có :

$$2xy \le x^2 + y^2 = a^2, \quad 2zt \le z^2 + t^2 = b^2.$$

Suy ra $$2(xy + zt) \le a^2 + b^2.$$

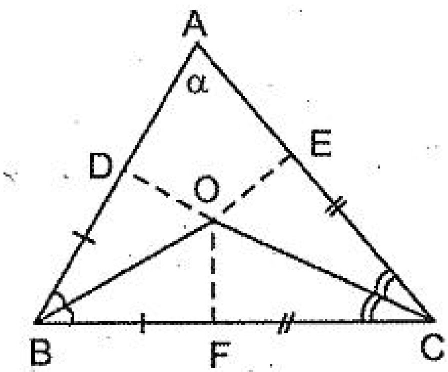


Hình 228

$$S_{EFGH} = xy + zt + ab \le \frac{a^2 + b^2}{2} + ab = \frac{(a + b)^2}{2}$$

$\max S_{EFGH} = \dfrac{(a + b)^2}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$, $z = t$. Khi đó EFGH là hình vuông có cạnh tạo với cạnh của hình chữ nhật ABCD góc 45^o (h.228b).

358. (h.229) Trên BC lấy BF = BD thì CF = CE. Gọi O là giao điểm của các tia phân giác các góc B và C. Dễ dàng chứng minh được ΔODE cân tại O có góc ở đỉnh không đổi :



Hình 229

Đặt $\widehat{A} = \alpha$ thì $\widehat{BOC} = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ nên

$$\widehat{DOE} = 360^o - 2\left(90^o + \frac{\alpha}{2}\right) = 180^o - \alpha$$

Do đó DE nhỏ nhất ⇔ OD nhỏ nhất ⇔ OF nhỏ nhất ⇔ OF ⊥ BC. Khi đó D, E là hình chiếu của O trên AB, AC.

359. Gọi b, c là các cạnh góc vuông của các tam giác vuông có $b + c = 2m$ (hằng số). Chu vi tam giác nhỏ nhất ⇔ cạnh huyền nhỏ nhất ⇔ $b^2 + c^2$ nhỏ nhất.

Đặt $b = m + x$ thì $c = m - x$. Khi đó

$$b^2 + c^2 = (m + x)^2 + (m - x)^2 = 2m^2 + 2x^2 \ge 2m^2.$$

Như vậy $\min (b^2 + c^2) = 2m^2 \Leftrightarrow b = c$.

360. Xét các tam giác vuông có cạnh huyền a không đổi. Gọi x, y là độ dài các cạnh góc vuông. Ta có

$$2xy \le x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \le 2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \le 2a^2 \Rightarrow x + y \le a\sqrt{2}.$$

$$\max (x + y) = a\sqrt{2} \Leftrightarrow x = y.$$

Chu vi tam giác vuông lớn nhất bằng $a + a\sqrt{2}$ khi và chỉ khi tam giác đó vuông cân.

361. (h.230) Đặt NP = x, MN = y. Ta có :

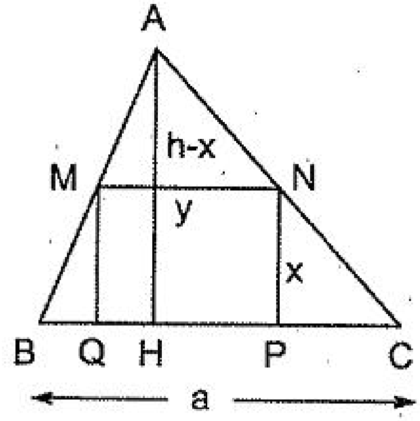
$$S_{AMN} + S_{BMNC} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow y(h - x) + x(a + y) = ah$$

$$\Rightarrow hy + ax = ah \Rightarrow y = \frac{a}{h}(h - x). \qquad (1)$$

Để chứng minh (1), cũng có thể xét các tam giác đồng dạng AMN và ABC, suy ra $\frac{y}{a} = \frac{h - x}{h}$, từ đó $y = \frac{a}{x}(h - x)$.

Gọi diện tích MNPQ là S. Từ $y = \frac{a}{h}(h - x)$, biểu thị S theo x được $S = xy = \frac{a}{h}x(h - x)$. Do a và h là các hằng số dương nên S lớn nhất $\Leftrightarrow$ $x(h - x)$ lớn nhất. Ta thấy x và h – x là hai số có tổng không đổi nên tích lớn nhất khi và chỉ khi hai số bằng nhau, tức là



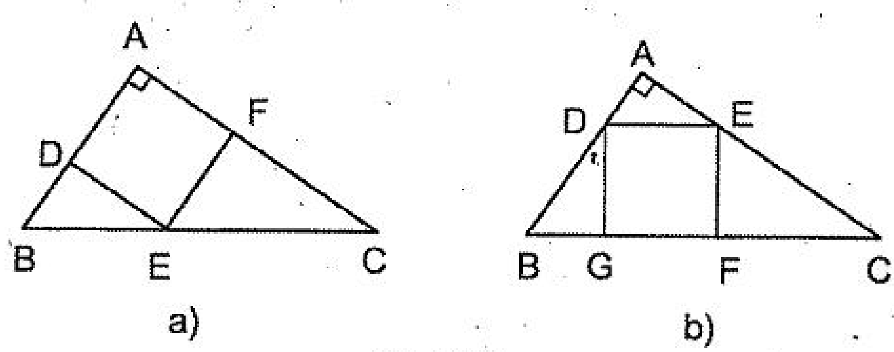
Hình 230

$$x = h - x \Leftrightarrow x = \frac{h}{2}$$

Khi đó MN là đường trung bình của ΔABC.

362. Gọi b, c là độ dài các cạnh góc vuông, a là độ dài cạnh huyền. Trong cách cắt thứ nhất (h.231a), cạnh hình vuông bằng $\frac{bc}{b + c}$ (xem ví dụ 31a). Trong cách cắt thứ hai (h.231b), cạnh hình vuông bằng $\frac{ah}{a + h}$ (xem ví dụ 41).

Sau đó chứng minh rằng $\frac{bc}{b + c} > \frac{ah}{a + h}$ (chú ý rằng bc = ah).

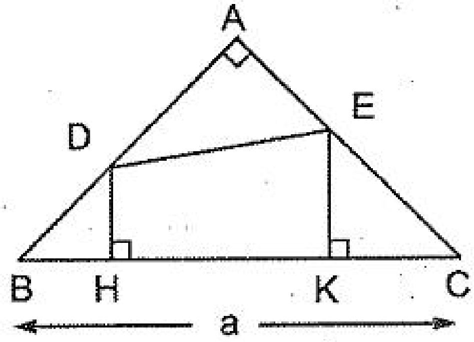


Hình 231

363. (h.232) Ta có :

$$S = (DH + EK)\frac{HK}{2} = (BH + KC)\frac{HK}{2}$$

Ta thấy (BH + KC) + HK = a không đổi nên tích (BH + KC). HK lớn nhất khi và chỉ khi $BH + KC = KH = \frac{a}{2}$. Khi đó diện tích DEKH lớn nhất bằng $\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$ khi và chỉ khi $HK = \frac{a}{2}$. Có vô số tứ giác DEKH như vậy.



Hình 232

364. (h.233) Đặt BC = a, AC = b, AB = c, khoảng cách từ M đến các cạnh trên theo thứ tự là x, y, z, đường cao ứng với BC là h.

Ta có $$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}.x + \frac{b}{2}.y + \frac{c}{2}.z = \frac{a}{2}.h \Rightarrow ax + by + cz = ah.$$

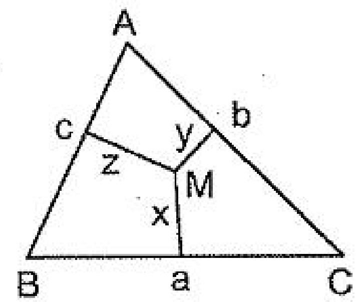
Giả sử $a \geq b \geq c$ thì

$$ax + ay + az \geq ax + by + cz = ah$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq h. \text{ Xảy ra dấu bằng}$$

$$\Leftrightarrow ay + az = by + cz \Leftrightarrow y(a - b) + z(a - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a - b)y = 0 \\ (a - c)z = 0\end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0 \qquad (1)$$



Hình 233

hoặc $\qquad a = b, z = 0 \qquad (2)$

hoặc $\qquad a = b = c \qquad (3)$

Trường hợp (1) ứng với M trùng A ; trường hợp (2) ứng với ΔABC cân tại C (C là góc nhỏ nhất) và M thuộc đáy AB ; trường hợp (3) ứng với ΔABC đều, M bất kì.

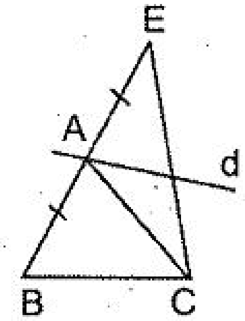
Vậy tổng các khoảng cách từ M đến ba cạnh của tam giác có giá trị nhỏ nhất bằng đường cao ứng với cạnh lớn nhất. Nếu tam giác đều thì M là điểm bất kì nằm bên trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác. Nếu tam giác cân có cạnh bên lớn hơn cạnh đáy thì M thuộc cạnh đáy.

Các trường hợp còn lại, M trùng với đỉnh của góc lớn nhất trong tam giác.

365. Giải tương tự bài 364. Tổng nhỏ nhất bằng chiều cao ứng với cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB, AC. Nếu Δ ABC cân tại A : M là điểm bất kì thuộc đáy. Còn lại : M trùng với đỉnh đối diện với cạnh lớn nhất trong hai cạnh AB , AC.

366. Nếu hình thang cân : M là điểm bất kì thuộc đáy nhỏ. Nếu hình thang không cân : M trùng với đỉnh của góc lớn hơn trong hai góc kề đáy nhỏ.

367. Phải xét thêm trường hợp d không cắt cạnh BC. Ta lấy E đối xứng với B qua A (h.234), khi đó d cắt đoạn thẳng CE. Giải tương tự như ví dụ 61.



Hình 234

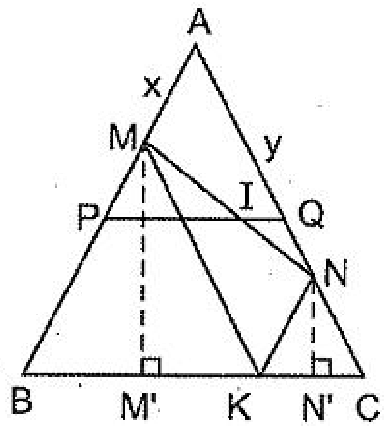
Trong cả hai trường hợp, đường thẳng d phải dựng chứa cạnh lớn nhất trong hai cạnh AC, AB.

Chú ý : Đặc biệt hoá bài toán khi ΔABC vuông cân tại A, ta có bài toán : Cho hình vuông ABCD. Dựng đường thẳng đi qua tâm hình vuông sao tổng các khoảng cách từ bốn đỉnh hình vuông đến đường thẳng có giá trị nhỏ nhất (*Trả lời :* đường thẳng phải dựng gồm hai đường thẳng chứa đường chéo hình vuông).

368. Qua K, dựng đường thẳng cắt hai cạnh kề của hình vuông tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Xem ví dụ 59.

369. (h.235) a) Vẽ MM', NN' $\perp$ BC. Ta có

$$MN \geq M'N' = \frac{BC}{2}.$$



Hình 235

Do đó $\min MN = \dfrac{BC}{2} \Leftrightarrow MN \,//\, M'N' \Leftrightarrow$ M, N là trung điểm của AB, AC.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Qua I kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB, AC ở P, Q thì P, Q là trung điểm của AB, AC. Ta luôn có $S_{AMN} \leq S_{APQ}$ (xem ví dụ 59) nên $S_{AMN} \leq \dfrac{1}{4} S_{ABC}$. Xảy ra dấu bằng khi MN là đường trung bình PQ.

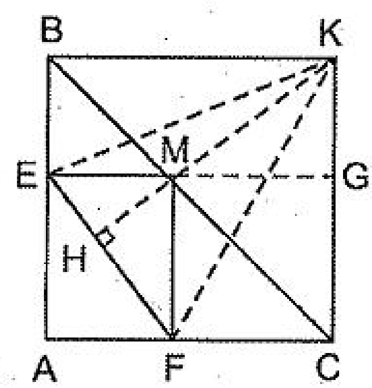
370. (h.236) a) Chu vi MEAF bằng AB + AC.

b) Gọi K là giao điểm của HM và đường vuông góc với AC tại C.

Hãy chứng minh rằng CK = CA.

c) Ta có

$$S_{KEM} = S_{BEM},\ S_{KMF} = S_{CMF} \Rightarrow S_{KEF} = S_{BEFC}.$$



Hình 236

Do đó S_{KEF} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_{AEF}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE. AF lớn nhất $\Leftrightarrow$ AE = AF (chú ý rằng AE + AF không đổi). Khi đó M là trung điểm của BC.

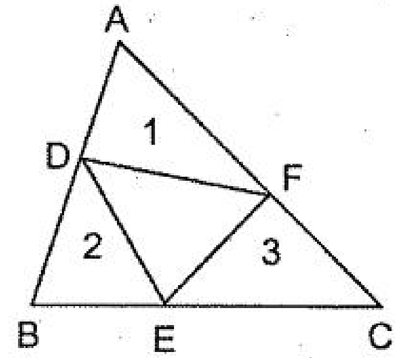
371. (h.237) a) Dùng S_{BDC} làm trung gian, ta có $S_{BDE} = kS_{BDC}$, $S_{BDC} = (1 - k)S$ nên

$$S_{BDE} = k(1 - k)S.$$

Tương tự đối với S_{ADF}, S_{CEF}. Suy ra

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3k(1 - k)S.$$

Ta thấy S_{DEF} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2 + S_3$ lớn nhất $\Leftrightarrow k(1 - k)$ lớn nhất. Do k và $1 - k$ có tổng không đổi nên tích $k(1 - k)$ lớn nhất khi và chỉ khi $k = 1 - k$, tức là $k = \frac{1}{2}$.



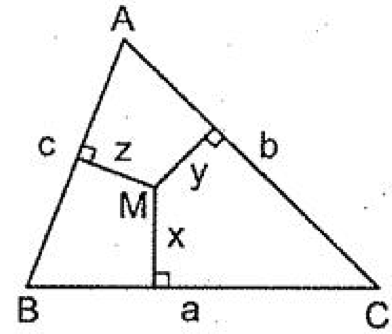
Hình 237

372. (h.238) Ta nghĩ đến biểu thức $ax + by + cz$ có giá trị không đổi bằng 2S. Hãy chứng minh

$$(ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq (a + b + c)^2$$

để suy ra $\quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2S}$.

Xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $x = y = z$, tức là M là giao điểm các đường phân giác của tam giác.



Hình 238

373. (h.239) Ở phía ngoài ΔABC, vẽ các tam giác đều ACC' và ABB_1. Vẽ các tam giác đều AMM' và AMM_1 như ở hình 239. Ta có $\Delta AM'C' = \Delta AMC$ (c.g.c). Khi đó $MA = MM'$, $MC = M'C' \Rightarrow BM + MA + MC = BM + MM' + M'C' \geq BC'$ (hằng số). Vì thế M phải thuộc đoạn thẳng BC'.

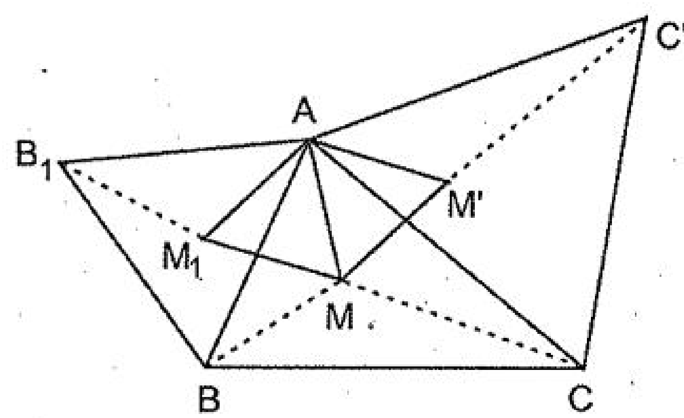
Lập luận tương tự như trên, M phải thuộc đoạn thẳng CB_1. Như vậy M là giao điểm của hai đoạn thẳng BC' và CB_1.

Chú ý rằng

$\widehat{BAC} + \widehat{CAC'} < 120^o + 60^o = 180^o$,

$\widehat{BCA} + \widehat{ACC'} < 120^o + 60^o = 180^o$

nên đoạn thẳng BC' cắt cạnh AC tại một điểm nằm giữa A và C. Tương tự, đoạn thẳng CB_1 cắt cạnh AB tại một điểm nằm giữa A và B. Do đó tồn tại giao điểm M của các đoạn thẳng BC', CB_1 và điểm M nằm bên trong ΔABC.

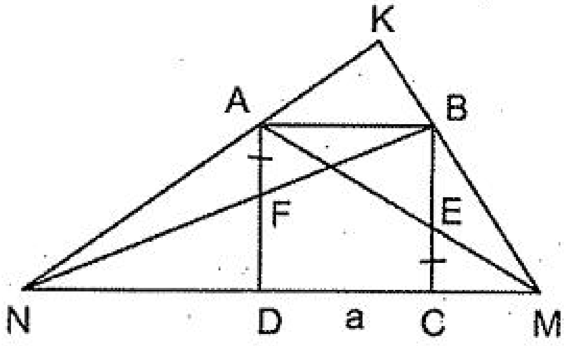


Hình 239

374. (h.240) a) AB // MN

$$\Rightarrow \frac{CM}{BA} = \frac{CE}{BE} = \frac{AF}{FD} = \frac{BA}{DN}$$

$$\Rightarrow CM.\ DN = AB^2 = a^2.$$



Hình 240

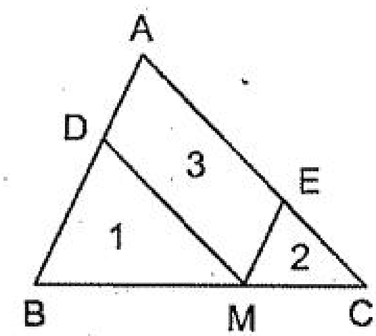
b) Ở câu a ta có $\frac{CM}{AB} = \frac{AB}{DN}$ nên $\frac{CM}{CB} = \frac{AD}{DN}$.

Do đó ΔCMB và ΔDAN đồng dạng (c.g.c) nên $\widehat{CMB} = \widehat{DAN}$. Suy ra $\widehat{CMB} + \widehat{DNA} = 90^o$. Vậy $\widehat{MKN} = 90^o$.

c) MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CM + DN nhỏ nhất. Các độ dài CM, DN có tích không đổi (câu a) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi CM = DN.

Khi đó $CM^2 = a^2$, CM = DN = a. Độ dài MN nhỏ nhất bằng 3a khi và chỉ khi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD.

375. Kí hiệu như trên hình 241. Đặt $S_{ABC} = S$, $S_{DBM} = S_1$, $S_{EMC} = S_2$, $S_{ADME} = S_3$. Đặt BM = x, MC = y, BC = a, ta có x + y = a.



Hình 241

Do $S_3 = S - (S_1 + S_2)$ nên $\frac{S_3}{S} = 1 - \frac{S_1 + S_2}{S}$

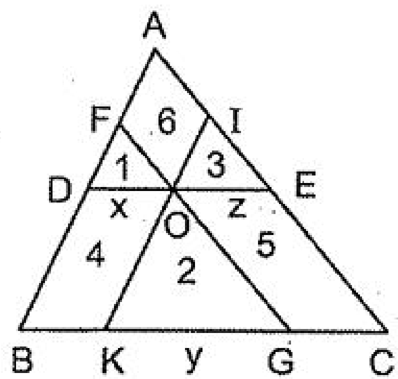
Các tam giác DBM, EMC, ABC đồng dạng nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{a}\right)^2, \ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{y}{a}\right)^2.$$

Do đó

$$\frac{S_3}{S} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{a^2 - (x^2 + y^2)}{a^2} = \frac{(x+y)^2 - (x^2 + y^2)}{a^2} = \frac{2xy}{a^2}$$

S_3 lớn nhất $\Leftrightarrow$ xy lớn nhất. Các số x, y có tổng không đổi nên tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi x = y. Khi đó M là trung điểm của BC, và diện tích hình bình hành ADME bằng nửa diện tích tam giác ABC.



Hình 242

376. (h.242) a) Đặt BC = a ; đặt x, y, z là cạnh song song với BC hoặc nằm trên BC của các tam giác nhỏ ; S_1, S_2, S_3 là các diện tích của chúng, S là diện tích ΔABC. Các tam giác nhỏ đồng dạng với ΔABC nên :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{S_1}{S} = \frac{4}{81} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{2}{9}.$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = \frac{S_2}{S} = \frac{16}{81} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{4}{9}.$$

Chú ý rằng $x + y + z = a$ nên $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Suy ra $\frac{z}{a} = \frac{1}{3}$

Do đó $$\frac{S_3}{S} = \left(\frac{z}{a}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_3 = 9\ (cm^2).$$

b) Ta có : $$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} \qquad (1)$$

Từ $x + y + z = a$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = a^2$.

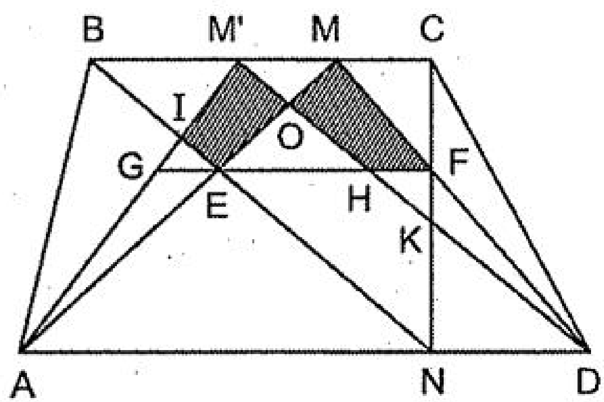
Nhưng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ nên

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq a^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{1}{3}S_{ABC}$. Xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow OD = OE$, $OF = OG$, $OI = OK \Leftrightarrow O$ là trọng tâm của ΔABC.

377. a) (h.243) Gọi E là giao điểm của AM và BN, F là giao điểm của DM và CN. Trước hết ta thấy EF // AD. Thật vậy

$$\frac{ME}{EA} = \frac{BM}{AN} = \frac{MC}{ND} = \frac{MF}{FD} \Rightarrow EF\ //\ AD.$$



Hình 243

Gọi M' là điểm bất kì khác M thuộc đáy BC, giả sử M' nằm giữa B và M. Gọi I là giao điểm của AM' và BN, gọi K là giao điểm của DM' và CN. Với điều giả sử trên, I nằm giữa B và E, K nằm giữa N và F. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{MENF} > S_{M'INK}$. Muốn vậy chỉ cần chứng minh $S_{MOKF} > S_{M'OEI}$ (O là giao điểm của AM và DM').

Gọi giao điểm của EF với M'A và M'D là G và H. Ta sẽ chứng minh GE = HF. Thật vậy, do EF // BC // AD nên

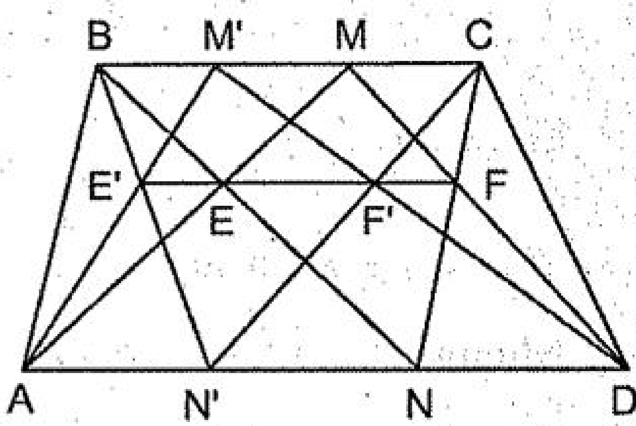
$$\frac{GE}{M'M} = \frac{AE}{AM} = \frac{DF}{DM} = \frac{HF}{M'M} \Rightarrow GE = HF.$$

Do đó $S_{AGE} = S_{DHF}$. Suy ra $S_{MM'GE} = S_{MM'HF}$ (vì $S_{AMM'} = S_{DMM'}$) $\Rightarrow$ $S_{M'OEG} = S_{MOHF}$. Ta có $S_{MOKF} > S_{MOHF} = S_{M'OEG} > S_{M'OEI}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) (h.244) Cố định điểm N thuộc cạnh đáy AD, ta dựng điểm M thuộc cạnh đáy BC sao cho $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{AN}{AD}$. Theo câu a, S_{MENF} lớn nhất.

Ứng với điểm N' bất kì thuộc cạnh đáy AD, dựng điểm M' thuộc cạnh đáy BC sao cho $\dfrac{BM'}{BC} = \dfrac{AN'}{AD}$, ta được tứ giác M'E'N'F' có diện tích lớn nhất. Ta sẽ chứng minh rằng $S_{MENF} = S_{M'E'N'F'}$.



Hình 244

Theo câu a, ta có EF // AD, E'F' // AD. Bây giờ ta sẽ chứng minh E', E, F', F thẳng hàng. Thật vậy,

$$\frac{BE'}{E'N'} = \frac{BM'}{AN'} = \frac{BM}{AN} = \frac{BE}{EN} \Rightarrow E'E \,//\, AD.$$

Vậy E', E, F', F thẳng hàng.

Ta lại có

$$\frac{E'F'}{AD} = \frac{M'E'}{M'A} = \frac{ME}{MA} = \frac{EF}{AD} \Rightarrow EF = E'F'.$$

Do đó $S_{M'E'F'} = S_{MEF}$ và $S_{N'E'F'} = S_{NEF} \Rightarrow S_{M'E'N'F'} = S_{MENF}$.

Như vậy các điểm M, N phải dựng là các điểm chia trong BC và AD theo cùng một tỉ số. Bài toán có vô số nghiệm hình.

Để dựng các điểm M, N nói trên, ta chú ý rằng nếu AB cắt CD ở P thì P, M, N thẳng hàng, còn nếu AB // CD thì MN // AB // CD.